

$$RSS(g, \lambda) = \sum_{i=1}^m (y_i - g(x_i))^2 + \lambda \int [g''(t)]^2 dt$$

La soluzione è una spline cubica naturale, che possiamo scrivere come:

$$g(x) = \sum_{j=1}^m N_j(x) \theta_j,$$

dove le $N_j(x)$ sono un set m -dimensionale di funzioni di base per rappresentare questa famiglia di spline naturali.

Il criterio sopra si riduce a:

$$RSS(\theta, \lambda) = (\underline{y} - N\theta)^T (\underline{y} - N\theta) + \lambda \theta^T \Omega_N \theta,$$

dove $\{N\}_{ij} = N_j(x_i)$ e $\{\Omega_N\}_{ij} = \int N_j''(t) N_i''(t) dt$

La soluzione è una ridge regression generalizzata

$$\hat{\theta} = (N^T N + \lambda \Omega_N)^{-1} N^T y,$$

e la stima sarà data da:

$$\hat{g}(x) = \sum_{j=1}^m N_j(x) \hat{\theta}_j.$$

A questo punto posso scrivere questa soluzione come:

$$\hat{g} = \underbrace{N(N^T N + \lambda \Omega_N)^{-1} N^T}_{\Omega_N, \text{ smoother matrix}} y = \Omega_N y.$$

$$df_{\lambda} = \sum_{i=1}^M \{S_{\lambda}\}_{ii} = \text{tr} a(S_{\lambda})$$

fornisce la dimensione dello spazio di proiezione, quindi il numero di funzioni di base, e quindi il numero di parametri coinvolti nella stima.

Possiamo fornire una decomposizione di S_{λ} come:

$$S_{\lambda} = \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda) \underline{u}_k \underline{u}_k^T,$$

$$\text{con } \phi_k(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda d_k}$$

dove d_k è il corrispondente auto valore di una matrice K tale per cui:

$$S_{\lambda} = (I + \lambda K)^{-1}.$$

Si può vedere che:

$$df_{\lambda} = \text{tr} a(S_{\lambda}) = \sum_{k=1}^m \phi_k(\lambda)$$