Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor : Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 1 - Principio di induzione - 27/09/2024

Richiamo

Il principio di induzione può essere usato per dimostrare una successione di proposizioni $P_0, P_1, P_2, \dots$, che possiamo denotare con $\{P_n\}_{n\in I}$ con I insieme di indici.
↳ ad esempio $I = \{0,1,2,\dots\}$ o $I = \{1,2,3,\dots\}$

Una dimostrazione per induzione è composta da 2 passi:

i) passo base/iniziale: si verifica P_0 (o in generale P_k, con k primo indice in I);

ii) passo induttivo: supponendo vera P_n (per n generico), si verifica P_{n+1}.

In questo modo tutte le P_n sono verificate $\forall n \in I$.

Es. 1

Dimostrare per induzione che

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Es. 2

Dimostrare per induzione che

1) $7^n + 3n - 1$ è multiplo di 9 $\forall n \geq 1$.

2) $n^3 - n$ è multiplo di 6 $\forall n \geq 1$.

↳ N.B.
È vero anche per $n = 0$, anche se l'esercizio ci chiede di dimostrarlo per $n \geq 1$.

Es. 3

Dimostrare per induzione che

1) $2^n \geq n + 1$, 2) $3^n \geq n^2 + 1$

Es. 4

Considerando la succesione di Fibonacci $\{a_i\}_{i \geq 0}$ definita ricorsivamente come

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_i = a_{i-1} + a_{i-2} & \forall i \geq 2 \end{cases}$$

dimostrare per induzione che $\quad a_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j \qquad \forall i \geq 3$

Soluzioni

Es. 1

1) i) Passo base: Fissiamo $n = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

$\rightarrow P_1$ verificata

ii) Passo induttivo: Supponiamo vera P_n, verifichiamo P_{n+1}.

Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, verifichiamo che $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{\sum_{k=1}^{n} k} + n + 1 = \sum_{k=1}^{n} k + n + 1 \underset{\uparrow P_n \text{ vera}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2) i) $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$$

$$\frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$\rightarrow P_1$ verificata

ii) Supponiamo vera P_n, verifichiamo P_{n+1}.

Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

verifichiamo che $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ P_n \text{ vera}}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

3) i) $n = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 \\ \\ \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 \end{array}\right| \rightarrow P_1 \text{ verificata}$$

ii) Supponiamo vera P_n, verifichiamo P_{n+1}.

Supponiamo che $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, verifichiamo che $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \underset{\substack{\uparrow \\ P_n \text{ vera}}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Es. 2

1) i) $n = 1$

$7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9$, che è banalmente multiplo di 9. $\rightarrow P_1$ verificata

ii) Supponiamo che $7^n + 3n - 1$ sia multiplo di 9, ovvero che $\exists K \in \mathbb{N}$ tale che

$$7^n + 3n - 1 = K \cdot 9 \qquad (P_n) \qquad (\text{da cui } 7^n = 9K - 3n + 1)$$

Vogliamo dimostrare che $7^{n+1} + 3(n+1) - 1$ è multiplo di 9, ovvero $\exists\, J \in \mathbb{N}$ tale che

$$7^{n+1} + 3(n+1) - 1 = J \cdot 9$$

Verifichiamolo:

$$7^{n+1} + 3(n+1) - 1 = 7 \cdot 7^{n} + 3n + 3 - 1 = 7 \cdot 7^{n} + 3n + 2$$

$$\overset{P_n}{=} 7(9K - 3n + 1) + 3n + 2 = 9 \cdot 7 \cdot K - 21n + 7 + 3n + 2$$

$$= 9 \cdot 7 \cdot K - 18n + 9 = 9\underbrace{(7K - 2n + 1)}_{=:J} = 9J$$

il simbolo $J := 7K - 2n + 1$ vuol dire che sto definendo il numero J come $7K - 2n + 1$.

2) i) $n = 1$

$1^3 - 1 = 0 = 0 \cdot 6$ → P_1 verificata in quanto 0 è multiplo di qualsiasi numero

ii) Supponiamo che $\exists\, K \in \mathbb{N}$ tale che

$$n^3 - n = 6K \qquad (P_n)$$

verifichiamo che $\exists\, J \in \mathbb{N}$ tale che

$$(n+1)^3 - (n+1) = 6J$$

Verifichiamolo:

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3n^2 + 3n$$

$$\overset{P_n \text{ vera}}{=} 6K + 3n(n+1)$$

Notiamo che $n(n+1)$ è pari in quanto prodotto di 2 interi consecutivi, dunque $\exists\, t \in \mathbb{N}$ tale che $n(n+1) = 2t$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dunque

$$(n+1)^3 - (n+1) = \ldots = 6K + 6t = 6(K+t) =: 6J$$

Es. 3

1) i) $n = 1 \to \begin{array}{l} 2^1 = 2 \\ n+1 = 2 \end{array} \Big| \to 2 \geq 2$, P_1 verificata

ii) Assumiamo che $2^n \geq n+1$, dimostriamo che $2^{n+1} \geq n+2$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\uparrow P_n}{\geq} 2(n+1) = 2n+2 \geq n+2$$

2) i) $n = 1 \to \begin{array}{l} 3^1 = 3 \\ 1^2+1 = 2 \end{array} \Big| \to 3 \geq 2$, P_1 verificata

ii) Assumiamo $3^n \geq n^2+1$, dimostriamo $3^{n+1} \geq (n+1)^2 + 1 = n^2+2n+2$

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \underset{\uparrow P_n}{\geq} 3(n^2+1) = 3n^2+3 = n^2 + \underbrace{2n^2}_{\geq n} + \underbrace{3}_{\geq 2} \geq n^2+2n+2 = (n+1)^2+1$$

↳ il fatto che $n^2 \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ può essere a sua volta dimostrato per induzione.

Es. 4

i) $i = 3$

$$a_3 = a_2 + a_1 = a_1 + a_0 + a_1 = 1 + 0 + 1 = 2$$ (da definizione della successione)

$$1 + \sum_{j=1}^{1} a_j = 1 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$\to P_3$ verificata

ii) Assumiamo che $a_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j$ e dimostriamo che $a_{i+1} = 1 + \sum_{j=1}^{i+1-2} a_j = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j$

$$a_{i+1} = a_i + a_{i-1} = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j + a_{i-1} = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{i-2} + a_{i-1}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j$$