

RITESSERE I SAPERI
LABORATORIO DI MATEMATICA

Michela Brundu
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
Via Valerio 12/1, 34127 Trieste
brundu@units.it

Premessa

Questo Quaderno contiene il testo di due conferenze tenute al Convegno *Ritessere i saperi - Il pensare cristiano alla prova della complessità* organizzato dal *Centro Studi e Ricerche dell'Istituto Internazionale Jacques Maritain* a Portogruaro il 26 e 27 ottobre 2006.

Nel percorso progettato dagli organizzatori si legge:

È ancora immaginabile una tessitura in unità dei saperi? Da molti versanti emerge una risposta negativa: la frammentarietà delle discipline e delle prospettive parrebbe tale da costringere a rinunciare ad un orizzonte di integralità per il conoscere dell'uomo. Ma l'interdetto viene da un'impossibile unità o da un vuoto di immaginazione? Il progetto di ricerca 'Ritessere i saperi - il pensare cristiano alla prova della complessità' intende prendere sul serio la sfida dell'immaginazione ed avviare un confronto tra diversi ambiti disciplinari, esplorando le varie forme della razionalità nelle loro possibili interazioni. Il percorso di approfondimento si muove tra la tematizzazione degli strumenti intellettuali elaborati dal pensiero classico e le originalità metodologiche e di contenuto tipiche della tradizione cristiana; alla luce di questi riferimenti verranno via via analizzati alcuni ambiti disciplinari, nell'intento di far emergere soprattutto la varietà del dispiegarsi della ragione e nell'ipotesi che la possibile unità vada immaginata tenendo assieme le vie dell'intelligenza e le condizioni dell'esistenza dell'uomo.

Questo ambizioso progetto prevedeva dunque la presentazione di laboratori di discipline scientifiche (matematica, fisica, biologia) a una vasta *audience* composta da studiosi di storia, filosofia, antropologia e sociologia. Per questo la presente esposizione ha dovuto necessariamente assumere un taglio divulgativo (a scapito della precisione), nel tentativo di fornire alcune linee di sviluppo storico e culturale della matematica senza entrare nel merito dei contenuti.

Trieste, 12 ottobre 2012

Ritessere i saperi - Il pensare cristiano alla prova della complessità

LABORATORIO DI MATEMATICA

*La matematica è quella disciplina
in cui nessuno sa di che cosa parli
né se ciò che dice sia vero.*

Bertand Russel, 1901

I matematici dei nostri giorni sono coloro che studiano e sviluppano la matematica. Questo è ovvio. Meno ovvio è che cosa vada sotto il nome di “matematica”. Il significato di questo termine è cambiato nel corso dei secoli e dei millenni: mentre anticamente una buona definizione era quella di “scienza dei numeri e delle grandezze”, oggi questo appellativo è sicuramente improprio, vago e, in un certo senso, fuorviante.

È opportuno tratteggiare, anche se in modo sommario, incompleto e semplificativo, una breve storia di ciò che, nel corso della storia dell'uomo, è stato compreso sotto il nome di “matematica”. In seguito, si potrà tentare un approccio (opinabile) alla relazione tra matematica e verità, tra matematica e gli altri saperi, specialmente quelli scientifici, illustrando, con un esempio, che cosa significa “fare” matematica.

PARTE I: CENNI SULLA STORIA DEL PENSIERO MATEMATICO

La sintetica descrizione che segue non si espande in modo proporzionale allo sviluppo e all'importanza della matematica nei vari periodi. Mette l'accento sulle origini e sul periodo classico, che sono più semplici e legati al significato stesso della disciplina.

Nel corso dei secoli, con il dilatarsi delle conoscenze matematiche, cresce anche la loro complessità e specializzazione; dunque la descrizione diventa più sommaria e meno dettagliata, nel tentativo di focalizzare non tanto le nuove teorie e le scoperte, ma piuttosto alcuni tratti che diano un'idea del senso generale della disciplina: i nuovi rami che nascono, le motivazioni, le controversie.

Una trattazione sistematica e alcuni approfondimenti sono disponibili nei testi in bibliografia.

1. Le origini

*Probabilmente solo a chi possiede qualche conoscenza matematica
verrà in mente di cominciare da 0 anziché da 1.*

Bertrand Russel

È abbastanza condivisa l'opinione che, originariamente, la matematica nasca come un'esigenza della vita quotidiana dell'uomo. Le nozioni di numero, grandezza e forma fanno forse riferimento alla differenza più che all'uguaglianza: un lupo non è un branco di lupi, una pecora non è un gregge di pecore. E il contrasto tra un esemplare e molti dello stesso tipo fa nascere, presumibilmente, il concetto di "uno". Ancora dall'osservazione, altri gruppi, come le coppie, possono essere messi in "corrispondenza biunivoca": due mani, due piedi, due occhi...

Anche oggi alcuni popoli primitivi contano in questo modo: "uno, due, molti".

Successivamente nasce l'esigenza di strutturare il conto: a gruppi di 5 o di 10 o di 20 (le dita di una mano, di due mani, di mani e piedi). Il sistema decimale, notò Aristotele, è legato alla nostra fisiologia e non a proprietà particolari del numero 10!

Le scoperte archeologiche provano che il conto dei numeri (magari con tacche incise su ossa o su pietre) è anteriore non solo alla scrittura, ma anche all'uso dei metalli e della ruota.

Lo sviluppo del linguaggio è essenziale per la nascita del pensiero matematico strutturato: sono necessarie migliaia di anni per ricavare concetti astratti da ripetute situazioni concrete.

Per completezza, occorre riportare anche un'altra teoria: che l'idea di numero, cioè, non nasca da esigenze pratiche, ma da riti religiosi, sorta di "recite" della creazione del mondo, in cui i partecipanti apparivano in un preciso ordine. In questo contesto, nascerebbe prima il concetto di numero ordinale che quello di numero cardinale. Non è questa una teoria del tutto convincente, ma in essa troverebbero le radici alcune forme della filosofia pitagorica: i numeri pari come femminili, bui, malvagi; i dispari come maschili, solari, buoni.

Questo argomento è successivamente ripreso dopo Parmenide da **Zenone di Elea** (V sec. a.C.), interessante soprattutto per i suoi paradossi. Essi nascono dall'esigenza di confutare la pluralità e il movimento. Particolarmente interessanti sono i paradossi della tartaruga e della freccia.

Aristotele scioglie questi paradossi distinguendo il piano del reale da quello del pensiero. Ovviamente, per la matematica di oggi, questo modo di procedere non è accettabile: i paradossi si spiegano con teorie matematiche più sofisticate di quelle disponibili ai tempi di Zenone!

Il sorgere delle civiltà in Egitto, Mesopotamia, India e Cina vede nascere, a partire dal IV millennio a.C., forme di scrittura e di rappresentazione simbolica. Agli inizi del secolo scorso si inizia a comprendere anche i contributi matematici presenti nei reperti archeologici della Mesopotamia: addirittura equazioni di secondo grado. Quelli egiziani erano già allo studio: dalla stele di Rosetta a numerosi papiri; da essi si comprende come gli egiziani utilizzassero con disinvoltura le frazioni di numeratore 1, quelli che chiamiamo oggi calcoli algebrici e la geometria piana e solida con una perizia e una sottigliezza notevoli. La geometria stessa (ne fa fede l'etimologia) si fa nascere proprio in Egitto: occorre misurare la terra prima di ogni inondazione del Nilo...

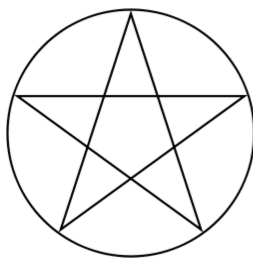
2. L'Età d'Oro della matematica antica

*Archimede sarà ricordato quando Eschilo sarà dimenticato,
perché le lingue muoiono ma le idee matematiche no.*

G.H. Hardy

Nella cosiddetta *Era talassica* (800 a.C. – 800 d.C.) il centro della cultura matematica si sposta gradualmente nell'area mediterranea: Grecia e Magna Grecia soprattutto. Qui si sviluppa specialmente la geometria (tra tutti, Talete con la sua scuola ionica e Pitagora con i “pitagorici”). **Talete di Mileto** (VII sec. a.C.), noto filosofo del suo tempo, studia probabilmente in Egitto e forse da lì riporta il cosiddetto “teorema di Talete” (un angolo inscritto in un semicerchio è un angolo retto), ma ne fornisce anche una “dimostrazione”: per questo è considerato il primo matematico della storia. In ogni caso, sono stati i greci ad aggiungere alla geometria una struttura logica.

Soprattutto **Pitagora di Samo** (VI sec. a.C.), figura controversa e oscura, e i suoi discepoli fanno fare alla matematica un salto cruciale: dalle motivazioni essenzialmente pratiche che essa aveva avuto fino ad allora, si passa ad una impalcatura concettuale e alla discussione filosofica dei principi. Si dice che il motto della scuola pitagorica fosse “tutto è numero”. A questa essenza riconducono anche lo studio dei solidi regolari (quelli aventi per facce poligoni regolari) e il loro significato simbolico. Sopra tutti, lo studio del *pentagramma*, o *pentacolo*, cioè la stella a cinque punte inscritta in un pentagono regolare, il cui utilizzo esoterico si è propagato nei secoli fino a Leonardo e, oggi, ha ricevuto una nuova notorietà col *Codice da Vinci* di Dan Brown.



Il pentacolo pitagorico

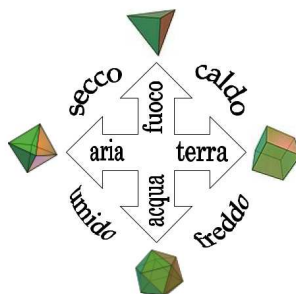
L'attenzione al numero diventa anche una sorta di “numerologia” (legata alla Cabala e a tradizioni precedenti). In particolare, dietro al concetto astratto della contrapposizione fra pari e dispari c'è una visione del mondo in cui il bene, l'ordine e la perfezione stanno dalla parte del dispari, mentre il male, il disordine e l'imperfezione da quella del pari. Il mondo è armonico e il suo è un ordine misurabile. Questa concezione del mondo entra in crisi non appena, in conseguenza del *teorema di Pitagora* (vedi Appendice A), si scoprono i numeri irrazionali, quindi non riducibili a frazioni, cioè non misurabili, non quantificabili. Il numero, proprio per sua natura, deve essere vero e reale; constatare l'esistenza di numeri irrazionali compromette seriamente la filosofia pitagorica.

Nel IV secolo a.C. Atene e la Magna Grecia sono i centri del pensiero matematico: si affrontano sofisticati problemi, come la duplicazione del cubo, si scrivono trattati di geometria e nascono scuole dove i discepoli apprendono liberamente le nuove scoperte. Crolla la fede pitagorica nel numero (intero o frazionario) che può descrivere l'universo e ogni oggetto sensibile. Aristotele fa riferimento ad una dimostrazione del fatto che il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili

(cioè il loro rapporto non è un numero razionale), specificando che era basata sulla distinzione tra numeri pari e dispari (vedi Appendice A).

Questi problemi, assieme all'ingresso del metodo deduttivo, modificano profondamente il modo di fare matematica: potremmo dire, in sintesi, che si passa da un'“algebra aritmetica” ad un'“algebra geometrica”. Tra i tanti studiosi di questo periodo, **Democrito** (noto per la sua dottrina atomica) tenta di spiegare anche la geometria in questo modo, dando origine ad un primitivo “metodo infinitesimale”. L'atomismo, pur rimanendo la più “scientifica” dottrina dell'antichità, ha notevoli limiti che sono dati dalla mancanza del metodo sperimentale.

Se con Socrate l'argomento matematico era meno rilevante, col filosofo ateniese **Platone** (428 – 348 a.C.) assume notevole importanza. All'interno del mondo platonico formato da idee (quindi distinto dal mondo empirico), ce ne sono alcune dette idee-matematiche, che corrispondono alle entità che stanno alla base di aritmetica e geometria. Vi sono delle idee che sono proprie del pensiero matematico, come l'uguaglianza, il quadrato, il cerchio; nella realtà empirica non troviamo mai l'uguaglianza assoluta, o un cerchio o un quadrato perfetti, essi sono solo copie di idee perfette. All'interno dell'articolato pensiero di Platone si riprendono concetti pitagorici: la struttura del cosmo formata dal Demiurgo risulta esplicitamente di tipo matematico. Le cose sono infatti ridotte ai quattro elementi empedoclei, che a loro volta sono ridotti a poche figure geometriche ulteriormente ridotte a numeri. La matematica è la “sintassi” del mondo, i numeri sono gli schemi strutturali delle cose, cioè il codice di interpretazione di tutto quanto esiste. Presumibilmente Platone viene a conoscenza dei cinque solidi regolari in un suo viaggio in Sicilia: la cosmologia che egli delinea eserciterà un grande fascino su scienziati e filosofi dei secoli successivi. La simbologia cosmica dei quattro elementi viene a intercettare la geometria dando origine a figure come l'ottaedro dell'aria, l'icosaedro dell'acqua, il cubo della terra, il tetraedro del fuoco.



Lo schema cosmologico di Platone

Aristotele (384 – 322 a.C.) assume una prospettiva diversa da Platone. Non vede la matematica come fondamento del mondo empirico, ma riflette in termini logici sul problema dell'infinito. Tramite un ragionamento basato su “atto” e “potenza”, Aristotele afferma che l'infinito non può esistere in atto, cioè come sostanza o attributo di sostanza, poiché ogni realtà è determinata e compiuta. L'infinito esiste solo come potenza o in potenza e consiste nella possibilità di aggiungere o suddividere in modo illimitato realtà limitate. La serie numerica ad esempio è infinita in potenza poiché può essere infinitamente aumentata, come infinito è lo spazio poiché può essere infinitamente suddiviso. Il limite della visione di Aristotele è il fatto che considera l'infinito solo in termini quan-

titativi, non come farà Plotino che esalterà il concetto di infinito “positivo”, ma questi termini trovano senso piuttosto in una prospettiva teologica e metafisica.

Alla fine del terzo secolo a.C. l'età ellenistica o alessandrina vede la comparsa di un importante matematico dell'antichità: **Euclide di Alessandria** (323 – 285 a.C.). Di lui si conosce poco, ma la sua opera *Elementi* è una pietra miliare nella storia della matematica. Probabilmente Euclide era un grande didatta e la sua opera è una sistemazione di risultati noti all'epoca. Forse sono sue alcune dimostrazioni e l'esigenza sistematica di dividere l'opera in libri tematici, facendoli precedere da una serie di definizioni, assiomi, postulati (che per la logica di oggi, tuttavia, non formano un sistema chiaro e completo). In questo e in altri suoi scritti matematici (alcune opere sono dedicate anche all'ottica e alla prospettiva), egli capovolge la relazione fra aritmetica e geometria rispetto alla prospettiva dei pitagorici: quella che successivamente sarà chiamata algebra, non è, per Euclide, che una parte della geometria.

Circa un secolo dopo **Archimede di Siracusa** (287 – 212 a.C.), oltre alla creazione di congegni bellici durante l'assedio di Siracusa, si occupa di fisica (statica, dinamica, studio dei fluidi) e di matematica: coniche, figure piane, solidi regolari o quasi regolari (detti poi *solidi archimedei*). Considerato padre della fisica matematica, con il suo trattato *Metodo* spiega come ha intuito molti degli enunciati che poi dimostra rigorosamente nelle opere matematiche: tramite l'esperienza ha trovato il fondamento di quei concetti che richiedono giustificazione tramite precisi e rigorosi processi formali.

Gli ultimi tre secoli a.C. segnano la cosiddetta “età d'oro” della matematica greca: oltre a Euclide e Archimede, altri nomi importanti segnano lo sviluppo di questa scienza: **Apollonio** (lo studio sistematico delle coniche), **Eratostene**, **Tolomeo**: introducono la trigonometria, studiano astronomia, ottica, ma mescolano anche aritmetica e astrologia, si occupano di geodesia, cioè di calcoli, misurazioni, tabelle di dati.

Già allora, per tutto il periodo talassico, e poi in seguito si manifestano due livelli di studio: uno più concettuale, logico, elegante, e uno più pratico, di basso spessore culturale, ma legato a problemi concreti o a mistiche numerologiche e astrologiche.

I Romani, invece, anche nel momento della loro massima espansione politica e culturale, non sembrano interessati alle speculazioni matematiche, ma soltanto alle applicazioni all'architettura e alla misurazione dei terreni.

Nella tarda età alessandrina (250-350 d.C.) due nomi da ricordare: **Diofanto** e **Pappo**, entrambi di Alessandria; il primo considerato il padre dell'algebra e il secondo della geometria. Diofanto esce fuori dalla tradizione greca classica, che geometrizzava i problemi numerici, e neanche prosegue la linea babilonese, interessata ai calcoli più complessi. Mentre i Babilonesi cercano soluzioni approssimate di equazioni polinomiali, Diofanto è interessato a quelle esatte; la sua modernità sta anche nell'introdurre una nuova simbologia adatta a rappresentare le potenze.

Pappo ha il suo stesso gusto per l'eleganza e la sottigliezza: pensa che ogni problema geometrico possa essere risolto con una costruzione appropriata. Addirittura ha il gusto (moderno) per la generalizzazione e tratteggia qualcosa di simile alla geometria analitica. Solo Descartes, molti secoli dopo, porterà a compimento questa intuizione.

3. La matematica antica extra europea

*Con l'aiuto di Dio e con il Suo prezioso aiuto,
affermo che l'Algebra è un'arte scientifica.*

Omar Khayyam,

Trattato sulla Dimostrazione di Problemi di Algebra, 1070

Per brevità, non citiamo il percorso parallelo della matematica in Cina e in India; solo va ricordato l'interesse quasi ossessivo dei Cinesi per il calcolo del numero “pi greco”, cioè il rapporto tra ogni circonferenza e il suo diametro, attuato con ingegnosi metodi di approssimazione. Tale interesse si ritrova anche tra gli Indiani, assieme a una forte propensione per l'astronomia e la trigonometria sferica (cioè lo studio degli angoli su una sfera), che è proprio la matematica utile per le indagini astronomiche. Inoltre introducono un sistema di numerazione simile a quello attuale, con nove cifre.

La matematica araba riserva una nota di merito particolare. Lo stato islamico creato da Maometto nel 600 si estende ben presto oltre l'Arabia, inglobando Alessandria (la cui grande biblioteca viene distrutta), popoli mediterranei e dell'Asia minore. In tal modo vengono assorbite e spesso tradotte opere matematiche provenienti dalla Grecia, dall'India, dalla Mesopotamia. Tali conoscenze vengono rimaneggiate e adattate alla mentalità e alla creatività araba. È grazie a questa opera di sistematica traduzione che possiamo avere al giorno d'oggi opere che altrimenti sarebbero andate distrutte. Il matematico **al-Khuwarizmi** (Baghdad, 780 – 850 circa) scrive due opere fondamentali che comprendono conoscenze di base note all'epoca. Dal suo nome deriva l'attuale termine “algoritmo” (cioè procedura di calcolo). Uno dei suoi trattati descrive il sistema numerico indiano con tanta cura che nel Medioevo si pensa che il sistema di numerazione decimale sia di origine araba e tale convinzione resisterà fino ai giorni nostri. L'altro, dal titolo *Al-jabr wa'l muqabalah* (che suona come *Completamento e riduzione*) dà il nome alla stessa “algebra”; tratta della soluzione di equazioni, con rigore ed eleganza. Dalle sue opere si deduce una triplice radice della matematica araba: influssi indiani (nell'aritmetica), tradizione mesopotamica (nell'algebra), ispirazione greca (nella trigonometria e nella geometria).

4. Il Medioevo

Ho dimostrato con prove certe quasi tutto quello che ho trattato.

Fibonacci, Liber abaci, 1228

Nel Medioevo, oltre ai contributi della Cina, dell'India e dell'Arabia, è presente la matematica di altre due culture: quella bizantina dell'Impero d'Oriente e quella romana dell'Impero di Occidente, entrambe di connotazione cristiana. I primi secoli sono senz'altro bui: grossolane traduzioni di opere antiche, sommari semplificati, nessun nome di spicco. Solo nel XII secolo si presenta un matematico di brillante ingegno: Leonardo Pisano (1170 – 1240), detto **Fibonacci**. Figlio di un mercante e quindi impregnato di metodi algebrici arabi, nel *Liber Abaci* discute problemi algebrici anche sofisticati con l'uso estensivo delle cifre indo-arabiche: le “nove figure indiane” assieme al segno 0 che in indiano viene chiamato “zefiro”. Da *zephyrum*, infatti, vengono i termini “cifra” e “zero”. Il problema della proliferazione dei conigli viene espresso con quella che oggi è chiamata

“serie di Fibonacci”:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, a_n, \dots$$

dove l'ennesimo termine è $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Questa serie è ricorrente nella disposizione delle foglie sul fusto di una pianta e in molti altri fenomeni naturali.

Nel XIII secolo nascono le prime grandi università, Bologna, Parigi, Oxford e Cambridge; la filosofia e la scienza aristoteliche vengono recuperate e insegnate. In tale periodo, comunque, i matematici sono anche fisici e viceversa: la dinamica, l'ottica e le applicazioni tecniche (lenti e successivamente orologi meccanici) sono la motivazione principale per gran parte degli studi matematici.

Fino al tardo Medioevo la matematica fa notevoli progressi, anche se non comparabili con quelli del periodo greco. Poi entra in una fase di declino, dovuto in Europa anche alla Guerra dei Cent'anni e a quella delle Due Rose. Le università italiane, tedesche e polacche del XV secolo ereditano il bagaglio culturale da Oxford e Parigi, ormai in declino.

5. Il Rinascimento

*Nessuna humana investigazione si può dimandare vera scienza
s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni.*

Leonardo da Vinci, Trattato sulla pittura

Se la lingua del matematico medievale era l'arabo, nel Rinascimento si legge e si scrive in latino. Ma gradatamente vengono lette e studiate anche le opere del periodo greco classico. La loro interpretazione esoterica segnò una cesura con tradizione matematica medievale.

La più antica algebra rinascimentale prende l'avvio in Francia e tratta delle operazioni aritmetiche razionali, della notazione esponenziale e, ancora una volta, della soluzione di equazioni algebriche. Ma il più famoso trattato dell'epoca è di un italiano, **Luca Pacioli** (1445-1512): *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*, scritta in volgare. È un grande compendio, con pochi tratti di originalità, che contiene materiali di quattro tipi diversi: aritmetica, algebra, geometria e partita doppia. L'opera ha notevole risonanza, ma Pacioli è forse oggi più noto per il trattato *De Divina Proportione*, su poligoni, solidi regolari e quella che fu chiamata successivamente la “sezione aurea” (vedi Appendice B). Pacioli e altri mostrano come nel Rinascimento si sviluppa un rapporto nuovo tra matematica e arti figurative (si pensi ad architetti come Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca).

Oggi ricordiamo **Nicolò Copernico** (1473-1543) come un astronomo che rivoluziona la concezione cosmica del tempo, ma in realtà era anche un valente matematico: occorre approfondire e ampliare le conoscenze di trigonometria per supportare le nuove teorie fisiche.

In questo periodo fiorisce e prospera la cartografia (ad opera, tra gli altri, di Mercatore), che si basa su costruzioni geometriche come le proiezioni di un certo grado di complessità.

Il Rinascimento avrebbe potuto sviluppare la geometria pura nella direzione suggerita dall'arte e dalla prospettiva, ma questa possibilità fu trascurata fino alla nascita della geometria algebrica.

Al termine del XVI secolo, la maggior parte della matematica dell'antichità era stata assimilata e sviluppata, il simbolismo algebrico era quasi a compimento. Il passaggio dal Rinascimento

all'età moderna avviene con gradualità, grazie a parecchie “figure intermedie”: per la maggioranza inglesi, fiamminghi, svizzeri, tedeschi, francesi; tra loro anche l'italiano **Galileo Galilei** (1564 – 1642). Si passa finalmente dalle frazioni sessagesimali a quelle decimali (prima il numeratore e il denominatore erano sempre scritti “in base 60”). Già le lettere denotavano le incognite delle equazioni, ma ora si distingue tra incognite e parametri. **John Napier** (1550 – 1617), noto come Nepero, scozzese, inventa e studia i logaritmi, che riscuotono immediato successo nelle università europee. Ma soprattutto si inizia a pensare che la matematica è una forma di ragionamento, e non un insieme di ingegnosi artifici. Tuttavia sia il tedesco **Johannes Kepler** (1571 - 1630) che Galileo sono sostanzialmente fisici e astronomi, più interessati alle applicazioni della matematica che al suo sviluppo concettuale. Alcuni discepoli di Galileo (**Bonaventura Cavalieri** e **Evangelista Torricelli**) pongono nel Seicento le basi, seppur abbozzate, per quella che oggi si chiama analisi infinitesimale, ma non proseguono il cammino intrapreso.

6. Gli inizi della matematica moderna

*Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema,
che non può essere contenuta nel margine troppo stretto di questa pagina.*

Pierre de Fermat

In tal modo, nel secolo XVII, è lasciato campo libero alla Francia come centro europeo della matematica. Grandi matematici nascono in questo periodo: **René Descartes** (1596-1650), **Pierre de Fermat** (1601-1665), **Blaise Pascal** (1623-1662). Dai tempi di Platone non si aveva un così fervente scambio e ampia fioritura di idee matematiche. Non ci sono istituzioni che coordinano i matematici di professione, ma nascono spontaneamente circoli e accademie nazionali, con compito anche di smistare le informazioni e le novità. Grazie a ciò, a partire da questi anni, la matematica si sviluppa più per una sua logica interna che per sollecitazioni esterne.

Descartes diventerà, ad un tempo, il padre della filosofia moderna, l'iniziatore di una nuova concezione scientifica del mondo e il fondatore di una nuova branca della matematica. Se nei primi due campi è un grande innovatore (la sua teoria fisica del cosmo reggerà per oltre un secolo, fino a Leibniz), nella matematica è fortemente legato alla tradizione umanistico-classica. Inizia ripercorrendo e risolvendo le questioni della matematica classica, greca e araba, senza pubblicare nulla. Poi nel trattato *La géométrie* vuole mostrare, come gli antichi, che si può geometrizzare qualunque problema algebrico. In realtà, per i posteri, farà anche il contrario: la geometria “cartesiana” infatti studia oggetti geometrici, come rette, piani, curve, superfici utilizzando l'algebra. Il legame profondo tra una curva piana e la sua equazione si instaura quando nel piano della curva si pone un sistema di riferimento o sistema di coordinate cartesiane. Ma questi frutti successivi non sono presenti nell'opera di Descartes.

Come Descartes, **Fermat** studia luoghi geometrici attraverso le loro equazioni e pare che, nonostante la tradizione, la paternità della geometria analitica spetti a lui. Sfortunatamente non pubblica i suoi scritti prima di Descartes; anzi, sono pubblicati postumi. Tra essi si scopre anche la determinazione della retta tangente ad una curva, lo studio dei massimi e dei minimi di una funzione, e altre profonde scoperte in geometria analitica e in analisi infinitesimale. Ma non sono i suoi argomenti favoriti: è affascinato dall'aritmetica di Diofanto e grazie a ciò inizia a cimentarsi

con problemi sempre più sofisticati: Fermat è considerato infatti il padre della moderna “teoria dei numeri”. Sul margine di una copia dell’*Arithmetica* di Diofanto annota di aver trovato una bella dimostrazione di un problema che generalizza il teorema di Pitagora e quello sulla scomposizione di un cubo in una somma di cubi. L’enunciato è il seguente:

se n è un intero maggiore di 2, non esistono interi positivi x, y, z tali che

$$x^n + y^n = z^n.$$

Ma il margine è troppo piccolo per contenere la dimostrazione!

La ricerca della prova di tale fatto, noto come “Ultimo Teorema di Fermat”, ha sfidato i grandi matematici dei tre secoli successivi. Ci si chiedeva anche tale congettura se fosse falsa e recentemente, con potenti computer, si è tentato di trovare un controesempio, cioè un esempio numerico di un intero \bar{n} tale che non esistano interi x, y, z per cui $x^{\bar{n}} + y^{\bar{n}} = z^{\bar{n}}$.

In ogni caso, tale problema ha mosso un’enorme quantità di matematica, e non solo riguardante la teoria dei numeri. La semplicità dell’enunciato e la difficoltà a dimostrarlo ha reso l’Ultimo Teorema di Fermat il rebus più affascinante della matematica moderna. Fino a quando... ma ne parleremo alla fine della storia.

Il contributo di **Pascal** è breve, ma notevole. Dopo un’infanzia e un’adolescenza in cui manifesta una geniale inclinazione per la matematica, ha un’esperienza mistica e dedica il resto della sua vita alla teologia e alla filosofia. Nelle sue poche pagine matematiche, tuttavia, ci sono alcune gemme di geometria “sintetica”, cioè del tipo greco antico, senza l’uso del simbolismo algebrico, che sono tutt’oggi studiate e apprezzate.

7. La matematica moderna

*Ho visto un professore di matematica,
per il solo fatto di essere stato grande nella sua vocazione,
sepolto come un re che avesse fatto del bene ai suoi sudditi.*

Voltaire

Dopo un periodo di transizione, senza figure di spicco, in cui si sistemano e si approfondiscono le novità dell’epoca precedente (ancora le coniche, sia dal punto di vista della prospettiva, che della classificazione, tutt’ora impiegata; un inizio di geometria differenziale, motivata da problemi tecnici sorti dalle strumentazioni fisiche e dalla costruzione degli orologi; sviluppo dell’analisi infinitesimale...), si stagliano le personalità di due grandi scienziati: **Isaac Newton** (1642-1726) e **Gottfried Leibniz** (1646-1716).

Newton, eclettico e precoce, produce contributi eccezionali in ambiti diversi: la formula del binomio, il calcolo infinitesimale, la legge di gravitazione universale, la natura dei colori. Con Newton si inizia con metodo e rigore a “maneggiare” l’infinito: prova con chiarezza che è possibile operare con serie infinite allo stesso modo in cui si lavora con espressioni polinomiali finite, nel senso che entrambe sono governate dalla stessa logica e dalla stessa coerenza interna. Ad esempio, se n è un numero naturale, la potenza n -esima del binomio $1 + x$ è data da

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

dove

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 3 \cdot 2}.$$

Invece, se α è un numero reale positivo la formula è analoga, ma ad una somma finita si sostituisce una infinita:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Newton rivaleggia con Leibniz per la priorità di risultati fondamentali dell'analisi infinitesimale e questa disputa allontanerà i matematici inglesi dalla comunità scientifica europea per molti decenni. Riceve grandi onori in vita ed è sepolto come un re, secondo il ricordo di Voltaire (v. epigrafe di questo paragrafo).

Leibniz, grande studioso poliedrico, studia teologia, legge, filosofia e matematica. È una pietra miliare il suo contributo all'analisi, sia introducendo le notazioni sintetiche ancor oggi in uso, sia dando un impulso fondamentale al "calcolo differenziale" e al "calcolo integrale". Ma oltre che matematico, Leibniz è anche fisico e filosofo. A tale riguardo, si occupa particolarmente di logica, tentando di dare a questa disciplina una forma sistematica, una sorta di "algebra della logica": ideogrammi simboleggiano i concetti fondamentali, le idee composte sono formate da questo "alfabeto" di concetti, il sillogismo è una specie di calcolo espresso in un simbolismo universale, comprensibile in tutte le lingue. In tal modo, la verità e l'errore si sarebbero ridotti a calcoli esatti o errati all'interno del sistema. Per i contemporanei sono idee troppo all'avanguardia, ma il suo progetto di algebra della logica verrà ripreso dai matematici del XIX secolo.

Nel periodo seguente grande sviluppo ha l'analisi matematica, nel calcolo differenziale e integrale e nelle serie (cioè somme infinite) di funzioni. Tra il '600 e il '700 una dozzina di membri della famiglia svizzera **Bernoulli** sono matematici di rilievo e due di loro, i fratelli **Jacques** (1654 – 1705) e **Jean** (1667 – 1748), discepoli di Leibniz, si stagliano nel panorama matematico. Studiano curve non algebriche (cioè non definite da un polinomio) che nascono da problemi fisici, le regole di derivazione di una funzione (che sono studiate ancora oggi nei corsi universitari) e con loro nasce la teoria della probabilità. Il secondo fu insegnante del grande Eulero.

In seguito, con i risultati dei Bernoulli e del francese **Guillaume De l'Hopital** (1661 – 1704), l'analisi diventa disciplina alla moda, generando discussioni e dispute sulla fondatezza dei nuovi concetti infinitesimi. Tutta l'Europa ne è coinvolta, a parte l'Inghilterra, che si pone su posizioni contrastanti, e l'Italia, dove tranquillamente si continua a studiare geometria, ma senza grandi intuizioni o grandi personalità scientifiche.

Nell'età moderna nessun paese prende il sopravvento scientifico per molto tempo (contrariamente alla Grecia nell'antichità). Per un periodo diventa la Svizzera il centro degli studi del '700 con i Bernoulli, ma soprattutto col più grande matematico dell'epoca: **Leonard Euler** (1707-1783). Di vasta cultura, conoscitore di medicina, astronomia, teologia, lingue orientali, è forse il matematico più prolifico di tutti i tempi: con le opere postume si arriva a 886 titoli, tra

articoli e libri. Dopo riconoscimenti e premi internazionali, oltre alla stima di re e governanti, passa gli ultimi anni della sua vita in cecità, dettando ai suoi figli la sua produzione scientifica. Dà contributi a vari rami della disciplina e introduce in modo stabile le notazioni della matematica attuale. Eulero fa per l'analisi di Newton e Leibniz quello che Euclide aveva fatto per la geometria del tempo: inserisce il calcolo differenziale come parte di una branca più ampia della matematica, che da allora prende il nome di "analisi" e che tratta lo studio dei procedimenti infiniti.

Il '700 è anche il secolo dei manuali. In algebra, specialmente, vengono pubblicati molti trattati, anche di livello divulgativo, che illustrano una tendenza verso algoritmi sempre più complessi e sofisticati, mentre permane una certa incertezza sui fondamenti logici e concettuali di questo ramo della matematica. È un secolo un po' sfortunato: tra il precedente - il Secolo dei Geni - e il successivo - l'Età dell'Oro. Ma vale la pena ricordare l'impulso che la matematica ebbe in Francia nel periodo della Rivoluzione. Gli scienziati dell'epoca non hanno particolari rapporti con le università, rimaste arretrate rispetto agli sviluppi del resto d'Europa, ma piuttosto hanno rapporti con la Chiesa o con l'esercito o con re e principi. Vengono pubblicati vari volumi a carattere enciclopedico sulla matematica, ma anche trattati che, seppur riguardanti la chimica o l'ingegneria, contengono lunghe trattazioni eleganti e moderne di algebra, analisi, geometria. Quest'ultima riprende vigore soprattutto per **Gaspard Monge** (1746 – 1818), considerato in fondatore della geometria *pura* moderna.

La riforma del sistema di pesi e misure è proprio di questo periodo (1790) e viene affidata a due matematici: **Joseph-Louis Lagrange** (Torino, 1736 – Parigi, 1813) e **Jean-Antoine Caritat de Condorcet** (1743 – 1794), uno degli "enciclopedisti".

Per tutto il XVIII secolo i risultati raggiunti nel calcolo infinitesimale suscitano notevole entusiasmo, ma continua una certa confusione sui principi fondamentali. **Carnot** (noto matematico e soprattutto fisico) tenta una sintesi, che si rivelerà poi inesatta. Lo stesso rigore, ma per la geometria, si rivela in **Adrien-Marie Legendre** (1752 – 1833) – anche se più famoso per i suoi studi di analisi – che produce una presentazione sistematica della geometria, tentando perfino una dimostrazione del "postulato delle parallele"! La teoria delle probabilità deve il suo sviluppo a **Pierre-Simon Laplace** (1749 – 1827), che è grandemente significativo anche in analisi superiore, dove studia equazioni che nascono dalla meccanica celeste.

8. L'Età d'Oro della matematica moderna

Le proposizioni della matematica, nella misura in cui si riferiscono alla realtà non sono sicure, e nella misura in cui sono sicure, non si riferiscono alla realtà.

A. Einstein, Prolusione all'Accademia prussiana delle Scienze, 1921

Diventa sempre più difficile descrivere lo sviluppo della matematica mentre ci si avvicina ai secoli più recenti. Non solo per la ricchezza e la complessità che questa scienza viene acquisendo, ma soprattutto per la specificità degli argomenti, comprensibili solo a chi ha studiato matematica a livello universitario. Quindi è necessario limitarsi a pochi cenni sparsi.

Nell'Ottocento si presenta uno sviluppo tumultuoso di tutti i rami della matematica; le conoscenze vengono rapidamente assorbite e diffuse, dando luogo ad ulteriori risultati. Anche

se le università e le accademie sono diventati i luoghi ufficiali di produzione matematica ad opera di scuole ben consolidate, i forti impulsi di novità vengono da parte di numerose grandi personalità che popolano questo secolo.

Tra esse la più grande (e forse il più grande matematico di tutti i tempi) è **Karl Friederich Gauss** (Braunschweig, 1777 – Göttingen, 1855). *Enfant prodige*, stupisce già il suo maestro elementare; a diciannove anni trova la costruzione con riga e compasso di un poligono a 17 lati (fino ad allora era nota solo per un numero multiplo di 2, 3 e 5); a 22 anni, nella sua tesi di dottorato, dimostra quello che è noto come “teorema fondamentale dell’algebra”, cioè che ogni polinomio a coefficienti reali e avente grado n , ammette esattamente n radici complesse. Lascia la sua impronta nella teoria dei numeri, nella congruenza di interi, nell’analisi, nello studio delle funzioni di variabile complessa. È considerato il padre della *geometria differenziale*, cioè dello studio di curve e superfici non nel loro complesso, ma nei dintorni di un punto. Prova a dimostrare il postulato delle parallele; non riuscendoci, ipotizza che si possa fare una geometria alternativa senza di esso: in qualche modo precorre la nascita delle *geometrie non-euclidee*. Pubblica pochissimo e tardivamente; ciò produce rivalità con alcuni matematici contemporanei nel sostenere la paternità di certi risultati.

Tra questi va ricordato un grande di questo secolo, il parigino **Augustin Cauchy** (1789 – 1857), considerato il fondatore dell’*analisi complessa*. Matematico rigoroso, nei manuali universitari che pubblica introduce definizioni chiare e moderne degli oggetti trattati; definizioni che si ritrovano sostanzialmente negli odierni libri di testo.

Gauss e Cauchy, come altri matematici dell’epoca, si occupano anche di altre scienze: astronomia (Gauss prevede la ricomparsa di Cerere), geodesia, cristallografia, ma anche di magnetismo terrestre e strumenti magnetici, ottica, propagazione delle onde...

Uno dei più grandi matematici di tutti i tempi per brillantezza e intuito è **Niels Abel** (1802-1829), norvegese. Una vita di povertà e malattia non gli impedisce di interessarsi alla matematica: a sedici anni legge le opere di Gauss e inizia a studiare la risoluzione algebrica delle equazioni. A ventidue anni pubblica uno dei più famosi teoremi moderni: non è possibile risolvere un’equazione di grado superiore al quarto con sole operazioni algebriche (più semplicemente: non esiste una “formula di risoluzione”). Non riesce a trovare posto nell’università e lascia a Cauchy una memoria sulle funzioni trascendenti. Ma questi si dimentica di leggerla e Abel muore di tubercolosi a 26 anni. La memoria fu pubblicata dopo vari anni e, dicono i posteri, è “un monumento più duraturo del bronzo”.

Nell’800, dopo due secoli di torpore - a parte qualche sprazzo durante la Rivoluzione Francese - anche la geometria torna in auge: vengono provate proprietà sintetiche delle coniche, come non si era più visto dopo la Grecia antica e l’opera di Pascal. Nasce lo studio delle trasformazioni del piano, da vari punti di vista. I matematici affrontano questi nuovi orizzonti con entusiasmo; particolarmente quella disciplina che oggi chiamiamo *geometria proiettiva*. Molti matematici dell’epoca sono mossi dal desiderio di prevalere nella disputa tra geometria sintetica e geometria analitica. Infine il *principio di dualità* inizia l’impostazione veramente moderna della geometria. Il centro diventa la Germania e, a parte i francesi **Brianchon** e **Poncelet**, i geometri più importanti dell’epoca sono tedeschi: **Feuerbach**, **Steiner**, **Plücker**, **Möbius**. Quest’ultimo è noto, però, per il “nastro di Möbius”: una superficie ottenuta da un nastro incollando le due estremità dopo

averne rovesciata una. È una superficie limitata, con una sola faccia e un solo bordo!

Grazie a queste novità provenienti da Germania e Francia, riprende la geometria anche in Inghilterra, dopo secoli di isolazionismo. Nasce l'*Analytical Society* (1812) e il *Cambridge Mathematical Journal* (1839). **Arthur Cayley** (1821 – 1895), brillante algebrista inglese, rafforza il lato algebrico della teoria di Plücker e introduce la geometria a più dimensioni.

Merita particolare menzione la nascita ufficiale delle geometrie non euclidee ad opera del russo **Nicolaj Lobacevskij** (1793 – 1856) e soprattutto del tedesco **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826 – 1866). Questi, nella sua dissertazione di abilitazione a Göttingen, presenta un'ampia e profonda visione dell'intero campo della geometria, senza fornire esempi specifici, ma sostenendone una visione globale come studio di varietà (cioè oggetti che generalizzano le curve e le superfici) di un numero qualsiasi di dimensioni in uno spazio qualunque. Riemann studia in seguito la geometria in spazi curvi, ad esempio sulla sfera (cosa che in seguito renderà possibile l'enunciazione della teoria della relatività generale); dimostra poi che la geometria euclidea non è contraddittoria. Ma si produce anche nello studio delle serie di variabile complessa. Una di queste, nota come *zeta di Riemann* ha cimentato molti matematici nel tentativo di provare una congettura ad essa relativa: la cosiddetta *ipotesi di Riemann* (che qui è troppo complesso illustrare). Questo, come molti altri problemi della teoria dei numeri, è tuttora irrisolto.

Altri matematici tedeschi, come **Felix Klein** e **Sophus Lie**, studiano le trasformazioni geometriche da un punto di vista algebrico totalmente nuovo: quello dei gruppi (vedi Parte II). E con tale mezzo si propongono di caratterizzare le varie geometrie apparse nel corso del secolo. Klein, nel suo famoso discorso noto come *Programma di Erlangen* (1872), descrive la geometria come “lo studio delle proprietà delle figure aventi caratteristiche invariate rispetto a un particolare gruppo di trasformazioni”. Ad esempio, la geometria euclidea del piano studia le figure, le lunghezze e le aree che restano invariate rispetto alle traslazioni e rotazioni del piano: le cosiddette trasformazioni rigide. Questa intuizione dà a qualcuno l'illusione che tutta la matematica potesse essere inglobata nella teoria dei gruppi... Il nome di Klein è tuttavia legato a un nuovo ramo della matematica: la *topologia*. Tutt'oggi ci si riferisce alla *bottiglia di Klein* come ad una particolare superficie limitata, con una sola faccia e senza bordi.

Abbiamo accennato alla potenza unificatrice dei gruppi riguardo alla geometria; ovviamente ne acquista altrettanta per l'algebra (del cui ambito i gruppi stessi fanno parte). Colui che ha maggiormente contribuito all'affermazione di tale teoria è senza dubbio il francese **Evariste Galois** (1811 - 1832), del quale faremo cenno nella II Parte.

L'Ottocento si può caratterizzare per due fatti fondamentali: la nascita di nuove branche della matematica, da una parte, e la relazione o interdipendenza tra queste. Il programma di “algebrizzazione dell'analisi” proposto da Klein fu poi realizzato dal francese **Joseph Fourier** nella prima metà del secolo e, nella seconda metà, da altri matematici, tedeschi, come **Karl Weierstrass** (1815 – 1897), **Georg Cantor** (1845 – 1918), **Richard Dedekind** (1831 – 1916). Tra i vari problemi che affrontano ci sono la definizione rigorosa di numero reale e lo studio dei numeri razionali e irrazionali. Ancora oggi si parla di *assioma di Cantor-Dedekind*: “i punti di una retta possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri reali”.

Cantor, in particolare, inizialmente manifesta un'inclinazione verso l'indirizzo analitico di Weierstrass, ma poi, forte della sua formazione filosofica, si rivolge alla teoria dei numeri e soprattutto alla nozione di "infinito", dando contributi brillanti e fondamentali. È lui ad accorgersi che gli infiniti non sono tutti dello stesso tipo (cioè che esistono insiemi infiniti che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro) e introduce il concetto di "potenza" di un insieme infinito. I suoi risultati sono dirompenti e molti editori esitano a pubblicarli, ma lo conducono a formulare la *teoria degli insiemi* come disciplina matematica a sé stante. Ostacolato dall'invidia e dalla sfiducia dei colleghi del suo tempo, Cantor muore tragicamente. La sua opera, però, verrà rivalutata nel secolo successivo.

Infine risorge gloriosamente la scuola inglese, cui si aggiungono matematici scozzesi e irlandesi: da lì provengono brillanti algebristi coi quali si può segnare l'inizio dell'algebra astratta. Tra essi va ricordato **George Boole** (1815-1864), che riprende le antiche idee di Leibniz sulla logica e le amplia, sostenendo che la "logica matematica" può rivendicare un ruolo di ramo della matematica a sé stante. Più precisamente, Boole porta la concezione formalista di quel tempo all'estreme conseguenze: la matematica non doveva più essere considerata una scienza che studia numeri e grandezze, in quanto la sua caratteristica fondamentale non è il contenuto, ma la forma.

Questa visione esasperata dell'astrazione ha permeato le idee di molti matematici negli anni a venire. Soprattutto ha trovato affermazione la cosiddetta "algebra booleana", ossia algebra degli insiemi: diventano gli insiemi, cioè, gli oggetti tra cui fare operazioni.

Sempre presenti nella sua storia, ma ancor più evidenti nella seconda metà dell'Ottocento, si notano due tendenze della matematica: da una parte una struttura ad albero via via più diffusa e ramificata; dall'altra l'attenzione al rigore, cioè ai fondamenti.

A fine secolo, infatti, si arriva a questa riflessione: i numeri complessi sono definiti mediante i numeri reali; i numeri reali attraverso classi di numeri razionali; i numeri razionali sono coppie di numeri interi. E i numeri interi? Alcuni matematici riescono a dare una risposta rigorosa in termini di logica formale: con essa si possono definire chiaramente i numeri cardinali e i numeri ordinali. Tra gli italiani va ricordato **Giuseppe Peano** (1858 – 1932). Il suo programma è ambizioso: vuole sviluppare un linguaggio formalizzato che possa contenere non solo la logica ma tutta la matematica. Usa tre concetti primitivi e cinque assiomi, sufficienti per ricondurre l'aritmetica comune e quindi buona parte della matematica all'essenzialità di un simbolismo formale.

Il grande sviluppo della matematica dell'Ottocento, sia in termini quantitativi che qualitativi, spingeva ad un vivace ottimismo per il secolo successivo. Così fu, non prima però di una grave crisi che investì i fondamenti della matematica all'inizio del XX secolo.

9. Alcuni aspetti della matematica contemporanea

Socrate: “Ciò che Platone sta per dire è falso”.

Platone: “Quello che Socrate ha appena detto è vero”.

La battuta di Russel riportata all’inizio di queste note è scherzosa, ma segnale della crisi. **Bertand Russel** (1872 – 1970) si occupa di logica, ma soprattutto di fondamenti. Nella sua opera *Principi della matematica* dà la seguente definizione: “La matematica pura è la classe di tutte le proposizioni della forma “ p implica q ”, dove p e q sono proposizioni contenenti le stesse variabili e nessuna costante”.

Non tutti erano d’accordo: già nel secolo precedente alcuni algebristi della scuola inglese propongono una concezione intuizionista della matematica, vista cioè come scienza avente lo scopo di “manifestare le leggi dell’intelligenza umana”.

Nel XX secolo lo sviluppo della matematica è talmente rapido e multiforme, che è veramente impossibile descriverlo anche solo sommariamente. Diamo solo un breve cenno alla crisi di inizio secolo e ad alcuni fenomeni che ne conseguono.

Nel 1893 si tiene a Zurigo il primo *Congresso Internazionale dei Matematici*, il secondo a Parigi nel 1900 (e da allora ogni quattro anni in varie capitali del mondo). Nel congresso di Parigi il celebre matematico tedesco **David Hilbert** (1862 – 1943) tiene una relazione diventata famosa: enuncia 23 problemi che pensa sarebbero stati al centro della ricerca nel secolo che incominciava. Uno di questi è collegato al cosiddetto *assioma della scelta* enunciato dal tedesco **Ernst Zermelo** (1871 – 1953) di cui sarà fatto cenno nella II Parte. Nel 1940 Gödel dimostra che tale assioma è compatibile con gli altri assiomi della teoria degli insiemi, ma nel 1963 Paul Cohen prova che è indipendente da essi. In altre parole, si può fare una matematica con tale assioma, ma anche una senza di esso.

Il secondo problema di Hilbert, generato dall’esigenza di rigore del XIX secolo, chiede se è possibile dimostrare che gli assiomi dell’aritmetica sono compatibili, cioè che la matematica nel suo complesso è non contraddittoria.

Ancora **Kurt Gödel** (1906 – 1978), giovane matematico austriaco, nel 1931 prova un risultato sorprendente: all’interno del sistema logico dell’aritmetica esistono proposizioni di cui non si può provare né che sono vere né che sono false. In altre parole, esistono proposizioni *indecidibili* (vedi il dialogo fantastico tra Socrate e Platone nell’epigrafe di questo paragrafo): da questo segue che non si può provare che l’aritmetica non sia contraddittoria.

Questo risultato, seppur sconcertante, frena solo momentaneamente lo slancio che la matematica aveva raggiunto nel secolo precedente. Nasce e si conferma un interesse, dapprima solo teorico, per lo “macchine calcolatrici”. Diventerà successivamente una scienza a sé stante, l’informatica, mantenendo all’interno della matematica un interesse teorico per i linguaggi di programmazione.

Le figure di grandi scienziati poliedrici, presenti nei secoli passati, non sono più presenti nel Novecento: la specializzazione e l’aumento delle conoscenze nei vari settori lo impedisce. Ed è sempre più raro trovare uno studioso “globale”, cioè informato su tutti i rami della matematica. Tuttavia nascono interessanti commistioni e legami tra le varie discipline interne ad essa.

Il grande rilievo dato all'astrazione e al rigore dei fondamenti trova la sua immagine migliore nell'opera pubblicata a metà del Novecento con autore **Nicolas Bourbaki**. In realtà tale nome è quello di un generale francese dell'Ottocento, che nulla aveva a che fare con la matematica! Sotto tale pseudonimo scherzoso si nascondeva un gruppo di brillanti matematici quasi tutti francesi, tra cui **André Weil** (1906 – 1998) e **Jean Dieudonné** (1906 – 1992). L'opera, in vari volumi, si intitola *Eléments de Mathématique* e vuole ripercorrere rigorosamente tutta la matematica moderna. Un intento presuntuoso e impossibile, ma quest'opera segna l'impostazione logica delle successive generazioni di matematici.

Dice Carl B. Boyer, nella sua *Storia della matematica*:

L'enorme sviluppo della matematica nei vent'anni seguiti alla Seconda Guerra Mondiale ha avuto ben poco a che vedere con le scienze della natura, ed è stato stimolato nella massima parte da problemi sorti all'interno della stessa matematica pura; tuttavia durante quello stesso periodo si sono notevolmente moltiplicate le applicazioni della matematica alla fisica e alle altre scienze della natura. Quest'apparente anomalia sembra avere una facile spiegazione: non solo nella matematica pura, ma anche nello studio della natura l'astrazione e l'individuazione di schemi o strutture hanno svolto un ruolo sempre più importante. Pertanto anche oggi che il pensiero matematico ha raggiunto un grado così elevato di iperastrazione, la matematica continua ad essere il linguaggio della scienza, così come lo era stato nell'antichità".

Quale modo migliore per concludere questo sommario sulla storia della matematica, se non rivelando il finale della vicenda sull'*Ultimo Teorema di Fermat*?

Nel 1993 un riservato matematico inglese che lavora da anni a Princeton, **Andrew Wiles**, tiene un ciclo di conferenze a Cambridge, sua città natale. L'argomento è una complessa congettura, detta di Taniyama-Shimura, importante nella matematica moderna e nota ai matematici di mestiere. Sembra che Wiles abbia una dimostrazione, ma il grande clamore suscitato dalla notizia è che - come sanno bene gli specialisti del settore - tale congettura implica l'Ultimo Teorema di Fermat! Purtroppo c'è un errore nella lunga e difficile dimostrazione e Wiles è distrutto... Fortunatamente un giovane collega, anzi un ex-allievo, **Richard Taylor** lo aiuta a trovare la versione giusta di quel passaggio non corretto.

Nel 1995, sulla più prestigiosa rivista matematica in circolazione, *Annals of Mathematics*, vengono pubblicati due articoli che racchiudono il monumentale lavoro. Uno ha le due firme, di Wiles e di Taylor; l'altro, firmato giustamente dal solo Andrew Wiles, si intitola: *Curve ellittiche modulari e Ultimo Teorema di Fermat*. Dopo 350 anni, il più famoso enigma della matematica è risolto!

PARTE II: MATEMATICA OGGI

Alla luce del percorso storico del pensiero matematico tratteggiato nella prima parte, risulterà più chiaro il quadro in cui inserire la ricerca matematica del nostro tempo. È un panorama complesso, sia al suo interno che nel rapporto con la cultura nel suo complesso. La riflessione che segue non si propone certamente di essere esaustiva, ma solo di accennare alcuni aspetti che sembrano significativi.



Karl Friederich Gauss

“inscritto” in un poligono regolare di 17 lati

1. Patti chiari

Il grado di verità della matematica può essere percepito come relativo o assoluto e sembra non ci sia contraddizione fra questi due aspetti.

Da una parte, per “fare matematica” occorre porre alcuni punti fermi iniziali: il linguaggio, la logica, le definizioni, gli assiomi e i postulati (al giorno d’oggi gli ultimi tre termini vengono considerati spesso sinonimi, ma nell’accezione utilizzata da Euclide ci sono sensibili differenze).

I fondazionisti (cioè i matematici che tuttora si occupano dei fondamenti della matematica) danno una definizione rigorosa e complessa di **linguaggio**, come un insieme di simboli – lettere e relazioni – dotati di struttura sintattica, sviluppando le idee di Leibniz. Qui sarà sufficiente riferirsi al linguaggio in modo intuitivo.

La **logica** studia e fissa le regole del ragionamento, avendo anch’essa alcuni punti fermi: definizioni e **assiomi**. Tra questi citiamo come esempio l’*assioma della scelta* o *assioma di Zermelo*: “In ogni insieme non vuoto è possibile scegliere un elemento”. A prima vista tale presupposto sembra così ovvio da non dover essere neanche enunciato. Per chi non è del settore, sembra strano che una parte della matematica del novecento abbia voluto svilupparsi senza utilizzare tale assioma!

Riguardo alle **definizioni**, occorre fare una riflessione più attenta che vale anche al livello della logica. Quando si definisce un nuovo oggetto matematico bisogna ovviamente utilizzare non solo le proprietà che lo caratterizzano, ma altri oggetti. A loro volta questi ultimi richiedono una

definizione. Risalendo così di passo in passo, per non procedere all'infinito, occorre “fermarsi”: bisogna cioè dare per scontati degli oggetti in qualche modo *primitivi* per la teoria.

Facciamo alcuni esempi. La matematica moderna si poggia sulla nozione di insieme e su quella di elemento di un insieme. Ma che cos'è un insieme? Una definizione potrebbe essere: “Un insieme è una collezione di oggetti”. Ma che cos'è una collezione? Magari un “raggruppamento”; e che cos'è un raggruppamento? È chiaro che bisogna fermarsi! Qualcuno di questi concetti deve essere considerato come concetto primitivo.

Un altro esempio: il Libro I degli *Elementi* di Euclide inizia bruscamente con 23 “definizioni”. Ma alcune di esse non hanno senso, in quanto non precedute da un elenco di termini primitivi.

Una di esse è: “Un punto è ciò che non ha parti”. Anche ad un non-matematico è chiaro che questa non è una definizione corretta. Oppure: “un angolo piano è l'inclinazione l'una rispetto all'altra di due rette... ecc.”. Ma che cos'è una “inclinazione”?

Dopo le definizioni, Euclide elenca cinque postulati e cinque nozioni comuni (assiomi), asserendo che questi ultimi sono accettati come evidenti e comuni a tutte le scienze.

Un esempio di assioma: “Cose uguali ad una medesima cosa sono uguali tra loro” (oggi lo chiameremmo “proprietà transitiva dell'uguaglianza”).

I postulati, invece, sono affermazioni “di partenza” che si assumono valide (senza dimostrarle!) per lo sviluppo di una particolare teoria.

Un esempio di postulato della geometria euclidea: “Si può tracciare una retta da un punto qualsiasi ad un punto qualsiasi” (ovviamente senza aver dato prima una definizione soddisfacente di punto o di retta!). Un altro celebre esempio è il *postulato delle parallele*: “Data una retta ed un punto, esiste sempre una ed una sola retta passante per il punto e parallela alla retta data”.

Oggi, comunque, una volta assunto il linguaggio, la logica e un sistema di assiomi, definizioni e postulati, si inizia a “fare matematica” all'interno della teoria in questione. Quindi si lavora “relativamente” agli assiomi (anche logici) che si sono scelti.

2. Vero, falso, non so

*Dio esiste perché la matematica non è contraddittoria
e il diavolo esiste perché non possiamo dimostrarlo.*

André Weil

Dentro alla teoria in cui si lavora, il risultato matematico è assoluto: se una dimostrazione è vera, ciò è universalmente riconosciuto dalla comunità scientifica, senza discussioni o opinioni discordanti. Si può trovare una vaga somiglianza con gli esperimenti della fisica (classica): un esperimento è significativo se è riproducibile, cioè se un altro scienziato, in un altro posto, in un altro momento trova il medesimo risultato. Anche per la matematica vale qualcosa del genere: una dimostrazione è corretta se può essere ripercorsa, nell'ambito della teoria in cui è inserita, da qualunque matematico (competente!).

In questo ambito, la nozione di “errore” è chiara: si tratta di un passaggio logico indebito le cui conclusioni sono “false”. In altre parole, il sistema logico di una teoria contenente un errore è sicuramente contraddittorio, cioè nell'ambito di quella stessa teoria è possibile provare un fatto e il suo contrario.

Il termine “errore” viene impiegato nella scienza odierna anche in un’altra accezione: quella di “approssimazione”. Il luogo adatto per una riflessione sul tema è quello di un approfondimento sulla fisica. Tuttavia si può fornire qualche esempio anche in matematica.

Il “calcolo” del numero *pi greco* ha catturato l’attenzione di molti matematici nei millenni. Ma che significa “calcolare” π ?

Com’è noto, π è il rapporto (fisso) tra la lunghezza di ogni circonferenza e la lunghezza di un suo diametro. Gli antichi, ingegnosamente, consideravano un poligono regolare inscritto in una circonferenza e ne misuravano il perimetro. Ovviamente questo risultava minore della circonferenza stessa, ma aumentando il numero di lati questo divario diminuiva. Quindi il rapporto tra il perimetro e il diametro era abbastanza vicino al valore di π , o almeno ne dava una discreta approssimazione. Per dare il senso di quanto fosse buona questa idea, è sufficiente ricordare che Gauss, in età giovanile, trovò un modo per disegnare un poligono regolare con 17 lati; andava così fiero di questa scoperta che esprime la volontà che tale poligono fosse inciso sulla sua lastra tombale. Alla morte, lo scalpellino incaricato di fare ciò si rifiutò sostenendo che non si sarebbe visto un poligono, ma un cerchio! Solo in seguito, in un monumento commemorativo dedicato a Gauss, si realizzò quanto lui aveva voluto.

Torniamo al problema iniziale. Nel calcolo approssimato del numero π , Archimede diede una prova della sua abilità: partendo dall’esagono regolare inscritto, egli calcolò i perimetri dei poligoni ottenuti raddoppiando successivamente il numero dei lati fino a raggiungere novantasei lati. Il calcolo portò a trovare la prime due cifre decimali di π dopo l’intero 3, ottenendo l’approssimazione di 3,14. La ricerca delle successive approssimazioni incontrava tuttavia un ostacolo: si pensava infatti che π fosse razionale. L’approssimazione razionale di Archimede:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

è migliore di quelle precedenti degli egiziani e dei babilonesi. L’indiano Aryabhata nel 450 trova che π è 3,1416. Il francese Viète nel 1590 determina π con dieci cifre decimali. Nel 1609 Ludolph ne calcola 35. Finalmente, nel 1776 il francese Lambert prova l’irrazionalità di π , e nel 1882 Lindemann ne prova la trascendenza (cioè il fatto che non è radice di nessuna equazione algebrica a coefficienti razionali). (Tra l’altro, poiché i trascendenti non sono costruibili, allora, con soli strumenti elementari, la quadratura del cerchio non è possibile).

Dunque il problema di calcolare π in termini finiti non si pone: infatti la sua rappresentazione decimale è illimitata (cioè con infinite cifre dopo la virgola) e non periodica (cioè non si ripete nessun gruppo di cifre). Tuttavia oggi, con opportuni algoritmi e potenti computer, si possono determinare moltissimi decimali: attualmente 51 miliardi! Ovviamente a un ingegnere non ne servono più di 6 o 7 e ad un fisico forse 15 o 20...

Tutt’altra storia è quella che riguarda le questioni “indecidibili”, accennate nella Parte I. È bene notare che il problema dell’indcidibilità di una proposizione riguarda la teoria in cui questa proposizione è formulata. Secondo il teorema (già citato) di Gödel, non si può dimostrare se l’aritmetica, e dunque la matematica, sia o meno contraddittoria. Pertanto la contraddittorietà della matematica è una questione indecidibile all’interno della matematica. A tale scopo qualcuno ha anche avanzato l’idea di costruire una meta-matematica in cui sciogliere questo e altri nodi.

3. Fare matematica

Mais je n'ai pas le temps...

Evariste Galois, Lettera ad A. Chevalier

Sia ben chiaro la problematica accennata prima, sull'indecidibilità di certe affermazioni e sulla contraddittorietà della disciplina nel suo complesso, ben poco affligge la comunità dei matematici. Il nostro lavoro, infatti, si svolge tranquillamente al di sotto o al di là di queste sottili questioni. (Forse in qualche caso non è opportuno usare l'avverbio "tranquillamente": il ritmo mentale che tiene un matematico è spesso sostenuto, a volte concitato. Anche a studiosi non destinati a passare alla storia, talvolta si adatta ciò che scrisse Galois ad un suo amico nelle convulse pagine piene di idee matematiche che scrisse velocemente la notte prima del duello che avrebbe posto fine alla sua vita. Galois lo sentiva: non aveva più tempo. E molte volte un matematico è incalzato da se stesso nel cercare ciò che non riesce a trovare...).

L'idea principale da trarre dalla Parte I, dedicata ad un rapido sommario storico, è forse il senso dell'ininterrotto divenire della matematica. Come tutte le altre scienze e rami del sapere, essa si evolve e progredisce in quantità e qualità.

Un matematico di oggi, a causa della mole di nozioni necessarie per fare ricerca, raramente lancia lo sguardo al di là dei già ampi confini del suo settore. E anche in esso ben presto si specializza in un ambito più o meno vasto. Di esso inizialmente si occupa raccogliendo materiale, cioè libri e articoli classici e più recenti e cercando di individuare un tema di ricerca ancora aperto. Poi si dedica alla ricerca propriamente detta. Queste fasi, sicuramente, si adattano ad ogni tipo di studio avanzato, dalla fisica alla filosofia, dalla letteratura latina alla giurisprudenza. Ciò che ha di peculiare la ricerca matematica è, forse, l'autonomia della fantasia che individua problemi. Alcuni hanno una tradizione storica e sono ben noti (naturalmente sono anche i più difficili), altri sono recenti, altri ancora si pongono alla mente del matematico durante la fase di comprensione del materiale bibliografico.

Porsi un "problema" significa voler comprendere la natura profonda di un "fenomeno" matematico, cioè rilevare che un comportamento ripetuto in vari casi è dovuto ad una proprietà generale.

Molto spesso il percorso mentale è proprio questo: si considerano vari esempi della stessa situazione. Che cosa hanno in comune e quali proprietà, invece, dipendono esclusivamente dalla specifica configurazione di un caso particolare? Una volta individuato questo, si enuncia in modo corretto la proprietà che si suppone comune a tutti i casi considerati: questo è l'enunciato di un futuro teorema. Questa prima fase è senz'altro difficile e creativa.

Non sempre si procede in questo modo; a volte si concatenano teoremi noti e da essi si deduce un nuovo risultato; a volte l'esempio è di natura geometrica o aritmetica; in altri casi ancora non c'è bisogno di supporre nulla, perché la supposizione è ben nota o addirittura celebre: è una congettura proposta da qualche altro in precedenza su qualche articolo o in qualche convegno.

In ogni caso, alla fine di un vario percorso, il matematico ha davanti un enunciato da dimostrare. Se il percorso che ha svolto per arrivarci è "empirico", nel senso che è partito da esempi particolari, sarà di conseguenza guidato dal percorso di astrazione che ha già compiuto per passare

dagli esempi all'enunciato. Altrimenti, cercherà di concatenare risultati precedenti per dimostrare quello che ha in mente. Questo processo può essere semplice, e portare ad un facile corollario di teoremi già in circolazione, oppure anche molto lungo e complesso.

Un esempio a questo punto richiede un soggetto familiare e noto a tutti. Nell'appendice A si richiama il teorema di Pitagora e una sua dimostrazione. La natura di quest'ultima è algebrica, nel senso che si attribuiscono lettere x, y, z alle lunghezze dei lati e si prova l'enunciato con un semplice calcolo che utilizza le operazioni fondamentali. Sicuramente non è la dimostrazione originale: come accennato, l'algebrizzazione della geometria arriva nell'Evo Moderno. E non è ovviamente l'unica: sicuramente ne esistono decine. Una cosa, però, è quasi certamente vera: i matematici che hanno concepito l'enunciato di questo teorema sono partiti da un esame di vari triangoli rettangoli "concreti". Già nell'antico Egitto si sapeva che un triangolo i cui lati misurano 3, 4, 5 è necessariamente rettangolo e così uno di lati 5, 12, 13. Da Pitagora in poi queste terne di numeri interi si sono chiamate *terne pitagoriche*. Ecco un elenco delle prime:

$$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), (12, 35, 37), \dots$$

È veramente naturale chiedersi: quale struttura hanno queste terne? Come si può generarne una? (problema difficile). Che cosa hanno in comune, a parte essere costituite da numeri interi e che misurano i lati di un triangolo rettangolo? Se uno incomincia a "giocare" con questi numeri, si accorge ben presto che

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Allora controlla la seconda terna e vede che:

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2.$$

Per un matematico non esistono le coincidenze... Con trepidazione controllerà le altre terne: si ripresenta lo stesso fenomeno! A questo punto è più che ragionevole azzardare che questo sia un comportamento generale; naturalmente alcuni o anche numerosi esempi non sono una dimostrazione, ma possono condurre ad un enunciato. In questo caso si tratta di quello del *teorema di Pitagora*, ovviamente. Come dimostrarlo, poi, è un'altra storia.

4. Un esempio di teoria matematica

La *teoria dei gruppi* è una delle più importanti della matematica moderna. Oltre ad un ruolo unificatore nell'ambito della geometria, anche nel campo dell'algebra rappresentò una forza di coesione e una spinta per l'affermarsi delle concezioni astratte. Il matematico che a cui maggiormente è dovuta la formulazione di questa teoria è dovuta a Evariste Galois (1811-1832) morto giovanissimo in un duello. I suoi studi affrontano il problema di determinare le soluzioni di un'equazione polinomiale attraverso operazioni algebriche ("risoluzione per radicali"). Si accorge che l'insieme delle soluzioni ha una struttura speciale, oggi chiamata "gruppo finito".

Negli ultimi decenni si insegna la teoria elementare dei gruppi nei primi anni dei corsi di laurea di matematica, fisica, ingegneria.

Ecco l'inizio (qui espresso in modo non formale, ma abbastanza preciso).

Definizione. Sia G un insieme non vuoto. Si dice *operazione binaria* in G una legge che associa ad ogni coppia ordinata di elementi di G un terzo elemento di G .

In altre parole, se l'operazione viene denotata con il simbolo “ \times ”, per ogni a e b in G è definito un elemento $a \times b$ appartenente a G .

La definizione precedente viene solitamente espressa con simboli matematici che la rendono più breve e più precisa (ad esempio si definisce preliminarmente la nozione di coppia ordinata), ma qui non sembra opportuno.

Definizione. Sia G un insieme non vuoto. Diciamo che G è un *gruppo* se:

- 1) in G è definita un'operazione binaria \times ;
- 2) se, rispetto a tale operazione, valgono le seguenti proprietà:
 - 2.1) l'operazione \times è associativa, cioè per ogni a, b, c in G vale:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c;$$

- 2.2) esiste in G un elemento neutro, cioè un elemento e tale che per ogni a in G vale:

$$a \times e = e \times a = a;$$

- 2.3) ogni elemento di G ammette inverso in G cioè per ogni a in G esiste b in G tale che:

$$a \times b = b \times a = e.$$

Esempio. Se l'insieme G è l'insieme $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri interi relativi e l'operazione è la somma usuale tra numeri interi, è immediato provare che \mathbb{Z} è un gruppo.

Vediamo ora una delle prime elementari dimostrazioni sull'argomento: è una piccola proposizione prediletta dagli studenti (agli esami) per la sua semplicità e brevità...

Proposizione. *Sia G un gruppo rispetto all'operazione \times . Allora esiste un unico elemento neutro.*

Dimostrazione. Supponiamo che in G ci siano due elementi neutri, denotati con e ed f . Consideriamo l'operazione $e \times f$. Poiché e è elemento neutro, il risultato dell'operazione è f (vedi 2.2 della Definizione). D'altro canto, anche f è elemento neutro, dunque il risultato dell'operazione è e (ancora per 2.2 della Definizione). In simboli

$$e = e \times f = f.$$

Dunque e ed f coincidono

Q.E.D.

5. La matematica e gli altri saperi

Anche con una sola occhiata alla storia della matematica, appare evidente come essa sia nata e si sia sviluppata in simbiosi con le scienze fisiche e naturali e per risolvere problemi pratici sorti nell'ambito della meccanica, dell'economia, della scienza militare, dell'astronomia... Fin dai tempi dell'antica Grecia, tuttavia, si è andata costituendo una linea di pensiero parallela e a volte contrapposta: il valore concettuale e culturale della disciplina stessa. Le teorie matematiche algebriche e geometriche hanno iniziato a prendere vita propria, a generare problemi e a risolverli. D'altro canto il calcolo infinitesimale prima e l'analisi matematica poi hanno tratto ispirazione da problemi fisici sempre più sofisticati, non solo legati alla meccanica classica, ma venuti a porsi con lo studio dell'elettricità e del magnetismo.

Tutt'oggi la matematica viene insegnata in molti corsi di laurea, non solo in quelli puramente "scientifici" (come matematica, fisica, chimica, biologia, scienze naturali, informatica), ma è presente anche in corsi di laurea "tecnici" come ingegneria, medicina, farmacia, economia, architettura, o "umanistici", come scienza della formazione.

Il grado di penetrazione della matematica nelle singole discipline varia tra questi ambiti, tuttavia la modellizzazione matematica della realtà sembra che permei la maggior parte delle aree del sapere tecnico-scientifico.

Nonostante questo, pare che persista una visione culturale che contrappone la cultura umanistica (vista come "unica" cultura degna di tale nome) con quella scientifica (assimilata alla tecnologia, utile ma non significativa per la formazione integrale della persona).

Ancora oggi sono troppe le persone, magari anche con un titolo di studio elevato o addirittura noti intellettuali, che si "vantano" di aver avuto un percorso scolastico stentato in matematica, proclamando, con un certo orgoglio, di non saperne pressoché nulla. Infatti è così. Ad una semplice indagine, risulta che molti faticano a definire correttamente la nozione di rette parallele, o non ricordano come si calcola l'area di un trapezio, o non sanno che cos'è un numero primo. Eppure queste nozioni fanno parte di ciò che viene appreso nella scuola dell'obbligo! Che cosa diremmo se la signora Levi Montalcini, insigne studiosa (e premio Nobel) di una materia scientifica come la neurobiologia, si vantasse di non ricordare la differenza tra congiuntivo e condizionale?

La contrapposizione di cui sopra è peculiare del nostro paese e forse ha radici nella riforma del sistema scolastico degli anni '20. Sicuramente questa eredità ha plasmato programmi scolastici, insegnanti e intere generazioni di studenti sull'errata identificazione tra matematica e capacità di calcolo o, più nobilmente, tra matematica e uso corretto di un insieme di formule, spesso mal dimostrate o non dimostrate affatto. L'aspetto culturale, di sfida intellettuale, di ricerca di concatenazioni nascoste, perfino di gioco della mente, sono stati dismessi senza rimpianti.

Per questo motivo è così importante da un lato un serio curriculum di studi universitari che, con un completamento solido a livello di formazione didattica, possa fornire insegnanti più qualificati per le scuole primarie e secondarie: qualificazione che poggi su una profonda comprensione della matematica non come abilità di calcolo, ma come scienza delle idee. Dall'altra, è fondamentale una costante opera di divulgazione della matematica: da vari anni si organizzano in Italia e nel mondo percorsi di orientamento per studenti delle scuole superiori, meeting illustrativi degli aspetti e delle applicazioni originali di questa disciplina, concorsi, olimpiadi, premi... L'editoria non sembra essere

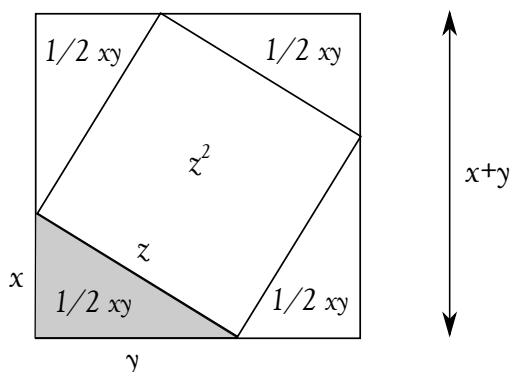
però ancora molto sensibilizzata su questo aspetto, mentre sul web non si è persa questa occasione.

E infine sembra altrettanto essenziale inserire la matematica nella rete dei saperi (su quella di Internet, come osservato, c'è già sotto molti aspetti: scientifico, divulgativo, storico, ludico...). Ma qui si tratta di conoscerci l'un l'altro, tra matematici e persone di altre scienze, perché dalla conoscenza nasca, dapprima, il riconoscimento vicendevole della ricchezza di ciascuno e, forse in seguito, qualche percorso comune.

APPENDICE A
DUE TEOREMI ANTICHI

Teorema di Pitagora. *In ogni triangolo rettangolo l'area del quadrato avente per lato l'ipotenusa equivale alla somma delle aree dei quadrati aventi per lati i due cateti.*

Dimostrazione. Il seguente disegno rappresenta un triangolo rettangolo (in grigio) i cui cateti misurano x e y e l'ipotenusa z . Su quest'ultima viene costruito un quadrato di area z^2 , mentre i cateti vengono prolungati in modo da inscrivere tale quadrato in uno più grande di lato $x + y$.



L'area del quadrato grande è quindi $(x + y)^2$. Ma è anche la somma del quadrato interno (cioè z^2) e dei 4 triangoli uguali a quello iniziale (ognuno di area $(1/2)xy$) e quindi è pari a:

$$z^2 + 4 \left(\frac{1}{2}xy \right) = z^2 + 2xy.$$

Uguagliando queste due espressioni dell'area del quadrato grande si ha quindi

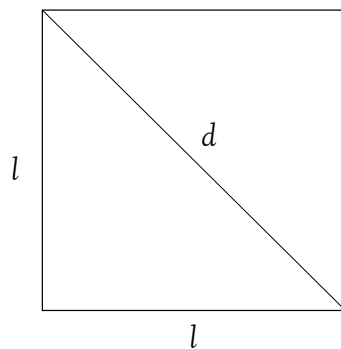
$$(x + y)^2 = z^2 + 2xy \quad \text{da cui} \quad x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2xy$$

e quindi $x^2 + y^2 = z^2$.

Q.E.D.

Teorema. *Il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato non è un numero razionale.*

Dimostrazione. Si consideri un quadrato di lato l e diagonale d come in figura:



Osserviamo anzitutto che, in base al teorema di Pitagora, si ha:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \quad \text{e quindi} \quad \frac{d^2}{l^2} = 2.$$

Supponiamo, per assurdo che il rapporto $\frac{d}{l}$ sia un numero razionale, cioè: $\frac{d}{l} = \frac{p}{q}$, dove p e q sono numeri interi senza fattori comuni. Pertanto

$$2 = \frac{d^2}{l^2} = \left(\frac{d}{l}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Quindi tra p e q si ha la stessa relazione che c'era inizialmente tra d ed l :

$$p^2 = 2q^2 \tag{*}$$

con la differenza che, ora, i due numeri coinvolti sono interi che non hanno fattori comuni. Da (*) si ha che p^2 è pari; quindi anche p lo è; poniamo quindi $p = 2n$ per un opportuno intero n . Segue che $p^2 = 4n^2$ e quindi

$$4n^2 = p^2 = 2q^2 \quad \text{da cui} \quad 2n^2 = q^2.$$

Perciò anche q^2 è pari, dunque anche q è pari. Ma in tal caso p e q hanno come fattore comune 2, contro l'ipotesi. Q.E.D.

APPENDICE B

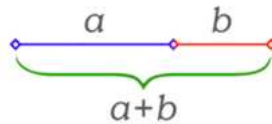
LA SEZIONE AUREA

*La geometria ha due grandi tesori:
uno è il teorema di Pitagora;
l'altro è la sezione aurea di un segmento.
Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d'oro;
il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello.*

Johannes Kepler

La *sezione aurea* (nota anche come *rapporto aureo*, *numero aureo*, *costante di Fidia* o *proporzione divina*), indicata abitualmente con la lettera greca Φ , si può introdurre in molti modi. Quello più semplice è di natura geometrica.

Consideriamo due segmenti di lunghezza a e b , rispettivamente, con $a > b$. Se il rapporto tra a e b è uguale al rapporto tra l'intero segmento $a + b$ e la parte a , diciamo che a e b sono in *rapporto aureo* o anche che b è la *sezione aurea* di a .



Indicando con Φ tale rapporto abbiamo quindi

$$\Phi := \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Ma quanto vale Φ ? Basta osservare che, dalla prima uguaglianza precedente segue $a = \Phi \cdot b$. Dunque, se poniamo $b = 1$ nella seconda uguaglianza, otterremo il valore di $a = \Phi$:

$$\frac{a}{1} = \frac{a+1}{a} \quad \text{da cui, moltiplicando per } a, \quad a^2 = a + 1.$$

Perciò Φ deve essere l'unica soluzione positiva dell'equazione

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Dalla formula risolutiva delle equazioni di II grado, segue immediatamente che

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1.618033988749894 \dots$$

che è un numero irrazionale.

Un modo meno elementare e più analitico per definire la sezione aurea è legato alla sequenza di Fibonacci. Ricordiamo che tale successione di numeri è

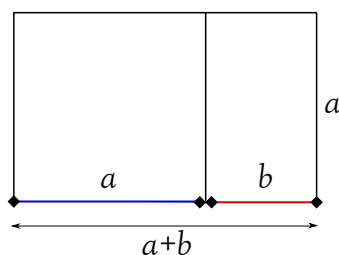
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots a_n, \dots$$

dove il termine n -esimo è $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Si può provare che la serie (cioè somma infinita) dei rapporti tra due termini consecutivi di tale sequenza tende a Φ ; in simboli:

$$\Phi = \frac{1}{1} + \frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{13}{21} + \frac{34}{55} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \dots$$

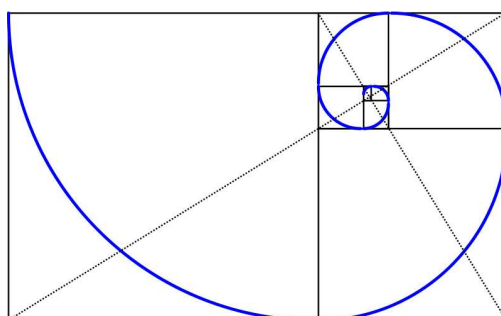
Qualche curiosità

Il *rettangolo aureo* è quello i cui lati $a + b$ e a sono in proporzione aurea (cioè tali che $\frac{a+b}{a} = \Phi$) è illustrato qui sotto:



Se da questo rettangolo eliminiamo il quadrato di lato a , il restante rettangolo è a sua volta un rettangolo aureo. Infatti il rapporto tra i suoi lati è $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$.

Iterando questo procedimento, si ottiene una serie di rettangoli aurei sempre più piccoli. Tracciando un quarto di cerchio in ogni quadrato scartato, si ottiene una figura che è una particolare “spirale logaritmica”, detta *spirale aurea*.



Spirale aurea

La costante Φ appare spesso in geometria, soprattutto nelle figure che richiamano la simmetria pentagonale. Infatti il rapporto tra il lato e la diagonale di un pentagono regolare è uguale a Φ (si può trovare la dimostrazione, semplice ma leggermente laboriosa, nella pagina Sezione aurea di Wikipedia). Il pentacolo è sicuramente la figura geometrica che più di ogni altra rappresenta, all’infinito, la sezione aurea. È forse per questo motivo che questo fu scelto come simbolo della scuola pitagorica.

In natura e nell’arte

In effetti la proporzione aurea sembra trasmettere un senso di armonico equilibrio; è stata condotta una ricerca mostrando a più persone vari rettangoli con diversi rapporti tra i lati, chiedendo

poi di indicare quale rettangolo avesse destato in loro una maggiore sensazione di armonia; la preferenza per il rapporto aureo ha confermato l'intuizione degli antichi artisti.

Nell'antichità, gli egizi e i greci conoscevano già questo numero. I greci pensavano che il rapporto aureo rappresentasse la proporzione "ideale" tra parti del corpo come il viso e il torso, o tra gli arti e il corpo intero. La sezione aurea fu perciò usata come guida per riprodurre accuratamente il corpo umano nella pittura e nella scultura.

Ma la sezione aurea si insinua anche nei regni della Natura, come e e π . C'è chi sostiene che Φ è uno di quei misteriosi numeri naturali che sembrano essere alla base della struttura del cosmo.

Uno dei più classici esempi è il Nautilus, un mollusco dei mari tropicali; la sua conchiglia, sezionata, è una spirale aurea. Tra l'altro il Nautilus viene considerato letteralmente un fossile vivente, essendo la sua specie antichissima; ha avuto quindi tutto il tempo per perfezionarsi.

Ma è nei fiori, più che altrove, che la natura ha voluto ricordarci la sua sapienza matematica. Le varie specie di margherite e girasoli hanno petali in numero della successione di Fibonacci che abbiamo visto legata al rapporto aureo. Le curve che si osservano in pigne ed ananas sono spirali logaritmiche, legate anch'esse alla sezione aurea. Ed ancora secondo spirali logaritmiche si succedono gli stami nelle corolle di margherite e girasoli.

Vista la sua diffusione in natura, tale numero era considerato esteticamente piacevole e di buon auspicio, perciò veniva usato anche per le creazioni umane. Diversi dipinti sono stati composti secondo la sezione aurea; edifici, giardini e monumenti sono stati progettati con rettangoli aurei (per esempio il Partenone di Atene e la Grande Piramide a Giza).

La sezione aurea continua ad essere utilizzata anche oggi: architetti come Le Corbusier o l'italiano Terragni l'hanno usata nella progettazione di alcuni edifici razionalisti. Altre applicazioni si trovano nel design, e studi recenti mostrano che continua ancora a giocare un ruolo importante nella nostra percezione della bellezza.

Anche la musica non sfugge al fascino del rapporto aureo. Anzitutto le note: una scala completa (compreso il do della scala successiva) si compone di 5 diesis e 8 note, per un totale di 13 toni, e questi sono numeri di Fibonacci. Infine un ambiente d'ascolto, ma anche una cassa acustica, minimizzerà le risonanze se le dimensioni sono in rapporto aureo tra loro.

La struttura di diverse composizioni di Claude Debussy e Bela Bartok riflettono le proporzioni definite dalla sezione aurea e dai numeri di Fibonacci. Il pianista Roy Howat ha mostrato che brani di Debussy come *Reflets dans l'eau*, *L'isle joyeuse* e il poema sinfonico *La mer* sono costruiti attorno a diversi *pattern* geometrici basati sulle proporzioni auree.

Ancora oggi la sezione aurea è ampiamente utilizzata: le dimensioni standard di carte di credito, tessere telefoniche, badge per ogni applicazione, corrispondono (salvo tolleranze di fabbricazione) al rettangolo aureo.

Come curiosità riportiamo la sezione aurea fino al 1024mo decimale:

1.6180339887	4989484820	4586834365	6381177203	0917980576	2862135448
6227052604	6281890244	9707207204	1893911374	8475408807	5386891752
1266338622	2353693179	3180060766	7263544333	8908659593	9582905638
3226613199	2829026788	0675208766	8925017116	9620703222	1043216269
5486262963	1361443814	9758701220	3408058879	5445474924	6185695364
8644492410	4432077134	4947049565	8467885098	7433944221	2544877066
4780915884	6074998871	2400765217	0575179788	3416625624	9407589069
7040002812	1042762177	1117778053	1531714101	1704666599	1466979873
1761356006	7087480710	1317952368	9427521948	4353056783	0022878569
9782977834	7845878228	9110976250	0302696156	1700250464	3382437764
8610283831	2683303724	2926752631	1653392473	1671112115	8818638513
3162038400	5222165791	2866752946	5490681131	7159934323	5973494985
0904094762	1322298101	7261070596	1164562990	9816290555	2085247903
5240602017	2799747175	3427775927	7862561943	2082750513	1218156285
5122248093	9471234145	1702237358	0577278616	0086883829	5230459264
7878017889	9219902707	7690389532	1968198615	1437803149	9741106926
0886742962	2675756052	3172777520	3536139362	1076738937	6455606060
5921					

Bibliografia e sitografia

- E.T. Bell, *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze, 1966
C.B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, 1980
S. Singh, *L'Ultimo Teorema di Fermat*, Rizzoli, 1997

www.sectioaurea.com

http://it.wikipedia.org/wiki/Sezione_aurea

Indice

Premessa	3
Parte I: Cenni sulla storia del pensiero matematico	4
1. Le origini	5
2. L'Età d'Oro della matematica antica	6
3. La matematica antica extra europea	9
4. Il Medioevo	9
5. Il Rinascimento	10
6. Gli inizi della matematica moderna	11
7. La matematica moderna	12
8. L'Età d'Oro della matematica moderna	14
9. Alcuni aspetti della matematica contemporanea	18
Parte II: Matematica oggi	20
1. Patti chiari	20
2. Vero, falso, non so	21
3. Fare matematica	23
4. Un esempio di teoria matematica	24
5. La matematica e gli altri saperi	25
Appendice A: Due teoremi antichi	28
Appendice B: La sezione aurea	30
Bibliografia e sitografia	33