# Introduzione

Consideriamo

$$3x + y - 2z = 0$$

Risolvere significa determinare una terna $(x, y, z)$ di numeri tali che se sostituiti al membro sinistro rendono vera l'uguaglianza.
Una soluzione possibile è

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0, \quad \text{ovvero la terna } (0, 0, 0)$$

Infatti, vale che

$$3 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Allo stesso modo, anche la scelta

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 2 \quad \text{ovvero la terna } (1, 1, 2)$$

è soluzione, infatti

$$3 \cdot 1 + 1 - 2 \cdot 2 = 3 + 1 - 4 = 0$$

Similmente anche

$$x = 0,\ y = 2,\ z = 1 \quad \text{ovvero la terna } (0, 2, 1)$$

è soluzione, infatti

$$3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$$

Vediamo ora che possiamo usare queste due soluzione per creare altre, usando in particolare la proprietà commutativa e distributiva delle operazioni.
Mostriamo che la scelta

$$x = 2,\ y = 2,\ z = 4 \quad \text{ovvero la terna } (2, 2, 4)$$

è soluzione. Infatti

$$3 \cdot 2 + 2 - 2 \cdot 4 = 6 + 2 - 8 = 0$$

Riotteniamo ora questo risultato in modo da fare emergere una proprietà interessante delle equazioni:

$$3 \cdot 2 + 2 - 2 \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 1) + 1 \cdot (2 \cdot 1) - 2 \cdot (2 \cdot 2)$$

$$\text{prop. commutativa e associativa} \longrightarrow = 2 \cdot (3 \cdot 1) + 2 \cdot (1 \cdot 1) - 2 \cdot (2 \cdot 2)$$

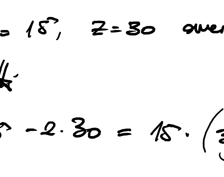
(ricordiamo che per le operazioni di somma e prodotto tra numeri vale la proprietà commutativa dal momento che per ogni numero reale $a$ e $b$ si ha che $a \cdot b = b \cdot a$ e $a + b = b + a$;
inoltre vale la proprietà associativa per le operazioni di somma e prodotto tra numeri dato che per ogni numero reale $a, b$ e $c$ vale

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad e \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$$

$$\text{prop. distributiva} \longrightarrow = 2\left(3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2\right)$$

(ricordiamo che per le operazioni di somma e prodotto tra numeri reali vale la proprietà distributiva dato che per ogni numero reale $a, b, c$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$


)

$$= 2\left(\underbrace{3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2}_{=0 \text{ perché } (1,1,2) \text{ è soluzione}}\right)$$

$$= 2 \cdot 0 = 0$$

Lo stesso ragionamento ci mostra che

$$x = 15,\ y = 15,\ z = 30 \quad \text{ovvero la terna } (15; 15; 30)$$

è soluzione; infatti

$$3 \cdot 15 + 1 \cdot 15 - 2 \cdot 30 = 15 \cdot \left(\underbrace{3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2}_{=0}\right)$$

$$= 15 \cdot 0 = 0.$$

Generalizzando, possiamo dire che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ("per ogni"; "appartiene / in"; l'insieme dei numeri reali)
vale che la terna $(\alpha, \alpha, 2 \cdot \alpha)$ è soluzione dell'equazione.
Possiamo introdurre questo tipo di scrittura:

$$\alpha \cdot (1, 1, 2) \underset{\text{definizione}}{:=} (\alpha, \alpha, 2 \cdot \alpha)$$

In questo modo diamo senso alla nozione di moltiplicazione di una terna per un numero reale, e possiamo dire che dato che $(1, 1, 2)$ è soluzione dell'equazione, allora ogni suo multiplo per un numero reale è anch'esso soluzione.
Questa proprietà è una peculiarità di questo tipo di equazioni; essa non vale, ad esempio, per l'equazione $x + 2y - 1 = 0$ oppure per l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$. (verificare per esercizio).
Analizziamo adesso un secondo fenomeno peculiare dell'equazione che stiamo studiando. Abbiamo visto che

$$(1, 1, 2) \quad e \quad (0, 2, 1)$$

sono due soluzioni. Ora vorrei mostrare che $(1, 3, 3)$ è soluzione. Per farlo notiamo preliminarmente che $(1, 3, 3)$ è ottenuta sommando "entrata per entrata" le due terne $(1, 1, 2)$ e $(0, 2, 1)$:

$$1 = 1 + 0$$
$$3 = 1 + 2$$
$$3 = 2 + 1$$

In questo senso, possiamo introdurre come notazione compatta:

$$(1, 3, 3) = (1, 1, 2) + (0, 2, 1)$$

In generale possiamo definire

$$(a, b, c) + (a', b', c') \underset{\text{definizione}}{:=} (a + a', b + b', c + c')$$

In questo modo abbiamo introdotto una nozione di somma tra due terne.
Come fatto in precedenza, mostriamo che $(1, 3, 3)$ è soluzione basandoci sulle conoscenze pregresse.

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3 \cdot (0 + 1) + 1 \cdot (1 + 2) - 2 \cdot (2 + 1)$$

$$= \underbrace{(3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2)}_{=0 \text{ perché } (1,1,2) \text{ è sol.}} + \underbrace{(3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1)}_{=0 \text{ perché } (0,2,1) \text{ è sol}}$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

Generalizzando, abbiamo visto che la somma di due soluzioni dell'equazione è anch'essa una soluzione dell'equazione. Ciò non vale per tutti i tipi di equazione come si può evincere osservando l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$, le cui soluzioni sono 2 e 3, e quindi $2 + 3$ non è soluzione.

Riassumendo, abbiamo visto che, riguardo alle soluzioni di $3x + y - 2z = 0$:

A. la terna $(0,0,0)$ è soluzione;
B. se la terna $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è soluzione, allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, anche la terna $\alpha \cdot (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è soluzione
C. se le terne $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ sono soluzioni, allora anche $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ è soluzione.

Queste tre proprietà sono centrali nel concetto di linearità.
Allarghiamo il nostro orizzonte e andiamo a studiare il caso di più equazioni che noi vogliamo siano soddisfatte simultaneamente, ovvero quelli che sono noti come sistemi di equazioni.
Ad esempio:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x \qquad - z = 0 \end{cases}$$

Ripetendo i ragionamenti precedenti notiamo che anche per le soluzioni di questo sistema valgono le proprietà A, B, e C.
Come trovare le soluzioni di questo sistema? Per farlo utilizziamo il cosiddetto "algoritmo di eliminazione di Gauss". Esso si basa sulle seguenti regole:

1. "se a cose uguali sommiamo cose uguali, otteniamo cose uguali"
2. "se moltiplichiamo due numeri uguali per il medesimo numero non nullo otteniamo numeri uguali e viceversa"

Tramite questi due principi, manipoliamo il sistema iniziale per ottenerne uno equivalente, ovvero con le stesse soluzioni. Vogliamo che il sistema finale abbia la forma seguente:

$$\begin{cases} \text{un'equazione in tutte e tre le variabili} \\ \text{un'equazione in } y \text{ e } z \\ \text{un'equazione in } z \end{cases}$$

qualcuna di queste equazioni può essere mancante

Partiamo notando che

$$-2x - 2y + 2z = 0$$

è equivalente a

$$x + y - z = 0$$

Il sistema diviene

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x \qquad - z = 0 \end{cases}$$

Considero ora

$$(3x + y - 2z) - 3(x + y - z) = 0 - 3 \cdot 0$$

$$-2y + z = 0$$

Similmente posso considerare

$$(2x - z) - 2(x + y - z) = 0 - 2 \cdot 0$$

$$-2y + z = 0$$

Il sistema iniziale è equivalente a

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases}$$

medesima equazione, quindi una delle due può essere ignorata

A questo punto posso scegliere un valore per $z$, determinare dalla II equazione il valore di $y$, sostituirli entrambi nella I equazione e determinare il valore di $x$.
Notiamo ora che se a partire dal sistema iniziale inseriamo i coefficienti che compaiono nelle equazioni in una tabella otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$