$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot -\tfrac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; II - 3 \cdot I$$

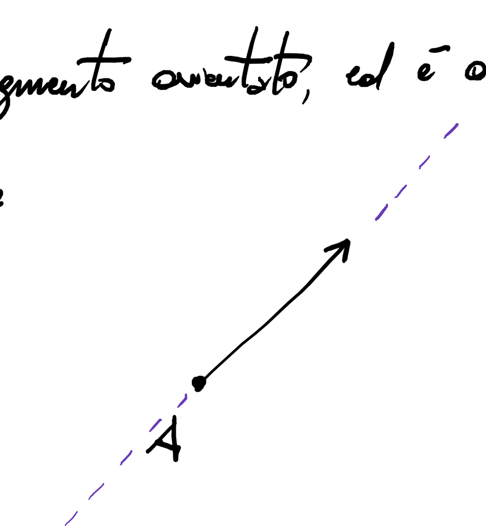
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; III - 2I \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; III - II$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{matrice a gradini}$$

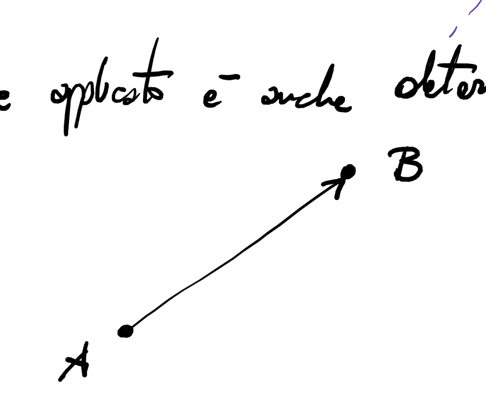
Vettori applicati e vettori liberi.

Un vettore applicato è un segmento orientato, ed è dunque caratterizzato da:

* un punto di applicazione
* direzione
* verso
* lunghezza (o modulo)

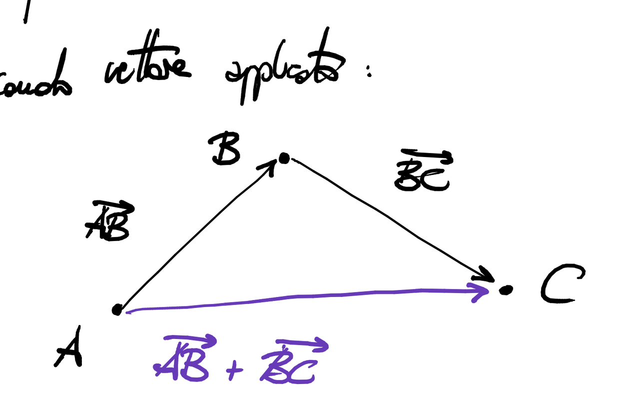


Un vettore applicato è anche determinato da una coppia ordinata di punti



in questo caso il vettore applicato si denota con $\vec{AB}$

I vettori applicati si possono sommare, ma non sempre: è necessario (e sufficiente) che il punto di arrivo del primo vettore applicato coincida con il punto di partenza del secondo vettore applicato:



Attenzione: se $B \neq C$, allora non sappiamo sommare $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$.

Prop: se è definita, la somma tra vettori applicati soddisfa la proprietà associativa, ovvero

(Ricordiamo che la proprietà associativa vale ad esempio per la somma di numeri reali, ovvero per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ vale che $(a+b)+c = a+(b+c)$),

$$(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD})$$

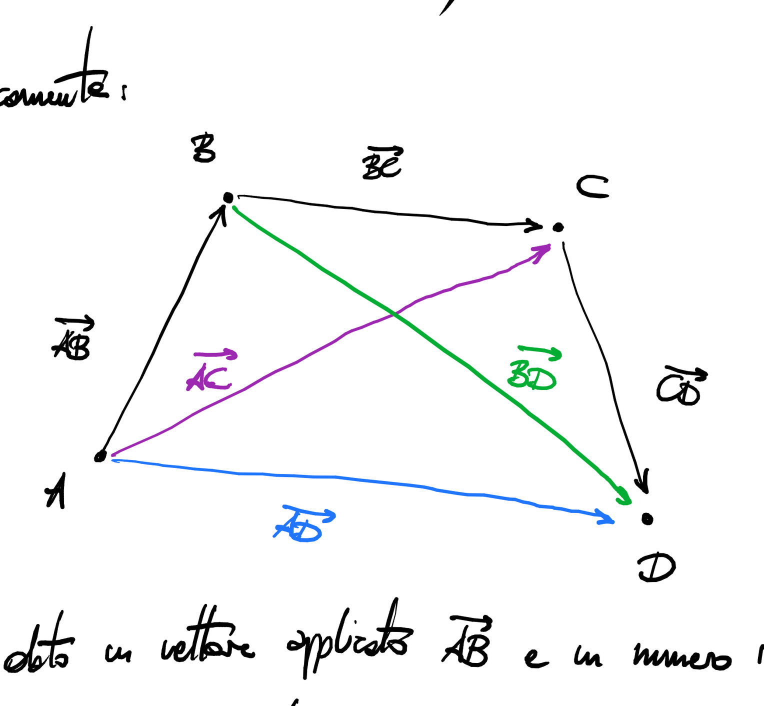
per ogni vettore applicato $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ e $\vec{CD}$, ovvero per ogni quattro punti A, B, C e D nel piano

Dim: per mostrare che vale la proprietà associativa, calcoliamo esplicitamente i membri destro e sinistro della precedente uguaglianza e mostriamo che effettivamente sono uguali; vale che

$$(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

$$\vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD} \qquad \square$$

Graficamente:



Def: dato un vettore applicato $\vec{AB}$ e un numero reale $a \in \mathbb{R}$ definiamo $a \cdot \vec{AB}$ nel modo seguente:

* se $a = 0$, definiamo $a \cdot \vec{AB} = \vec{AA}$
* se $a > 0$, definiamo $a \cdot \vec{AB}$ come quel vettore applicato tale che
  * ha lo stesso punto di applicazione di $\vec{AB}$
  * ha la stessa direzione di $\vec{AB}$
  * ha lo stesso verso di $\vec{AB}$
  * ha modulo uguale ad $a \cdot \underbrace{|\vec{AB}|}_{\text{modulo di } \vec{AB}}$
* se $a < 0$, definiamo $a \cdot \vec{AB}$ come quel vettore applicato tale che:
  * ha lo stesso punto di applicazione di $\vec{AB}$
  * ha la stessa direzione di $\vec{AB}$
  * ha verso opposto a quello di $\vec{AB}$
  * ha modulo $|a| \cdot |\vec{AB}| = (-a) \cdot |\vec{AB}|$

Abbiamo introdotto vettori applicati del tipo $\vec{AA}$. Notiamo che

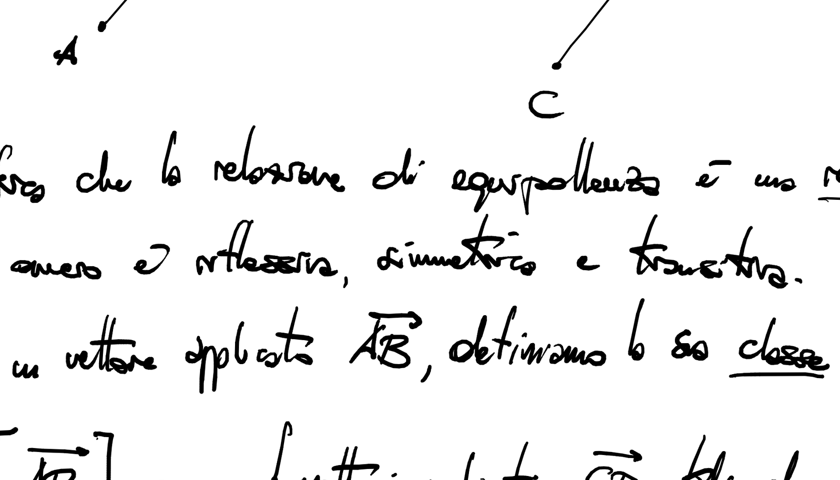
$$\left.\begin{aligned} \vec{AA} + \vec{AB} &= \vec{AB} \\ \vec{AB} + \vec{BB} &= \vec{AB} \end{aligned}\right\}$$

i vettori applicati del tipo $\vec{AA}$ e $\vec{BB}$ si comportano in maniera simile a come si comporta lo zero nei numeri.

Per questo motivo, i vettori applicati del tipo $\vec{AA}$ si chiamano vettori applicati nulli.

Per ottenere una teoria "più compatta" e più funzionante, andiamo a introdurre dei nuovi oggetti, i cosiddetti vettori liberi. Per farlo andiamo ad accomunare vari vettori applicati tra di loro, tramite la nozione di equipollenza.

Def: due vettori applicati $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ si dicono equipollenti (e in questo caso scriviamo $\vec{AB} \equiv \vec{CD}$) se e solo se $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo (ovvero differiscono per il punto di applicazione).



si verifica che la relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza, ovvero è riflessiva, simmetrica e transitiva.

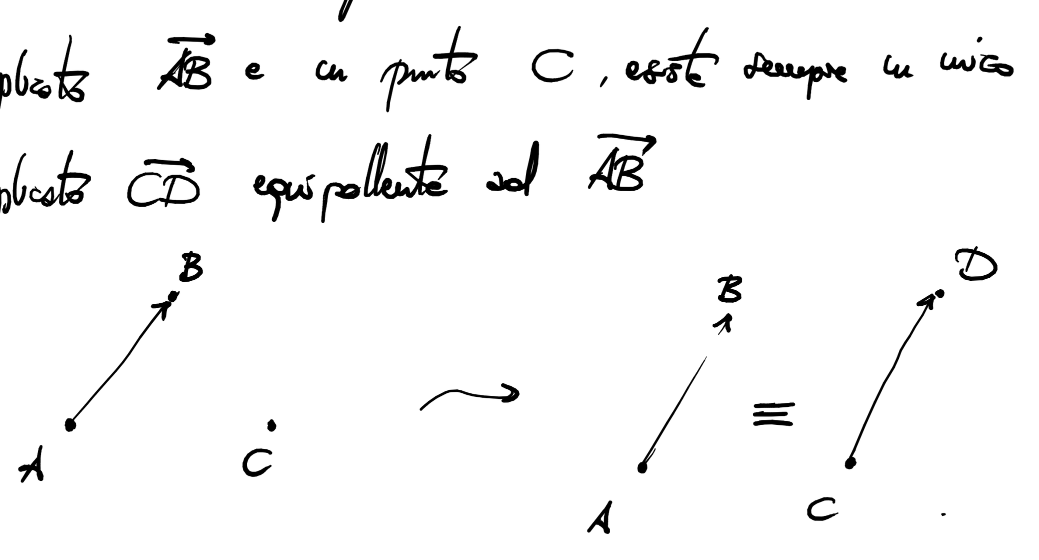
Def: dato un vettore applicato $\vec{AB}$, definiamo la sua classe di equipollenza:

$$[\vec{AB}] \underset{\uparrow\ \text{definizione}}{:=} \{\text{vettori applicati } \vec{CD} \text{ tali che } \vec{AB} \equiv \vec{CD}\}$$

Oss: $[\vec{AA}] = \{\text{vettori applicati nulli}\}$

notiamo quindi $[\vec{AA}] = [\vec{BB}]$.

Prop: dai risultati della geometria euclidea abbiamo che, dato un vettore applicato $\vec{AB}$ e un punto C, esiste sempre un unico vettore applicato $\vec{CD}$ equipollente ad $\vec{AB}$



da questo segue che, data una classe di equipollenza $\vec{v}$ e dato un punto C, esiste sempre un vettore applicato $\vec{CD}$ che appartiene a $\vec{v}$, ovvero $\vec{CD} \in \vec{v}$.

Def: se $\vec{AB} \equiv \vec{CD}$ (e dunque $[\vec{AB}] = [\vec{CD}]$), allora si dice che $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sono rappresentanti della medesima classe di equipollenza.

Def: una classe di equipollenza $\vec{v}$ si dice un vettore libero.

Def: tutti i vettori applicati nulli formano un'unica classe di equipollenza, ovvero un vettore libero, che denotiamo con $\vec{0}$.

Def: dati due vettori liberi $\vec{u}$ e $\vec{v}$ definiamo la loro somma (che denotiamo con $\vec{u} + \vec{v}$) nella maniera seguente:

1. scegliamo un rappresentante $\vec{AB}$ per $\vec{u}$, ovvero $\vec{u} = [\vec{AB}]$
2. scegliamo un rappresentante di $\vec{v}$ tale per cui il suo punto iniziale sia B, ovvero un vettore applicato $\vec{BC}$ con $\vec{v} = [\vec{BC}]$
3. definiamo $\vec{u} + \vec{v} := [\vec{AB} + \vec{BC}] = [\vec{AC}]$

questa costruzione non dipende dal rappresentante di $\vec{u}$ scelto all'inizio

Oss: sia $\vec{v}$ un vettore libero, allora chi è

$$\vec{0} + \vec{v} \quad ?$$

sia $\vec{v} = [\vec{AB}]$ e consideriamo $\vec{0} = [\vec{AA}]$

$$\vec{0} + \vec{v} = [\vec{AA}] + [\vec{AB}] = [\vec{AA} + \vec{AB}] = [\vec{AB}] = \vec{v}$$

analogamente

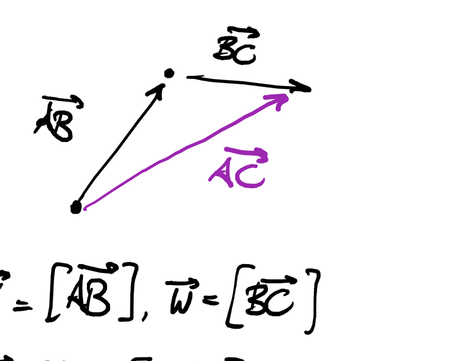
$$\vec{v} + \vec{0} = [\vec{AB}] + [\vec{BB}] = [\vec{AB} + \vec{BB}] = [\vec{AB}] = \vec{v}$$

vediamo ora che $\vec{0}$ si comporta davvero come il numero zero!

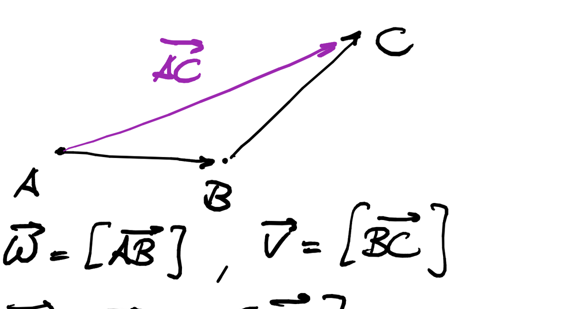
Notiamo che in questo modo la somma è ora definita per ogni coppia di vettori liberi! In questa maniera abbiamo risolto i due "problemi" che affliggevano la teoria dei vettori applicati: somma solo parzialmente definita e pluralità di vettori nulli.

Oss: se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori liberi, allora

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$



$\vec{v} = [\vec{AB}]$, $\vec{w} = [\vec{BC}]$
$\vec{v} + \vec{w} = [\vec{AC}]$



$\vec{w} = [\vec{AB}]$, $\vec{v} = [\vec{BC}]$
$\vec{w} + \vec{v} = [\vec{AC}]$