

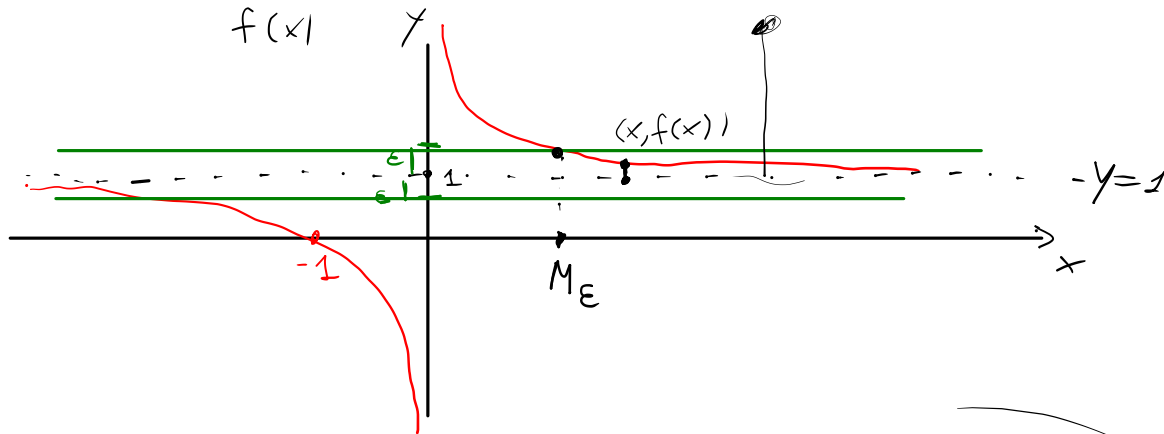
1 ottobre

Da Lunedì 7 ottobre 16-18

Aula Magna Ed M Esercitazioni

Le lezioni del <sup>Merc</sup>16-<sup>Ven</sup>17-18 lezioni proprie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{f(x)} = 1$$



1)  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \exists M_\epsilon > 0 \text{ t.c. } x > M_\epsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$

2)  $\forall \epsilon \in (0, \frac{1}{2}) \exists M_\epsilon > 0 \text{ t.c. } x > M_\epsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$

3) Sia  $A \subset \mathbb{R}_+ \text{ t.c. } \inf A = 0$

$$\forall \epsilon \in A \exists M_\epsilon > 0 \text{ t.c. } x > M_\epsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

Esercizio: Dimostrare che tre proposizioni sono equivalenti.

Esercizio Dimostrare che se  $L_1$  ed  $L_2$  sono due numeri reali t.c.

$$|L_1 - L_2| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \text{ allora } L_1 = L_2.$$

$$X \subseteq \mathbb{R} \quad X \neq \emptyset$$

$$-X = \{-x : x \in X\}$$

$$\text{Allora a) } \inf(-X) = -\sup X$$

$$\text{b) } \sup(-X) = -\inf X$$

Notare che sono equivalenti perché se  $\forall X \subseteq \mathbb{R}$  ho la a)

$$\boxed{\inf(-X) = -\sup X}$$

allora scegliendo come  $X$  l'insieme  $-X$  ho

$$\inf(\underbrace{-(-X)}_X) = -\sup(-X)$$

$$-(-X) = \{-y : \underbrace{y \in (-X)}_{-x \text{ con } x \in X} = X\} = \{x(x) : x \in X\}$$

$$\inf X = -\sup(-X) \Leftrightarrow \sup(X) = -\inf X \quad \text{che è la (b)}$$

$$\text{a) } \inf(-X) = -\sup X$$

Sia  $m = \inf(-X)$ . Allora  $m$  soddisfa le seguenti due proprietà:

$$1) \quad m \leq y \quad \forall y \in -X$$

$$2) \quad z \leq y \quad \forall y \in -X \Rightarrow m \leq z$$

Operiamo la 1)

$$m \leq y \quad \forall y \in -X \Leftrightarrow m \leq -x \quad \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow -m \geq x \quad \forall x \in X$$

$$1') \quad x \leq -m \quad \forall x \in X$$

Guardiamo alla proprietà 2).

Dalla proprietà 2) dell'estremo superiore di  $X$

$$\text{ho che } -m \geq \sup X$$

Se anche dalla proprietà 1) di  $\sup X$

$$x \leq \sup X \quad \forall x \in X$$

$$\Updownarrow$$

$$-x \geq -\sup X \quad \forall x \in X$$

$$\Updownarrow$$

$$y \geq -\sup X \quad \forall y \in (-X)$$

$$\Downarrow$$

$$m = \inf(-X) \geq -\sup X$$

$$\boxed{\begin{matrix} m \geq -\sup X \\ m \leq -\sup X \end{matrix}}$$

$$\boxed{-m \geq \sup X}$$

$$\Rightarrow m = -\sup X$$

$$\inf(-X) = -\sup X$$

$$\emptyset \neq X \subseteq Y$$

$$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y$$

$\forall x \in X$  w che

$$\inf X \leq x \leq \sup X \Rightarrow \inf X \leq \sup X$$

~~Dolba~~ 1) per  $\sup Y$  w che

$$y \leq \sup Y \quad \forall y \in Y \Rightarrow x \leq \sup Y \quad \forall x \in X$$

~~dolba~~ 2) per  $\sup X$

$$\Rightarrow \sup X \leq \sup Y$$

Dolba 1) per  $\inf Y$  w che

$$y \geq \inf Y \quad \forall y \in Y \Rightarrow x \geq \inf Y \quad \forall x \in X$$

~~dolba~~ 2) per  $\inf X$

$$\inf Y \leq \inf X$$

Def Sia  $X$  un insieme. Una successione di elementi di  $X$  è una funzione  $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ .

Di solito le successioni vengono denotate

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $x_n \in X \forall n$  dove qui la funzione è  
 $n \mapsto x_n$

Esempi 1)  $\{1, 2, \dots\} = \{n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{n\}$

2)  $\{1, 1, 1, \dots\} = \{1\}$

2)  $\{-1, 1, -1, 1, \dots\} = \{(-1)^n\}$

Def Sia  $\{x_n\}$  una successione di numeri reali e sia  $L \in \mathbb{R}$ . Scriviamo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$  qui  $f(n) = x_n$   
 e  $\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon > 0$  t.c.  $n > M_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$   
 $f(n)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overset{x_n}{1} = 1$

Infatti è vero che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \text{ t.c. } n > M_\varepsilon \Rightarrow \overset{1}{|x_n - 1|} < \varepsilon}$$

Infatti se  $x_n \equiv 1$  ho che

$$|x_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Come  $M_\varepsilon$  posso scegliere quello che voglio |

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = ? \text{ non esiste}$$

Teorema (Unicità del limite) Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\sup X = +\infty$   
 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora, se esiste,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  è unico

Dim Supponiamo per assurdo che sia falso.

Quindi esiste  $X \subseteq \mathbb{R}$  ed  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$   
 $L_1 \neq L_2$  t.c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_2$

$$1) \left[ \forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon^{(1)} \text{ t.c. } x > M_\varepsilon^{(1)} \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon \right]$$

$$2) \left[ \forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon^{(2)} \text{ t.c. } x > M_\varepsilon^{(2)} \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Dimostrare che } \forall x \in X \quad & | \\ |L_1 - L_2| &= |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad & |L_1 - L_2| \leq \underbrace{|f(x) - L_1|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{< \varepsilon} \\ \text{se scelgo } x &> \max \{ M_\varepsilon^{(1)}, M_\varepsilon^{(2)} \} \\ \text{segue che} \quad & |L_1 - L_2| \leq \underbrace{|f(x) - L_1|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto che  $\forall \varepsilon > 0$  risulta che?

$$\left[ |L_1 - L_2| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\left( |L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \right)$$

$$\Downarrow$$

$$L_1 = L_2$$

Esercizio Se  $x_0 \in \mathbb{R}$  soddisfa  
 $x_0 < 10^{10} \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

allora  $x_0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Esercizio Se  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon > 0$  ~~soddisfa~~ e si ha

$$\left[ x_0 < c_0 \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \right]$$

allora  $\left[ x_0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \right]$

Esercizio Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  formato da un numero  
finito di elementi. Allora esistono  $\max X$   
e  $\min X$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$



$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$|x| - |y| \leq |x - y| \Leftrightarrow |x| \stackrel{?}{\leq} |x - y| + |y|$$

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| \leq |x - y| + |y|$$

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \Leftrightarrow |y| \leq |x - y| + |x|$$

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|$$