Relative Numbers Lab

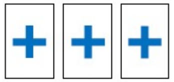
15/10/2024 – Technology in Mathematics Education

Desmos's exploration

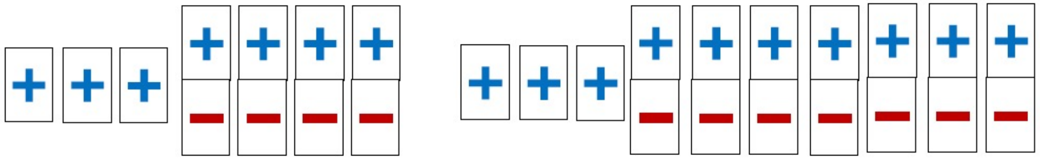
https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5f1aef204f0d9708e294e462?lang=it&collections=5f8a43db06b0d9a8bd84c3cf%2C5f8a446e06b0d9a8bd84c3dd

Early Algebra approach to Algebraic Sum

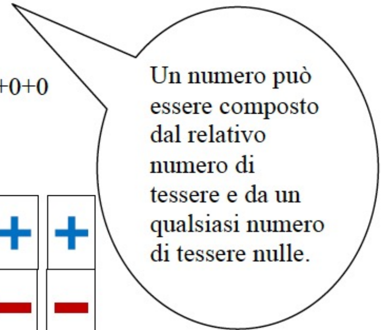
a. Rappresenta (+3) con almeno 7 tessere.
Gli alunni probabilmente non sanno che pesci pigliare. Mettono sul tavolo tre tessere e si fermano:



L'insegnante suggerisce di riflettere sull'esperienza precedente in cui si è conquistata la rappresentazione dello zero. Due soluzioni possibili:



Si perviene attraverso altri esempi ad una definizione del tipo:

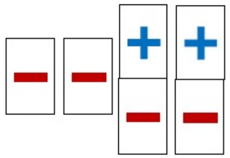


Si trascrive la situazione precedente in linguaggio matematico:

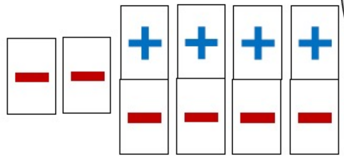
$$+3=+3+0+0+0+0=+3+0+0+0+0+0+0+0$$

L'insegnante fa eseguire degli esercizi di rinforzo:

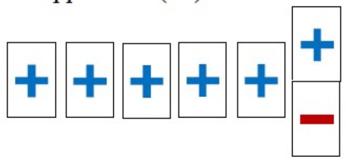
b. Rappresenta (–2) con almeno 4 tessere. Per esempio:



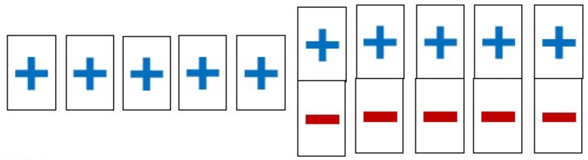
oppure:



c. Rappresenta (+5) con almeno 6 tessere:

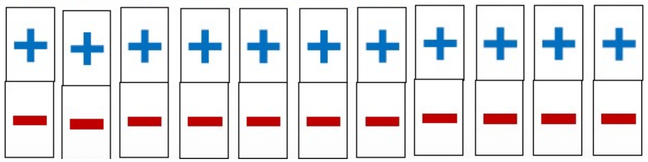


o



ecc

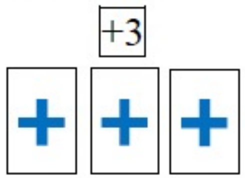
d. Rappresenta (0) con almeno 11 tessere:



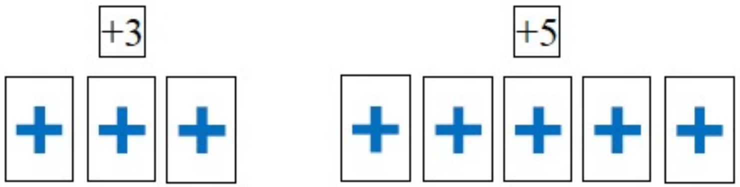
ecc.

6.4.1. Aggiungere positivo a positivo

L'alunno scopre le tessere del primo pacchetto e ne codifica il contenuto su un foglietto che pone sopra di esse:



Scopre il secondo pacchetto, pone le nuove tessere accanto alle precedenti e codifica il loro contenuto come prima:



L'alunno conta le tessere e rappresenta la loro somma sul quaderno:

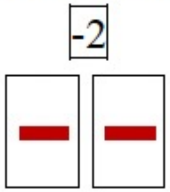
$$(+3)+(+5)=+8$$

Si fa verbalizzare la conclusione; ad esempio:

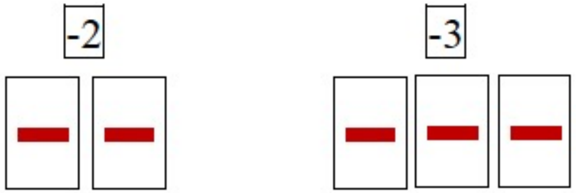
> Nel primo pacchetto ci sono tre tessere '+'. Nel secondo cinque. In tutto ci sono otto tessere '+'.

6.4.2. Aggiungere negativo a negativo

L’alunno scopre le tessere del primo pacchetto e ne codifica il contenuto su un foglietto:



Scopre il secondo pacchetto, pone le nuove tessere accanto alle precedenti e codifica il loro contenuto come prima:



L’alunno conta le tessere e rappresenta la loro somma sul quaderno:

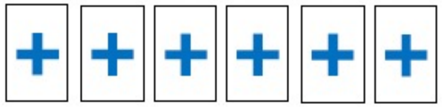
$$(-2)+(-3)=-5$$

Si fa verbalizzare la conclusione; ad esempio:

Nel primo pacchetto ci sono due tessere ‘-’. Nel secondo tre. In tutto ci sono cinque tessere ‘-’.

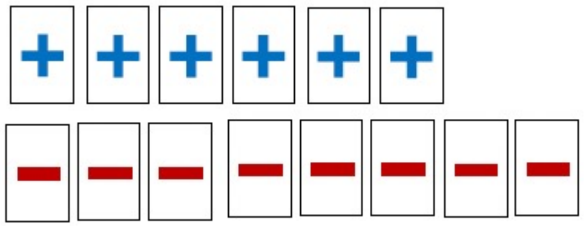
6.4.3. Aggiungere negativo a positivo oppure positivo a negativo

L'alunno scopre le tessere del primo pacchetto e ne codifica il contenuto su un foglietto:



$\boxed{+6}$

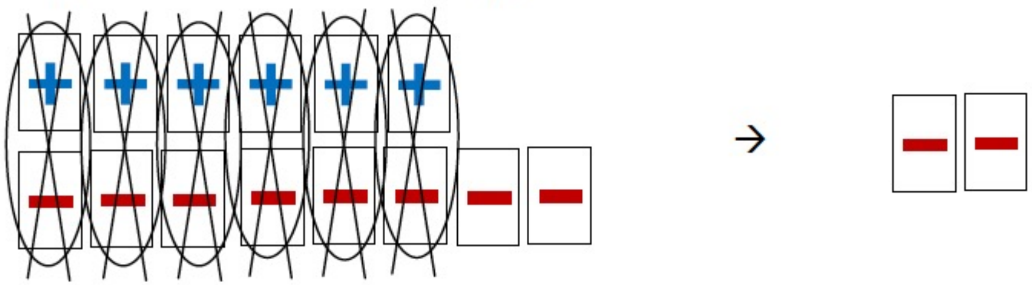
Scopre il secondo pacchetto, pone le nuove tessere in una riga sotto le precedenti e codifica il loro contenuto:



$\boxed{+6}$

$\boxed{-8}$

Viene guidato a riconoscere le coppie-zero e le elimina:



☞ *Questa è una fase molto delicata. Per la prima volta, nel suo lavoro con le carte, la classe deve riconoscere nella disposizione delle tessere – si ribadisce l'importanza dell'ordine negli incolonnamenti - delle coppie-zero.*

L'insegnante favorisce il richiamo di questa strategia, sulla quale la classe deve aver lavorato in modo significativo, che assumerà sempre più importanza nel corso dell'attività.

☞ ***Individuare regolarità: alcune questioni riassuntive***

- *Che tipo di situazione ottieni quando aggiungi tessere positive a tessere positive?*
  - *È sempre vero?*

  Risposta: È sempre vero.

  Quando si aggiungono tessere positive a tessere positive il risultato è positivo, ed è uguale alla somma delle tessere dei due pacchetti.

- *Che tipo di risposta ottieni quando aggiungi tessere negative a tessere negative?*
  - *È sempre vero?*

  Risposta: È sempre vero.

  Quando si aggiungono tessere negative a tessere negative il risultato è sempre negativo, ed è uguale alla somma delle tessere dei due pacchetti.

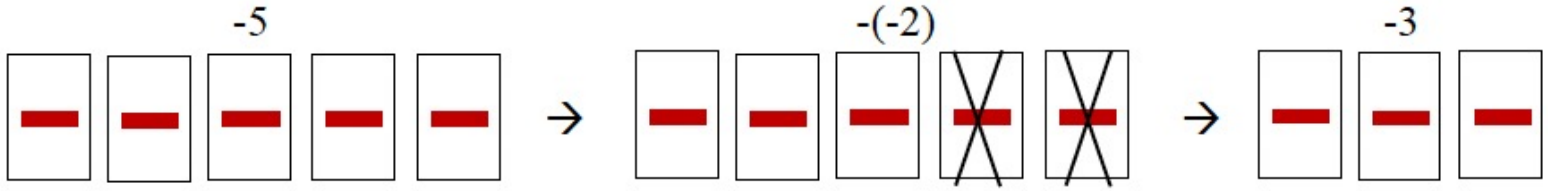
- *Che tipo di risposta ottieni quando aggiungi tessere positive a tessere negative?*
  - *È sempre vero?*
  - *Come fai a capire se la risposta è positiva o negativa?*

  Risposta: Dipende ogni volta dai due numeri.

  Quando si aggiungono tessere positive a tessere negative, o viceversa, il segno del risultato dipende dai numeri delle tessere ed è uguale a quello del numero più grande.

  Il numero del risultato è la differenza fra i numeri delle tessere.

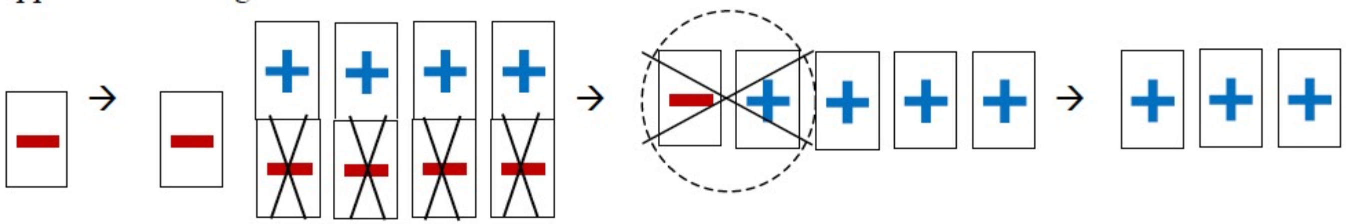
Si cerca sempre di raggiungere delle definizioni generali *esprimibili in linguaggio naturale.*



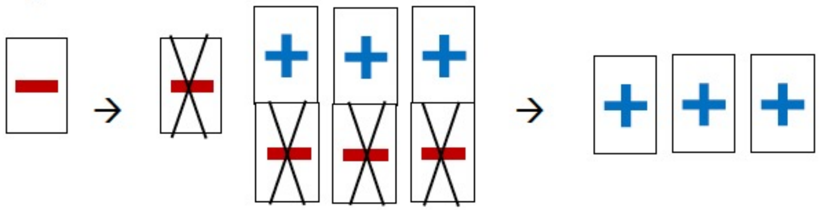
-1-(-4)=+3

Non è possibile 'togliere' quattro tessere negative da una sola tessera negativa. **Gli alunni devono imparare a modellizzare il numero -1 in modo che ci siano quattro tessere negative da togliere**. Diventano determinanti le **tessere nulle**. Si possono ipotizzare almeno due percorsi:

(a) (strategia inizialmente forse più spontanea, meno ragionata): l'alunno appoggia sul tavolo una tessera '-' e poi quattro tessere nulle; ripiega le parti negative delle tessere nulle in modo che non siano più visibili (come se le togliesse); riconosce che una tessera '-' e una '+' formano una nuova coppia-zero e le toglie. Rimane con tre tessere '+'.



(b) (strategia inizialmente forse meno spontanea, più ragionata): l'alunno appoggia sul tavolo una tessera '-' e poi tre tessere nulle; toglie la tessera '-' e ripiega le parti negative delle tessere nulle in modo che non siano più visibili. Rimane con tre tessere '+'.



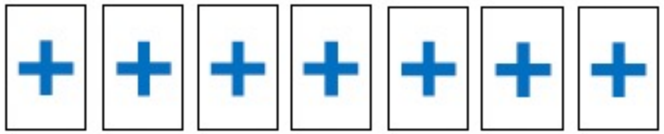
6.5.1. Togliere positivo da positivo (valore assoluto del primo numero **maggiore** del secondo)

L'insegnante propone la scrittura:

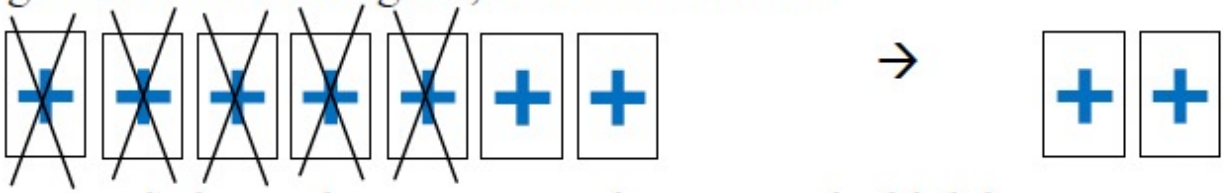
$$(+7)-(+5)$$

L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:

Dalle sette tessere '+' iniziali togliamo cinque tessere '+'.



Autonomamente, o su suggerimento dei compagni o dell'insegnante, toglie cinque tessere argomentando i suoi gesti; conta le rimaste...

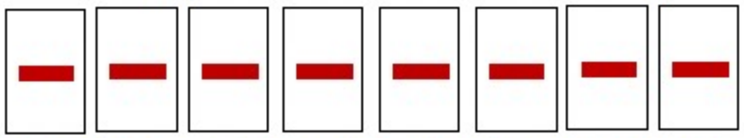


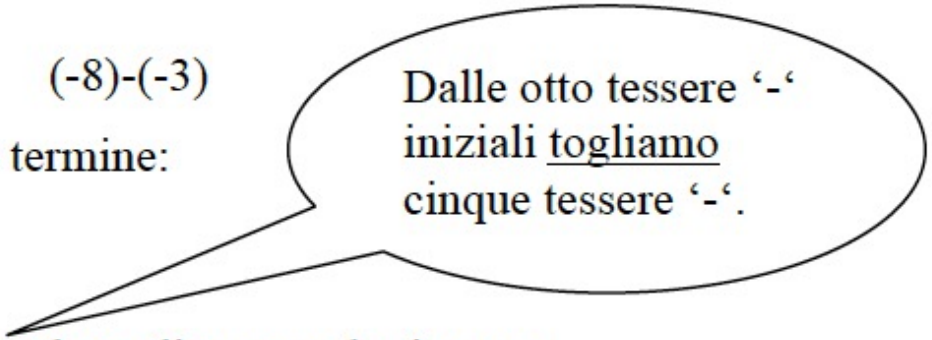
6.5.2. Togliere negativo da negativo (valore assoluto del primo numero **maggiore** del secondo)

L'insegnante propone la scrittura:

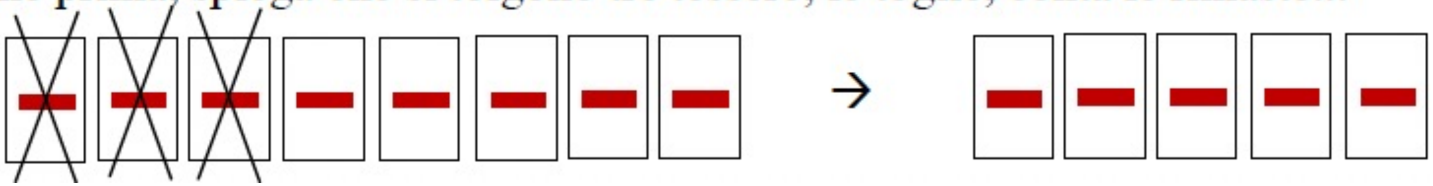
(-8)-(-3)

L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:





Come prima, spiega che si tolgono tre tessere; le toglie, conta le rimaste...

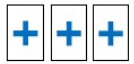


6.5.3. Togliere positivo da positivo (valore assoluto del primo numero **minore** del secondo)

L'insegnante propone la scrittura:

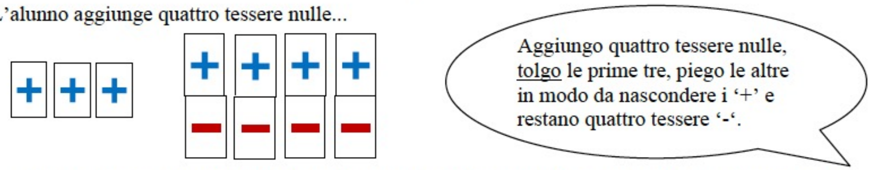
(+3)-(+7)

L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:

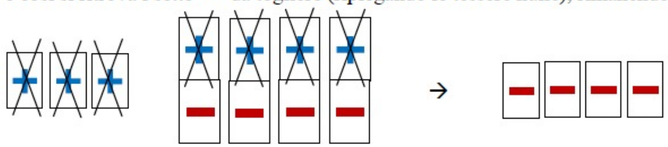


☞ *Di fronte alle probabili incertezze della classe* ("Non si possono togliere sette tessere '+' da tre '+'" *si riprende la conclusione del lavoro con le tessere nulle: "Un numero qualsiasi può essere composto dal relativo numero di tessere e da un qualsiasi numero di tessere nulle".*

L'alunno aggiunge quattro tessere nulle...



... e così si ritrova i sette '+' da togliere (ripiegando le tessere nulle), rimanendo con soli quattro '-':



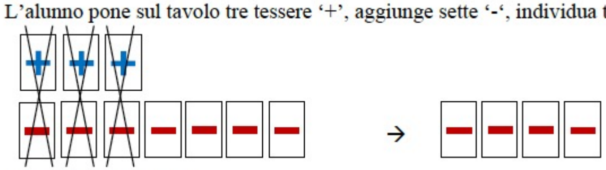
Completa la scrittura iniziale:

(+3)-(+7)=-4

La conclusione ha un sapore 'magico': da due numeri positivi si ottiene un numero negativo!
L'insegnante propone allora una nuova situazione simile a quella iniziale (e già incontrata in **6.5.3.**):

(+3)+(-7)

L'alunno pone sul tavolo tre tessere '+', aggiunge sette '-', individua tre coppie-zero e le toglie:

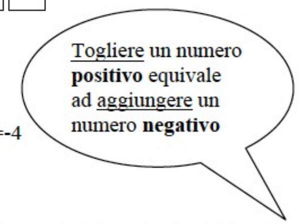


Trascrive per Brioshi:

(+3)+(-7)=-4

A questo punto si pongono a confronto le due scritture:

(+3)-(+7)=-4 (+3)+(-7)=-4



La discussione collettiva porta all'inattesa conclusione:

(+3)-(+7)=(+3)+(-7)

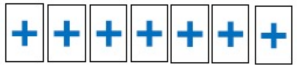
che viene verbalizzata in una forma di questo tipo (si può 'azzardare' una definizione generale):

6.5.4. <u>Togliere negativo da positivo (valore assoluto del primo numero **maggiore** del secondo)</u>

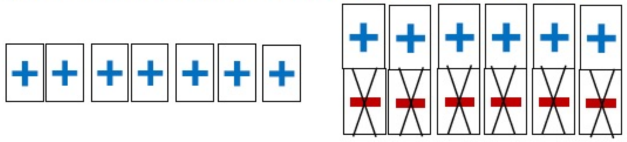
L'insegnante propone la scrittura:

(+7)-(-6)

L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:

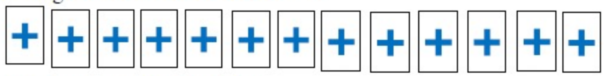


Non può togliere sei tessere '-' da sette tessere '+'. Aggiunge quindi sei tessere nulle e – argomentando - le ripiega in modo da nascondere le parti negative:



Devo aggiungere sei tessere nulle, le piego in modo da nascondere i '-' (è come se li <u>togliessi</u>) e restano tredici tessere '+'.

Rimangono sul tavolo 13 tessere '+':



Completa la scrittura iniziale:

(+7)-(-6)=+13

L'insegnante propone un'altra scrittura (v. **6.5.1.**):

(+7)<u>+(+</u>6)

L'alunno (presumibilmente in modo veloce) pone sul tavolo sette tessere '+', un po' più a destra altre sei tessere '+' e conta nuovamente 13 tessere:

Trascrive per Brioshi:

(+7)+(+6)=+13

A questo punto si pongono a confronto le due scritture:

(+7)-(-6)=+13 (+7)+(+6)=+13

La discussione collettiva porta alla conclusione:

(+7)-(-6)=(+7)+(+6)

che viene verbalizzata in una forma generale:

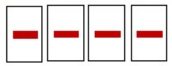
<u>Togliere</u> un numero **negativo** equivale ad <u>aggiungere</u> un numero **positivo**

6.5.5. <u>Togliere negativo da negativo (valore assoluto del primo numero **minore** del secondo)</u>

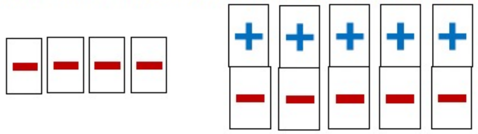
L'insegnante propone la scrittura:

(-4)-(-9)

L'alunno rappresenta con le tessere il primo termine:

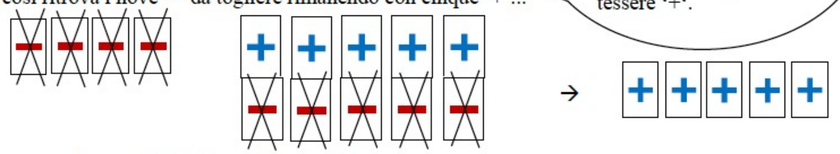


Come prima, non può togliere nove tessere '-' da quattro tessere '-'. Ne può togliere solo quattro. Gliene servono altre cinque, e quindi aggiunge cinque tessere nulle...



Aggiungo cinque tessere nulle, tolgo i quattro '-', le piego in modo da nascondere i '-' e restano cinque tessere '+'.

e così ritrova i nove '-' da togliere rimanendo con cinque '+'...



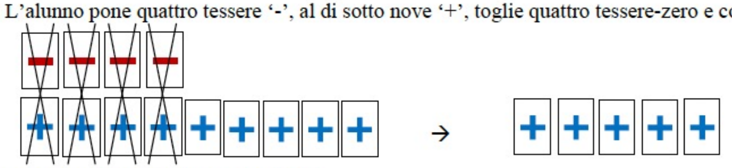
... e completa per Brioshi la scrittura iniziale:

(-4)-(-9)=+5

La conclusione stupisce ancora una volta: da due numeri negativi si ottiene un numero positivo!
L'insegnante propone un'altra scrittura (v. **6.5.3.**):

(-4)+(+9)

L'alunno pone quattro tessere '-', al di sotto nove '+', toglie quattro tessere-zero e conta le restanti:



Trascrive la conclusione per Brioshi:

(-4)+(+9)=+5

Anche in questo caso si pongono a confronto le due scritture:

(-4)-(-9)=+5 (-4)+(+9)=+5

La discussione collettiva porta alla conclusione:

(-4)-(-9)=(-4)+(+9)

Si trova la conferma di una 'regola' già espressa in forma generale (v. **6.6.4.**):

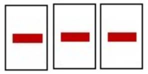
<u>Togliere</u> un numero **negativo** equivale ad aggiungere un numero **positivo.**

6.5.6. Togliere positivo da negativo (valore assoluto del primo numero **minore** del secondo)

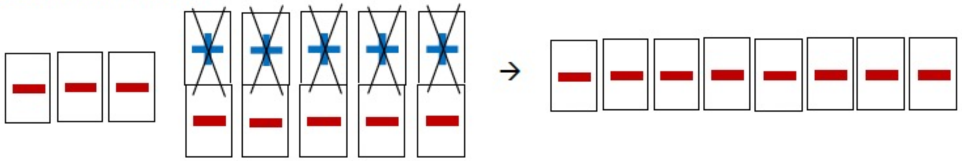
L'insegnante propone la scrittura:

(-3)-(+5)

L'alunno rappresenta il primo fattore:



Per poter disporre di cinque tessere '+' pone accanto ad esse cinque tessere nulle, ripiega le parti '+' e conta le rimanenti:



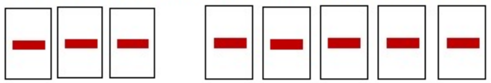
Trascrive in linguaggio matematico:

(-3)-(+5)=-8

Anche in questo caso si propone la situazione iniziale modificata:

(-3)+(-5)=-8

L'alunno ricostruisce la situazione (più semplice della precedente) con le carte:



e trascrive il processo in linguaggio matematico:

(-3)+(-5)=-8

Confronta le scritture:

(-3)-(+5)=-8 (-3)+(-5)=-8

e ricava ancora una volta la conclusione:

(-3)-(+5)=(-3)+(-5)

Si formula collettivamente la 'regola':

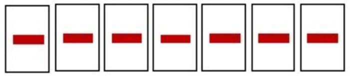
Togliere un numero **positivo** equivale
ad aggiungere un numero **negativo**.

6.5.7. Togliere positivo da negativo (valore assoluto del primo numero **maggiore** del secondo)

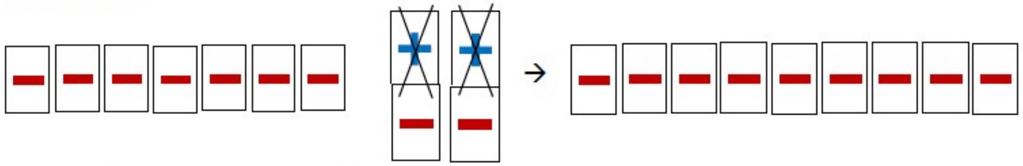
L'insegnante propone la scrittura:

(-7)-(+2)

L'alunno rappresenta il primo fattore:



Per poter disporre di due tessere '+' pone accanto ad esse due tessere nulle, ripiega le parti '-' e conta le rimanenti:



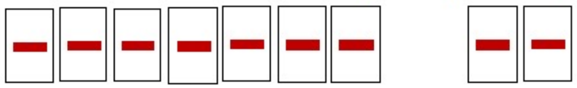
Trascrive in linguaggio matematico:

(-7)-(+2)=-9

Si propone la situazione iniziale modificata:

(-7)+(-2)

L'alunno ricostruisce la situazione (più semplice della precedente) con le carte:



e trascrive il processo in linguaggio matematico:

(-7)+(-2)=-9

Confronta le scritture:

(-7)-(+2)=-9 (-7)+(-2)=-9

e ricava ancora una volta la conclusione:

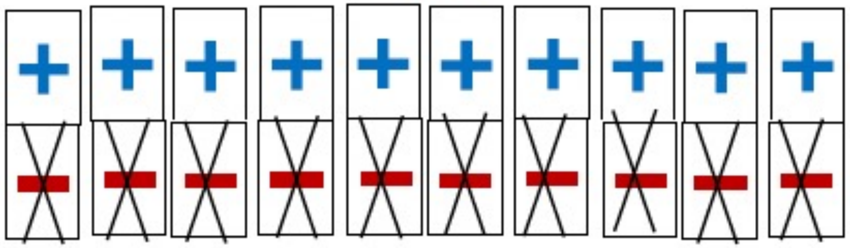
(-7)-(+2)=(-7)+(-2)

Si trova la conferma di una 'regola' già espressa in forma generale (v. **6.6.6.**):

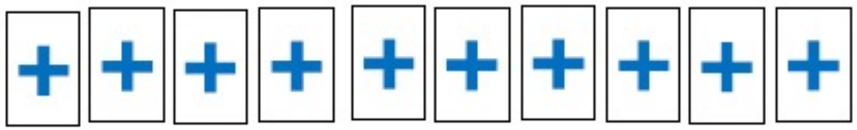
Togliere un numero **positivo** equivale
ad aggiungere un numero **negativo**.

6.5.8. Togliere un numero (positivo o negativo) dallo zero

0-(-10)



↓



0-(-10)=+10

Si pone facilmente in evidenza cosa succede se si tolgono (cioè si piegano) i dieci '+' dalle tessere nulle:

0-(+10)=-10

Detachment From the Minus Sign

Linchevski and Livneh (1999) attributed the DFMS error to a misunderstanding relating to a lack of 'structure sense'. They defined structure sense as being able to identify all the equivalent forms of an expression and "the ability to discriminate between the forms relevant to the task—generally one or two forms—and all the others" (p. 175). In the example of the operation $237+89-89+67-92+92$, this consists of considering $237+89-89+67$ or $237+67$ as equivalent forms relevant to the task, whereas $237+89-89+67-184$ should not be recognised as an equivalent form.

A lack of structure sense

The lack of structure sense referred to by Linchevski and Livneh (1999) is not unrelated to the restrictive understanding of subtraction as 'taking away', which is often observed in students (Selter et al., 2012). In this view, numbers represent 'unsigned' concrete quantities on which operations are performed in order to find the answer. Selter et al. (2012) believe that this computational view is too one-sided and probably leads to restricted mathematical thinking.

A restrictive understanding of subtraction

Vlassis, J., Demonty, I. The role of algebraic thinking in dealing with negative numbers. *ZDM Mathematics Education* **54**, 1243–1255 (2022).

In relational thinking, detecting the structure of an expression means ‘seeing’ the expression holistically. In a numerical expression such as 237 + 89 − 89 + 67 − 92 + 92, for example, this would involve ‘seeing’ the expression as follows:

$$\boxed{\boxed{237}\ \boxed{+\,89}\ \boxed{-89}\ \boxed{+\,67}\ \boxed{-92}\ \boxed{+\,92}}$$

This holistic view requires the expression to be considered as a sum of signed components separated by an implicit plus sign.

This view is essential in algebra, for example when it is necessary to reduce polynomial expressions. It is not necessary in numerical operations, since it is always possible to proceed computationally, step by step, to find the answer. However, it is very useful for carrying out operations efficiently

The minus sign has to be treated as attached to the number that follows it

ARITHMETIC THINKING

OPERATIONAL VALUE – external to the number (semiotic aspect)

In mathematics everything related to signs, symbols and relations between symbols is called semiotic. Semiotic includes all signs that are visual and verbal.

ONTOLOGICAL VALUE – part of the number (semantic aspect)

ALGEBRAIC THINKING

In mathematics , this is strictly related to the mathematical objects' meaning.

Table 1 Exploring the three meanings of the minus sign will allow students to differentiate among them.

Problem	Meaning of the Minus Sign
1. 5 – 8 = □	Subtraction as a binary operation
2. □ + 5 = –2	A symbolic representation for a negative number
3. Which is larger, – –4 or –4?	The *opposite of*, a unary operation

CURRICULUM INSIGHT

Lisa L. Lamb, Jessica Pierson Bishop, Randolph A. Philipp, Bonnie P. Schappelle, Ian Whitacre, & Mindy Lewis. (2012). Developing Symbol Sense for the Minus Sign. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(1), 5–9.

Tools for creating materials

https://digipad.app/

https://www.educaplay.com/types-of-activities/