



Algebra Lineare

[CD 2024 - 0141N - GEOMETRIA]



Sessione 1: Le strutture algebriche



Cominciamo a costruire le strutture algebriche che ci servono da zero.

Q: Di quali ingredienti abbiamo bisogno per cominciare?

R: Cominciamo con un INSIEME S e una OPERAZIONE $\star$ su S

$$S := \{ a, b, c, \dots \}$$

ELEMENTI

PUO' ESSERE UN INSIEME
FINITO oppure INFINITO

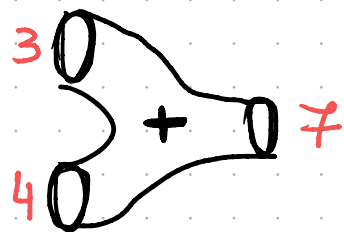
$$\star : S \times S \longrightarrow S$$

↑
VUOL DIRE CHE
L'INPUT DI $\star$ SONO
DUE ELEMENTI di S

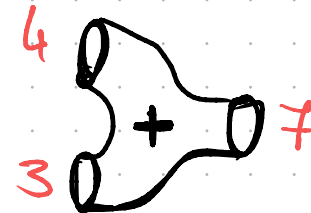
↑
si dice che
S è CHIUSO
RISPETTO A $\star$

Esempio: $S = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\star := +$ la somma.
NUMERI NATURALI

RAPPRESENTAZ.
GRAFICA
della
SOMMA:



Ma è anche vero
che:



In Matematica si scrive $\star((3,4)) = \star((4,3)) = 7$

In effetti è vero che $\star = +$ su $\mathbb{N}$ è un'operazione **COMMUTATIVA**:

cioè: $\star((a, b)) = \star((b, a))$

oppure, come siamo abituati a scrivere: $a \star b = b \star a$

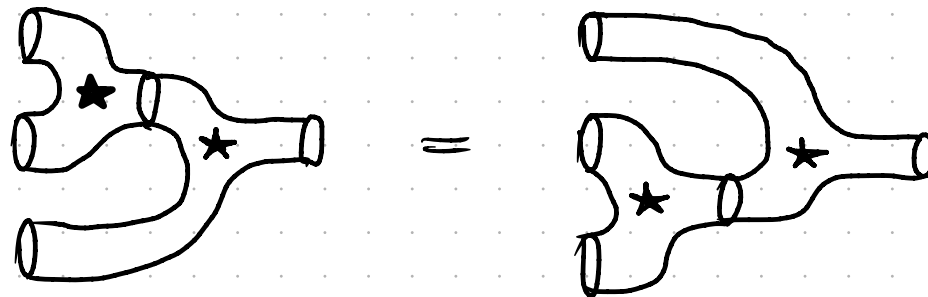
VERO PER LA SOMMA DEI
NUMERI NATURALI

È anche vero che la somma sui naturali è **ASSOCIATIVA**:

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$$

$$[\text{cioè: } 3 + (4 + 1) = (3 + 4) + 1]$$

Graficamente vuole dire:



RAPPRESENTAZIONE
della
ASSOCIATIVITÀ
per l'operazione
 $\star$

I numeri naturali hanno anche un ELEMENTO NEUTRO per $\star = +$,
ovvero un elemento tale che: $a \star \blacksquare = a = \blacksquare \star a$

$$[5 + 0 = 5 = 0 + 5]$$

Concludere: $(S = \mathbb{N}, \star = +)$ ha la proprietà commutativa, associativa,
un elemento neutro e $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto alla somma $+$

le somme di due
naturali è sempre
in naturale

Q: Abbiamo un elemento opposto?! Cioè $\forall$ elemento a , esiste
un elemento $\bar{a}$ tale che $a \star \bar{a} = \blacksquare = \bar{a} \star a$?

$$[5 + ? = 0 = ? + 5]$$

R: Non nei numeri Naturali $\mathbb{N}$! Abbiamo bisogno di più
numeri $\rightsquigarrow -1, -2, -3, -4 \rightsquigarrow \mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, \dots \}$

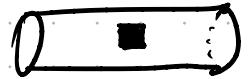


Questa è un principio universale in Matematica: quando una
proprietà che vorremmo non è soddisfatta si prova ad
estendere l'insieme su cui si lavora!

Esempio: $(S = \mathbb{Z}, * = +)$ ha tutte le proprietà che abbiamo visto prima, ma in aggiunta ha anche l'inverso.

$$\underset{+}{7} * \underset{+}{-7} = \underset{0}{\blacksquare} = -\underset{+}{7} * \underset{+}{7}$$

Graficamente:



Q: E se considerassimo un'altra operazione utile, che non è $* = +$, per esempio $* = \cdot$ [moltiplicazione]

A: Subito abbiamo a disposizione da studiare

$$(\mathbb{N}, \cdot) \quad \text{e} \quad (\mathbb{Z}, \cdot) !$$

Esercizio: Scrivere le proprietà che soddisfano e le proprietà che invece falliscono. E se togliamo lo zero è "meglio"?

Esempio: $(\mathbb{Z}, \cdot)$ NON HA "L'OPPOSTO PER LA MOLTIPLICAZIONE" [che si chiama elemento INVERSO], [ovviamente il neutro per $* = \cdot$ è $\blacksquare = 1$].

Q: Come si può risolvere questo problema?

A: Applicando il principio generale e aggiungiamo più numeri!

Quindi potremmo costruire

$$\tilde{\mathbb{Z}} := \left\{ n, -n, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n} \mid \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

è necessario togliere lo zero? perché?

$$\overline{\mathbb{Z}} := \left\{ n, \frac{1}{n} \mid \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

studiare che proprietà hanno. Sono chiusi rispetto al prodotto?

Q: E se ci mettessimo le somme anziché il prodotto, sopra questi insiemi, cosa andrebbe storto?

A: Per esempio $3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5} \notin \tilde{\mathbb{Z}}$ e $\frac{16}{5} \notin \overline{\mathbb{Z}}$

$$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \in \tilde{\mathbb{Z}} \quad \text{e} \quad \frac{3}{5} \notin \overline{\mathbb{Z}}$$

Concludere: aggiungere numeri NON BASTA, bisogna aggiungerli per BENE!

VOL DIRE CHE NON C'È LO ZERO

Esempio: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$
↑ FRAZIONI

Esercizio: elencare le proprietà che soddisfano e quelle che non soddisfano.

Q: Se abbiamo DUE OPERAZIONI sullo stesso INSIEME (o quasi), ci può essere una RELAZIONE tra le due?
 TOGLIAMO IL NEUTRO della PRIMA OPERAZIONE all'interno della SECONDA OPERAZIONE.

Esempio: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ vuol dire considerare insieme:

$(\mathbb{Q}, +)$ in relazione $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$
 con

In effetti $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ soddisfa la proprietà DISTRIBUTIVA:

$$a \heartsuit (b \star c) = (a \heartsuit b) \star (a \heartsuit c)$$

$$5 \cdot \left(\frac{3}{11} + \frac{1}{3} \right) = \left(5 \cdot \frac{3}{11} \right) + \left(5 \cdot \frac{1}{3} \right)$$

DISTRIBUTIVA
 del $\heartsuit$ rispetto
 alla $\star$ e non
viceversa

Q: Funziona anche per $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ e per $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$?

A: certo

Concludere: si può parlare di $(S, \star, \heartsuit)$.
 importante quale è la prima e quale le seconde operazioni