

Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

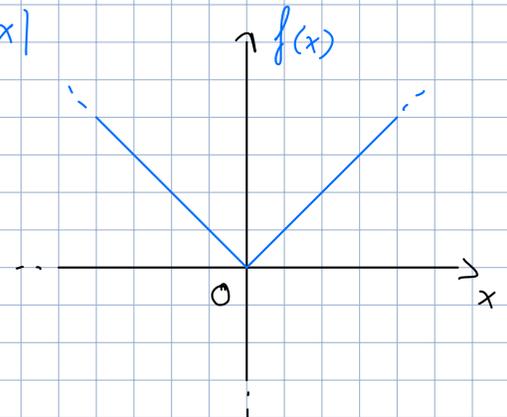
Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 2 - Richiami su valore assoluto e geometria nel piano - 01/10/2024

Valore assoluto

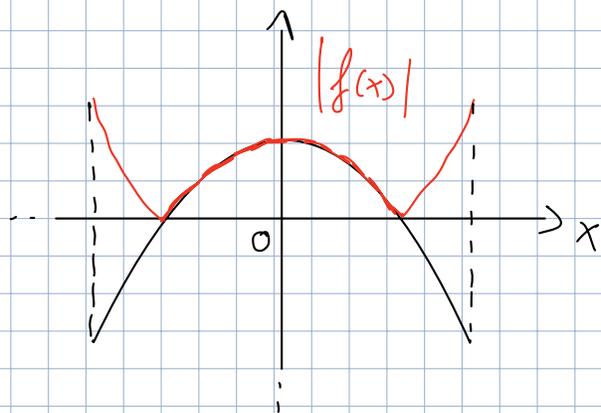
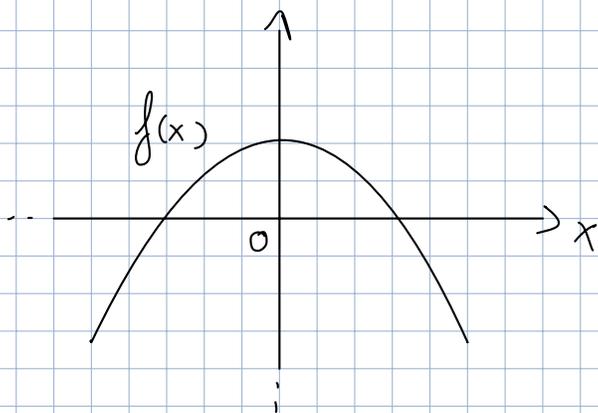
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Grafico della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = |x|$



Più in generale possiamo avere

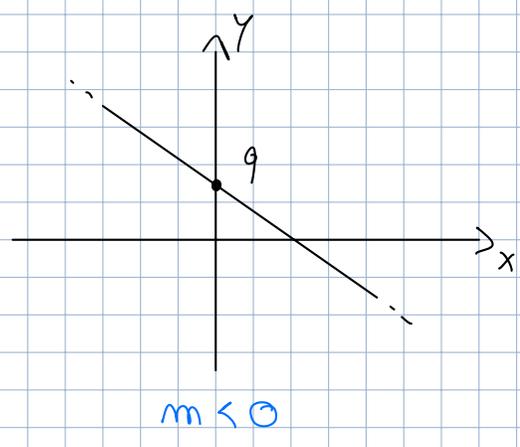
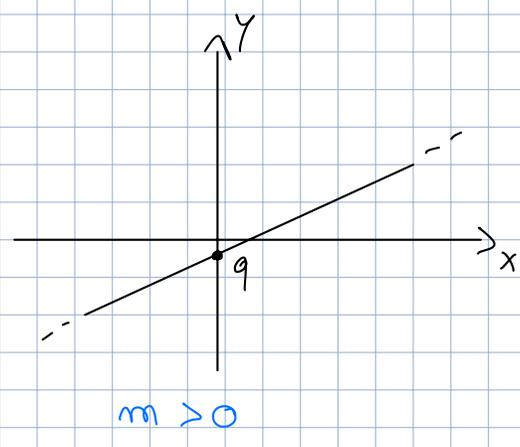
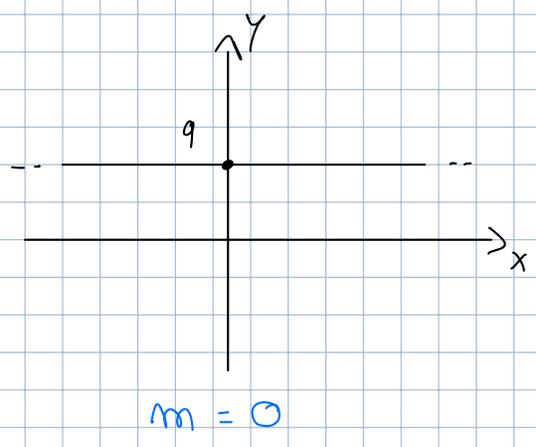
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$



Retta

$y = mx + q \rightarrow$ retta vista come insieme di punti nel piano

$f(x) = mx + q \rightarrow$ funzione lineare (il cui grafico è una retta)



- Intersezione con asse y : imponendo $x = 0$ abbiamo $y = q$.
- Intersezione con asse x : imponendo $y = 0$ abbiamo $x = -\frac{q}{m}$ (se $m \neq 0$).

Parabola

$y = ax^2 + bx + c \rightarrow$ parabola vista come insieme di punti nel piano

$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow$ funzione quadratica (il cui grafico è una parabola)

Richiediamo $a \neq 0$ altrimenti la parabola degenera in una retta

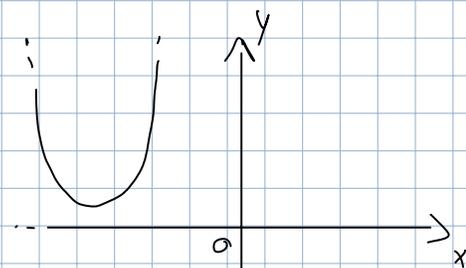
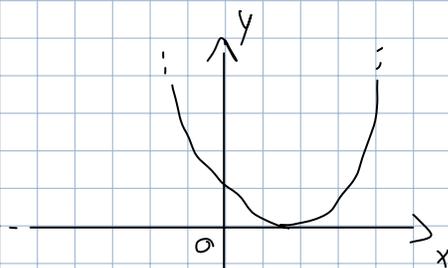
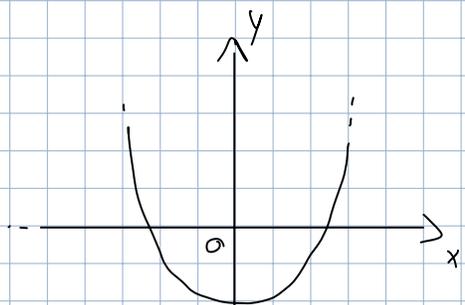
- Intersezione con asse y : imponendo $x = 0$ abbiamo $y = c$.
- Intersezione con asse x : imponendo $y = 0$ dobbiamo risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$. Definendo $\Delta = b^2 - 4ac$ abbiamo

i) 2 soluzioni distinte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ se $\Delta > 0$

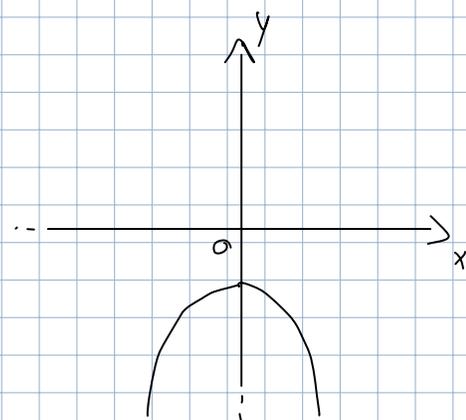
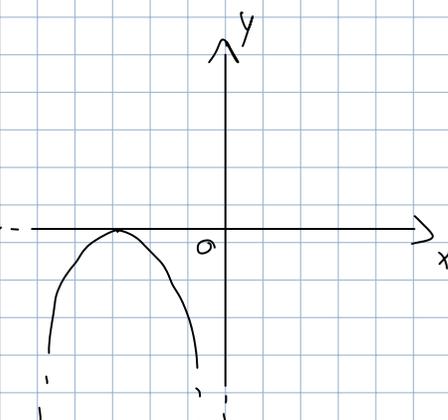
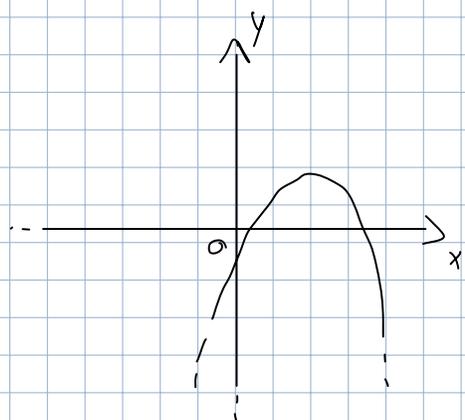
ii) 2 soluzioni coincidenti: $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ se $\Delta = 0$

iii) nessuna soluzione (reale!) se $\Delta < 0$.

$a > 0$



$a < 0$



$\Delta > 0$

$\Delta = 0$

$\Delta < 0$

Iperbole (1)

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(oppure $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ come sopra...)

come disegnarla? Basta identificare: (richiediamo $c \neq 0$, altrimenti l'iperbole degenererebbe in una retta)

• asintoto orizzontale: $y = \frac{a}{c}$ (sarà più chiaro con lo studio dei limiti...)

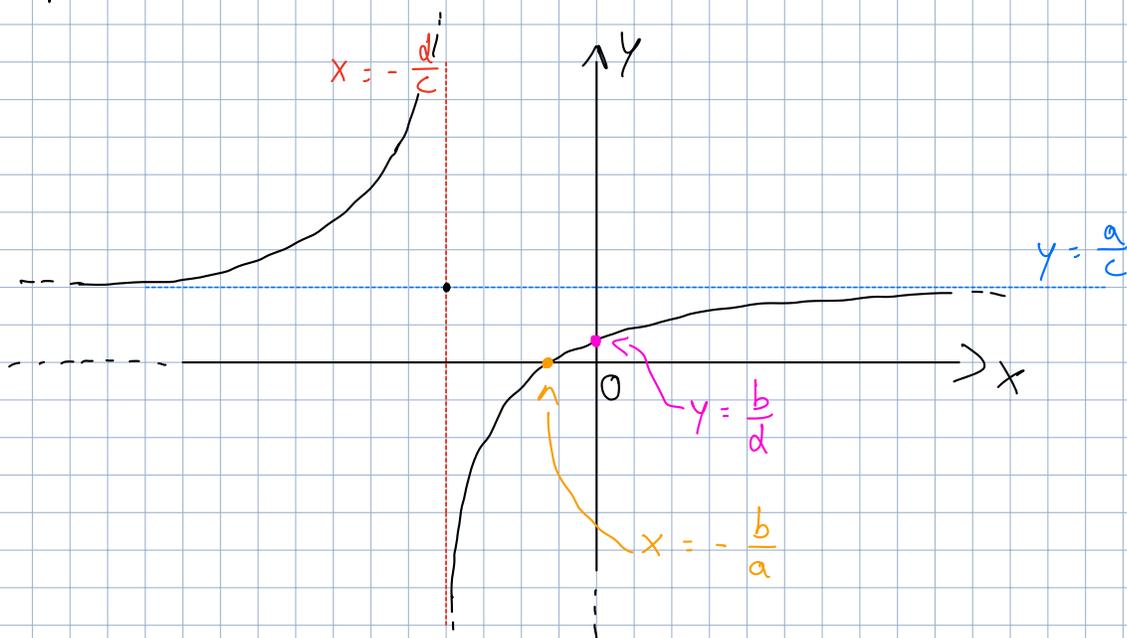
• asintoto verticale: $x = -\frac{d}{c}$ (dove si annulla il denominatore)

• intersezione asse y: imponendo $x = 0$ troviamo $y = \frac{b}{d}$ (se $d \neq 0$)

↳ o analogamente intersez. asse x: $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$)

→ fatto ciò disegniamo un ramo dell'iperbole (con l'intersezione asse) facendolo tendere agli asintoti e poi disegniamo l'altro simmetrico rispetto al punto $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$, ovvero il punto d'incontro tra gli asintoti.

Esempio con $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$



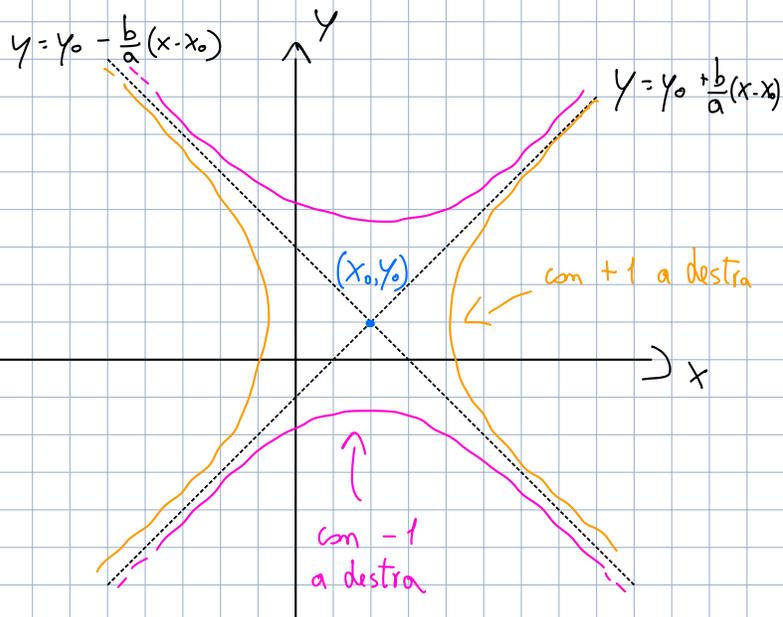
Iperbole (2)

Un'altra forma utile di un'iperbole (non direttamente riconducibile ad una funzione) è

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$

↳ iperbole centrata in (x_0, y_0) e con

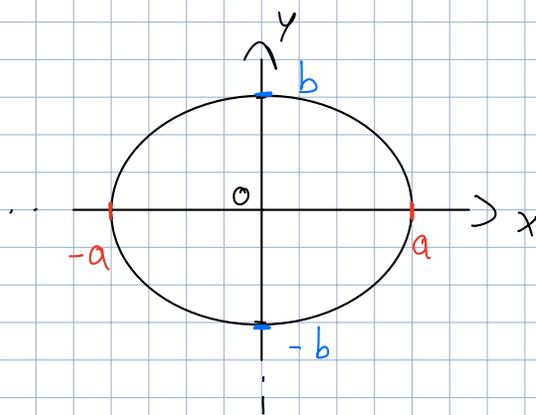
asintoti $y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$



Ellisse / circonferenza

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

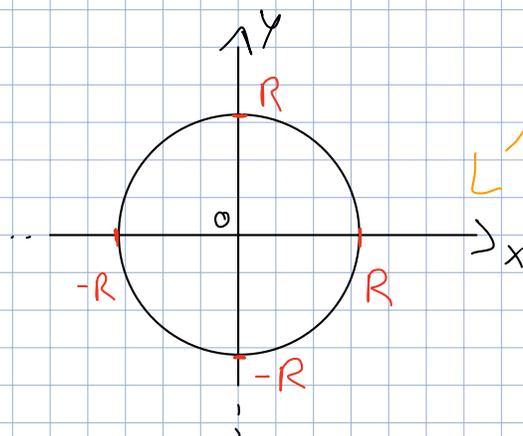
↳ ellisse di semiassi a e b
centrata in (x_0, y_0)



Se $a^2 = b^2 = R^2$ ricadiamo in una circonferenza di raggio R .

centro $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$



ESERCIZI

Es. 1

Tracciare il grafico della funzione $f(x) = |x^2 - 2x|$.

Es. 2

Tracciare il grafico delle funzioni

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad g(x) = -\sqrt{4-4x^2}, \quad h(x) = \sqrt{x^2-4}, \quad t(x) = \sqrt{x-4}$$

Es. 3

Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = ||x+1| - 1|$$

SOLUZIONI

Es. 1

La funzione è ben definita per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$. Dalla definizione di valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x^2 - 2x \geq 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{se } x^2 - 2x < 0 \end{cases}$$

Disegniamo le 2 parabole $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 2x$ e capiamo in che intervalli bisogna considerarle.

$$y = x^2 - 2x = x(x-2) \rightarrow \text{le intersezioni con asse } x \text{ sono } \underline{x=0} \text{ e } \underline{x=2}$$

dunque

$$x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

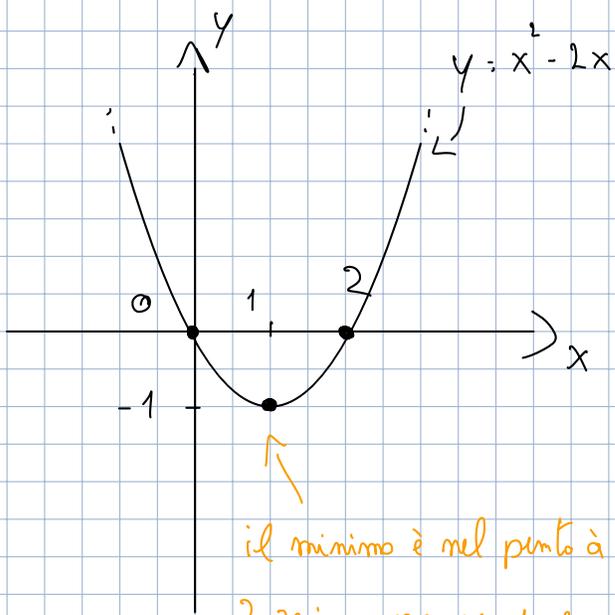
$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ oppure } x \leq 0$$

Dunque tornando a f

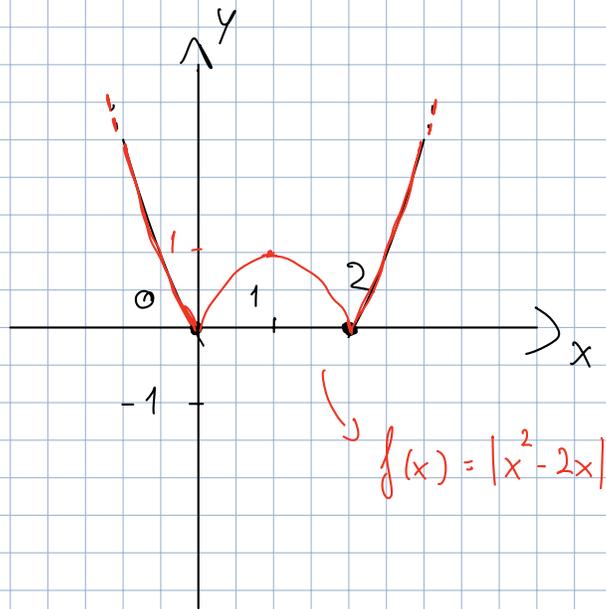
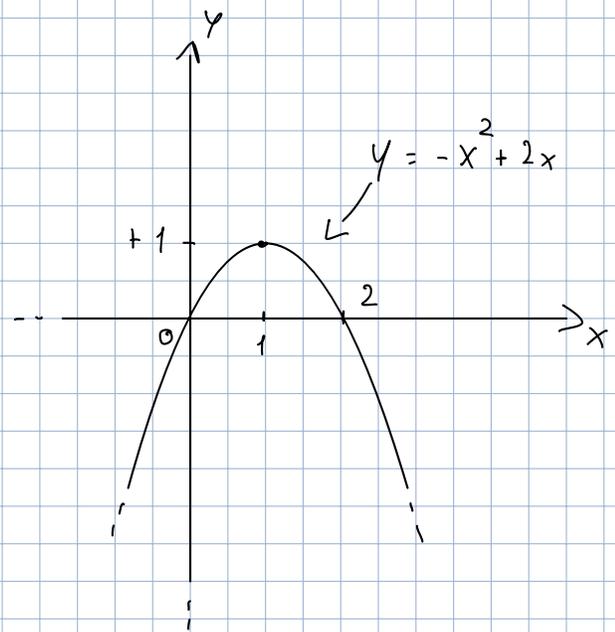
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x^2 - 2x \geq 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{se } x^2 - 2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Disegniamo le 2 parabole $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 2x$ e poi le mettiamo insieme nei giusti intervalli per disegnare f .

\hookrightarrow si annulla anch'essa in $x=0$ e $x=2$,
ma ha la concavità al contrario
rispetto la prima.



il minimo è nel punto a metà tra i
2 zeri, ovvero $x = 1$, e corrispondentemente
abbiamo $y = -1$.



N.B. (NOTA BENE)

Per risolvere l'esercizio basta tracciare il grafico della parabola $y = x^2 - 2x$ e poi "ribaltare" rispetto l'asse x le parti della parabola corrispondenti a ordinate negative.

Es. 2

Questo esercizio è pensato per riconoscere che il grafico di funzioni come quelle proposte è riconducibile a elementi noti della geometria piana. Per vederlo, basta elevare al quadrato ambo i membri e ricondursi alle espressioni note.

i) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

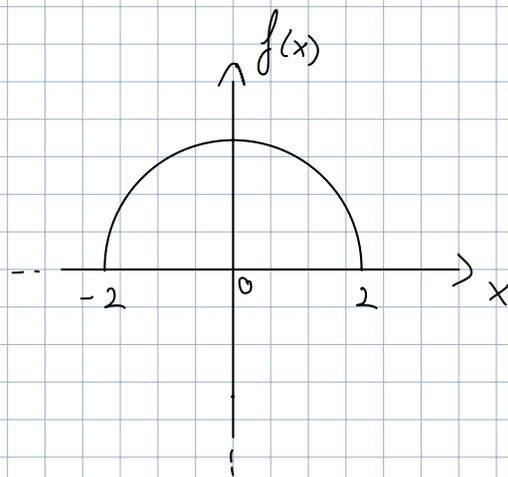
Il grafico è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ ovvero i punti del piano che soddisfano $y = \sqrt{4-x^2}$.

Domínio: $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow \underline{-2 \leq x \leq 2}$.

Notiamo anche che la radice di un numero reale è sempre positiva, dunque la funzione f assume valori positivi. Eleviamo al quadrato:

$$y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4-x^2 \Rightarrow \underline{x^2 + y^2 = 4}$$

↓
riconosciamo una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2



→ dunque il grafico di f è un arco di cerchio con valori di y positivi. *o, meglio, non negativi ($y \geq 0$)*

ii) $g(x) = -\sqrt{4-4x^2}$

Allo stesso modo del punto precedente, notiamo che il domínio è:

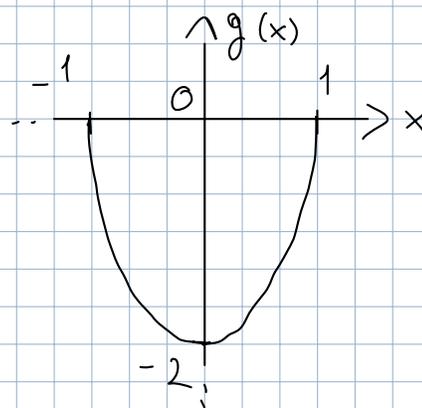
$$4-4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow \underline{-1 \leq x \leq +1}$$

ed elevando al quadrato otteniamo

$$y = -\sqrt{4-4x^2} \Rightarrow y^2 = 4-4x^2 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

→ riconosciamo un'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi $a=1$, $b=2$,

dunque il grafico di g è un arco di ellisse con valori di $y \leq 0$

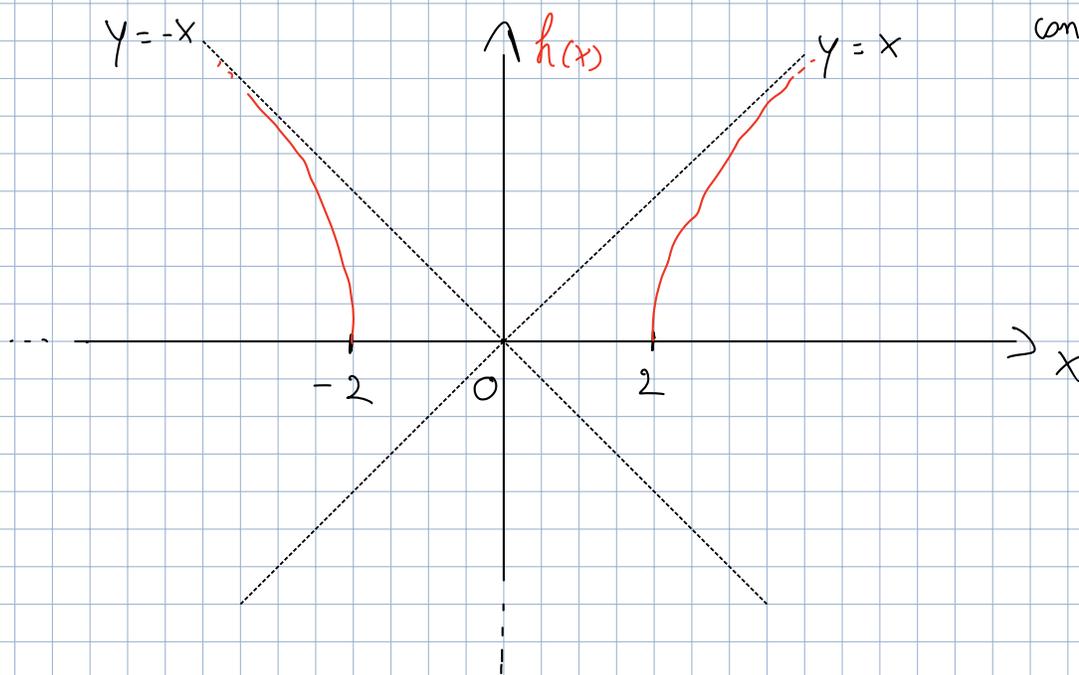


iii) $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Dominio: $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$

$$y = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow y^2 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

→ riconosciamo un'iperbole con centro $(0,0)$ e asintoti $y = \pm x$, di cui dobbiamo considerare i valori di $y \geq 0$.



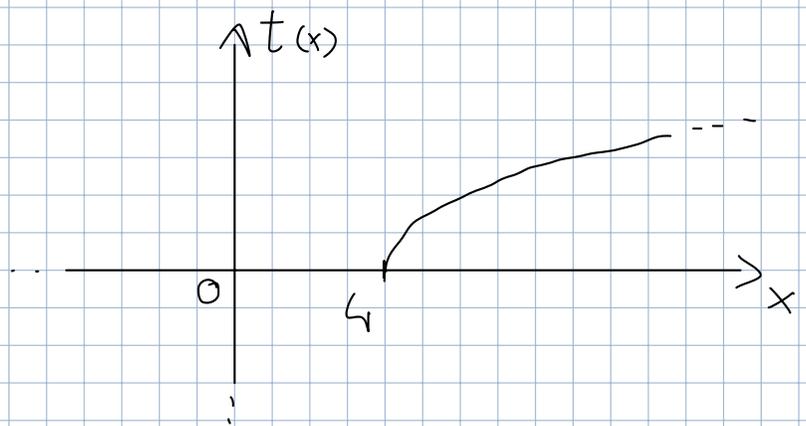
$$iv) t(x) = \sqrt{x-4}$$

$$\text{Dominio: } x-4 \geq 0 \Leftrightarrow \underline{x \geq 4}$$

$$y = \sqrt{x-4} \Rightarrow y^2 = x-4 \Rightarrow \underline{x = y^2 + 4}$$

↳ riconosciamo una parabola con x e y invertiti!

→ il grafico di t sarà dunque un ramo di parabola (con asse di simmetria parallelo all'asse x invece che all'asse y) con valori di $y \geq 0$.



Es. 3

$$i) f(x) = \left| |x+1| - 1 \right|$$

$$\left| |x+1| - 1 \right| = \begin{cases} |x+1| - 1 & \text{se } |x+1| - 1 \geq 0 \\ -|x+1| + 1 & \text{se } |x+1| - 1 < 0 \end{cases}$$

e inoltre

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -x-1 & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

Risolviamo le disequazioni per individuare per bene gli intervalli:

• $|x+1| - 1 \geq 0$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x+1-1 \geq 0 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -x-1-1 \geq 0 & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \text{se } x \geq -1 \quad (x \geq -1 \Rightarrow x \geq 0) \\ x \leq -2 & \text{se } x < -1 \quad (x < -1 \Rightarrow x \leq -2) \end{cases}$$

Dunque $|x+1| - 1 \geq 0$ per $x \leq -2 \vee x \geq 0$.

• Scriviamo allora

$$f(x) = \begin{cases} \textcircled{1} |x+1| - 1 & \text{se } \underline{x \leq -2 \vee x \geq 0} \\ \textcircled{2} -|x+1| + 1 & \text{se } \underline{-2 < x < 0} \end{cases}$$

ma ancora

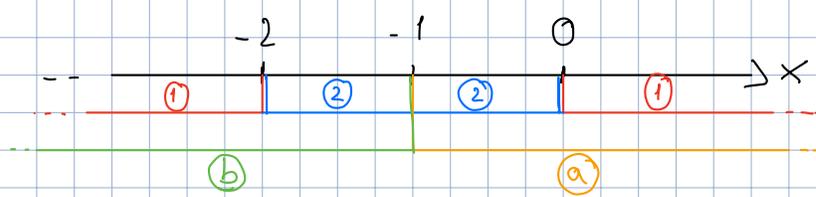
$$\textcircled{1} |x+1| - 1 = \begin{cases} \textcircled{1a} x & \text{se } \underline{x \geq -1} \\ \textcircled{1b} -x - 2 & \text{se } \underline{x < -1} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} |x+1| + 1 = \begin{cases} \textcircled{2a} -x & \text{se } \underline{x \geq -1} \\ \textcircled{2b} x + 2 & \text{se } \underline{x < -1} \end{cases}$$

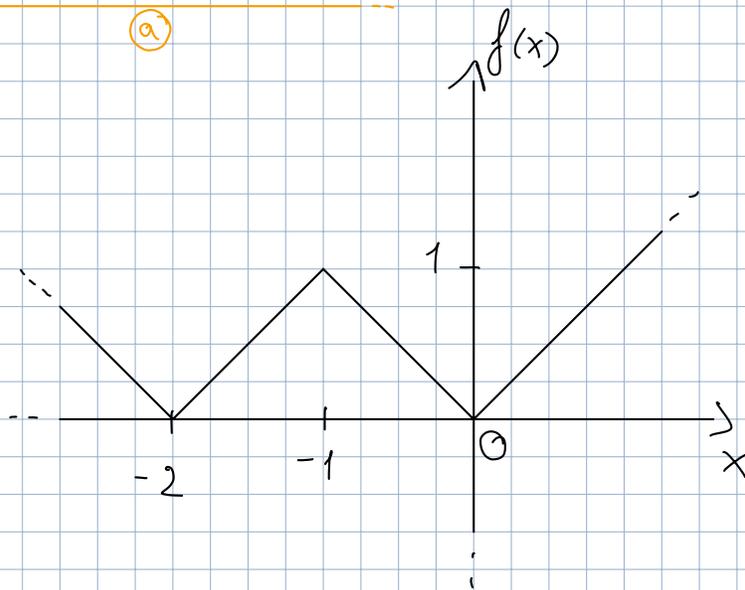
così che dobbiamo distinguere caso per caso tutti gli intervalli

$$(-\infty, -2), [-2, -1), [-1, 0), [0, +\infty)$$

e otteniamo \rightarrow

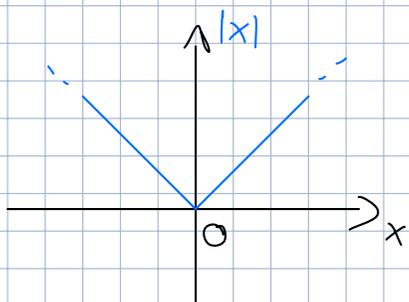


$$f(x) = \begin{cases} 1b & -x - 2 & \text{se } x < -2 \\ 2b & x + 2 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ 2a & -x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1a & x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

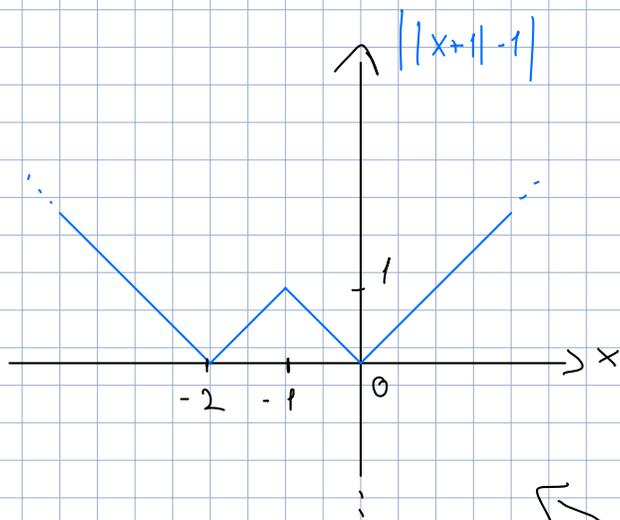
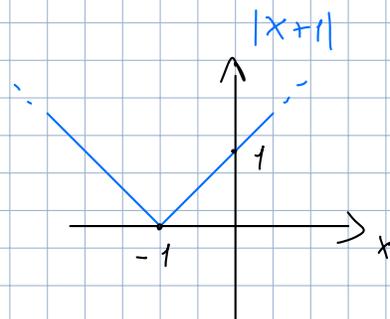


N.B.

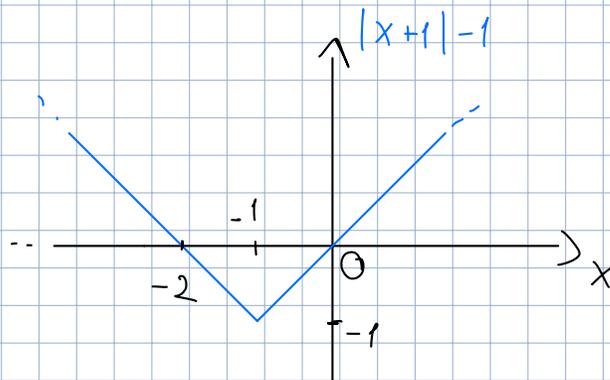
L'esercizio poteva essere risolto (più velocemente) per via grafica con traslazioni e ribaltamenti.



traslo di 1
a sinistra
 \rightarrow
(1)



(2)
traslo di 1 verso
il basso
 \downarrow



(3)
riballo rispetto
l'asse x la parte
negativa della funzione