

STATICA DEI FLUIDI

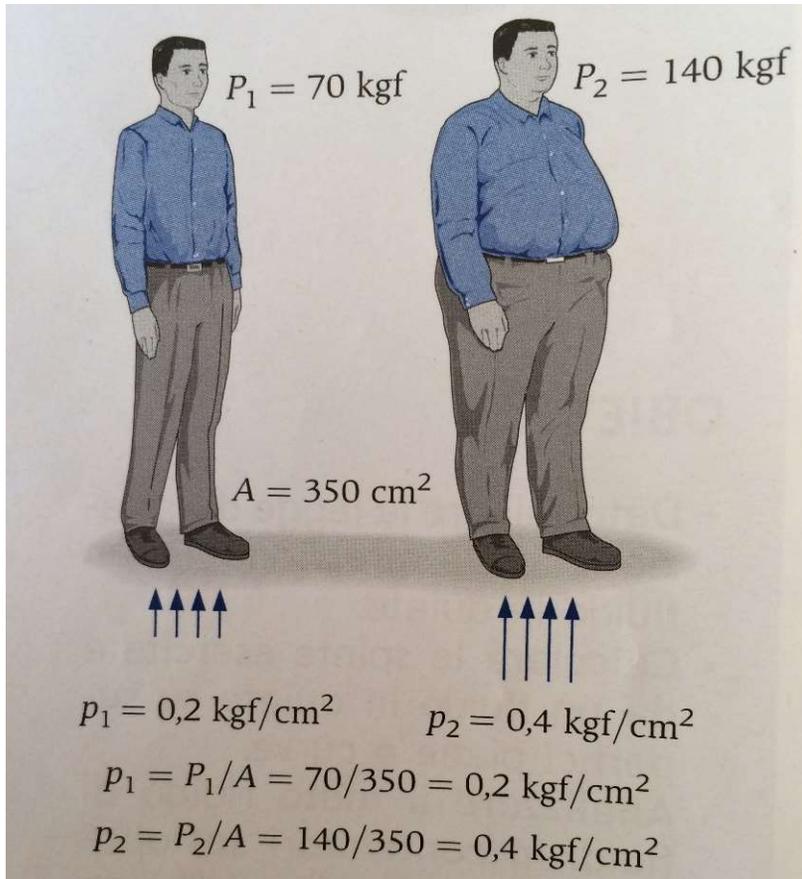
- ⇒ Isotropia dello stato di sforzo
- ⇒ Eq. indefinita della statica
- ⇒ Distribuzione idrostatica delle pressioni
- ⇒ Pressioni relative ed assolute – Piano dei carichi idrostatici
- ⇒ Misura della pressione
- ⇒ Spinta idrostatica su una superficie piane
- ⇒ Spinta idrostatica su una superficie gobbe
- ⇒ Equazione globale dell'equilibrio statico

N.B.: Questo indice NON è esaustivo e NON sostituisce il libro di testo

Alcune immagini sono prese dal libro di testo (Meccanica dei Fluidi, Y.A.Cengcek e J.M. Cimbala, Ed. It G. Cozzo e C. Santoro) per scopi didattici

La pressione nei fluidi in quiete

Pressione: forza per unità di superficie esercitata su un fluido, in direzione ortogonale alla superficie di applicazione



Si misura in $\text{Pa} = \text{N/m}^2$

Pascal unità molto piccola, quindi, nella pratica, si usano:

$\text{hPa} = 10^2 \text{Pa}$

$\text{bar} = 10^5 \text{Pa}$

La pressione atmosferica è pari a circa 1 bar

La pressione si considera positiva se esercita uno sforzo di compressione

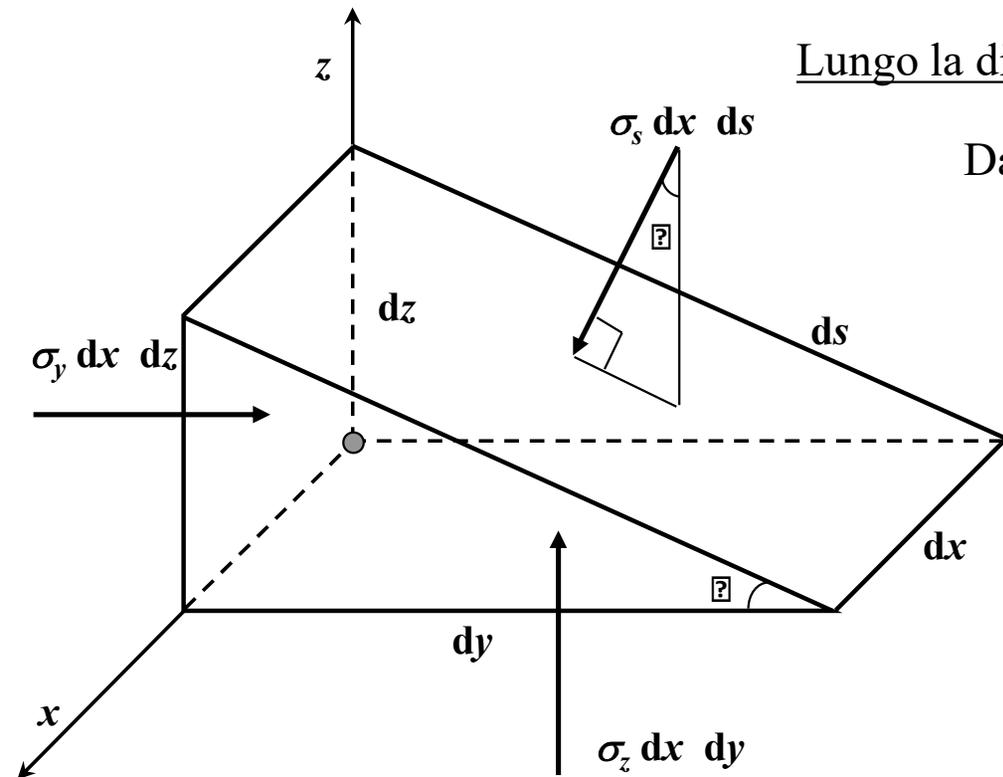
Isotropia degli sforzi nei fluidi in quiete

Non c'è moto relativo tra particelle adiacenti $\Rightarrow \tau \equiv 0$

$$\boxed{\sum \overline{F}_m + \sum \overline{F}_s = 0}$$

\Rightarrow forze di massa $\rho \overline{F} \frac{dy \, dx \, dz}{2}$

\Rightarrow l'equilibrio del volume in figura :



Lungo la direzione y $\sigma_y \, dx \, dz + \rho F_y \frac{dx dy dz}{2} = \sigma_s \, dx \, ds \sin \theta$

Dalla geometria: $dz = ds \sin \theta$

$$\boxed{\sigma_y + \rho F_y \frac{dy}{2} = \sigma_s}$$

Lungo la direzione z

$$\sigma_z \, dx \, dy + \rho F_z \frac{dx dy dz}{2} = \sigma_s \, dx \, ds \cos \theta$$

Dalla geometria: $dy = ds \cos \theta$

$$\boxed{\sigma_z + \rho F_z \frac{dz}{2} = \sigma_s}$$

$$\boxed{\sigma_y = \sigma_z = \sigma_s = p}$$

Lo stato di sforzo normale in un punto di un fluido in quiete è indipendente dalla direzione

Isotropia degli sforzi nei fluidi in quiete (Tetraedro di Cauchy)

$$\boxed{\sum \overline{F}_m + \sum \overline{F}_s = 0}$$

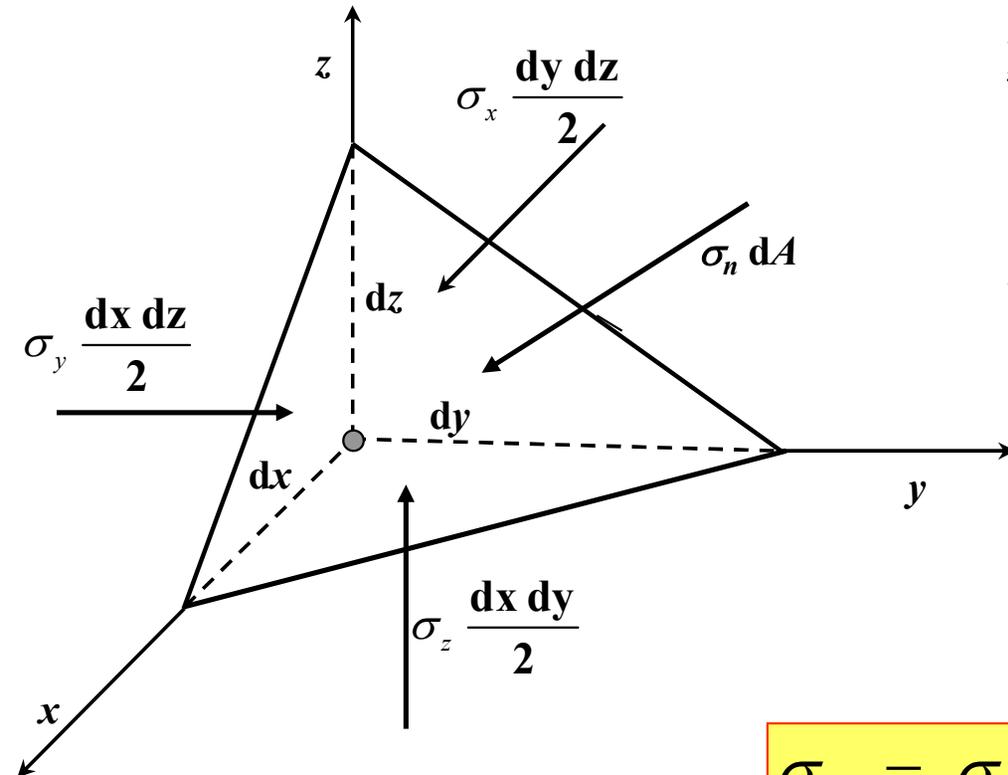
⇒ forze di massa $\rho \overline{F} \frac{dy \, dx \, dz}{2} \frac{1}{3}$

Equilibrio del volume in figura :

Lungo la direzione y $\sigma_y = \sigma_n$

Lungo la direzione x $\sigma_x = \sigma_n$

Lungo la direzione z $\sigma_z = \sigma_n$



$$\sigma_y = \sigma_z = \sigma_x = \sigma_n = p$$

Lo stato di sforzo normale in un punto di un fluido in quiete è indipendente dalla direzione

Per lo studio della meccanica dei sistemi continui abbiamo due tipi di approcci

locale \Rightarrow **Equazione indefinita** : relazione fra grandezze caratteristiche del moto o dell'equilibrio con valore puntuale

globale \Rightarrow **Equazione globale** : relazione fra grandezze riferite ad un volume finito

Eq. indefinita della statica dei fluidi

consideriamo un volumetto infinitesimo di fluido in quiete dove con ρ e p indichiamo densità e pressione

\Rightarrow forze di massa $\rho \bar{F} dy dx dz$

\Rightarrow forze di superficie

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx dy dz \bar{i}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} \cdot dx dy dz \bar{j}$$

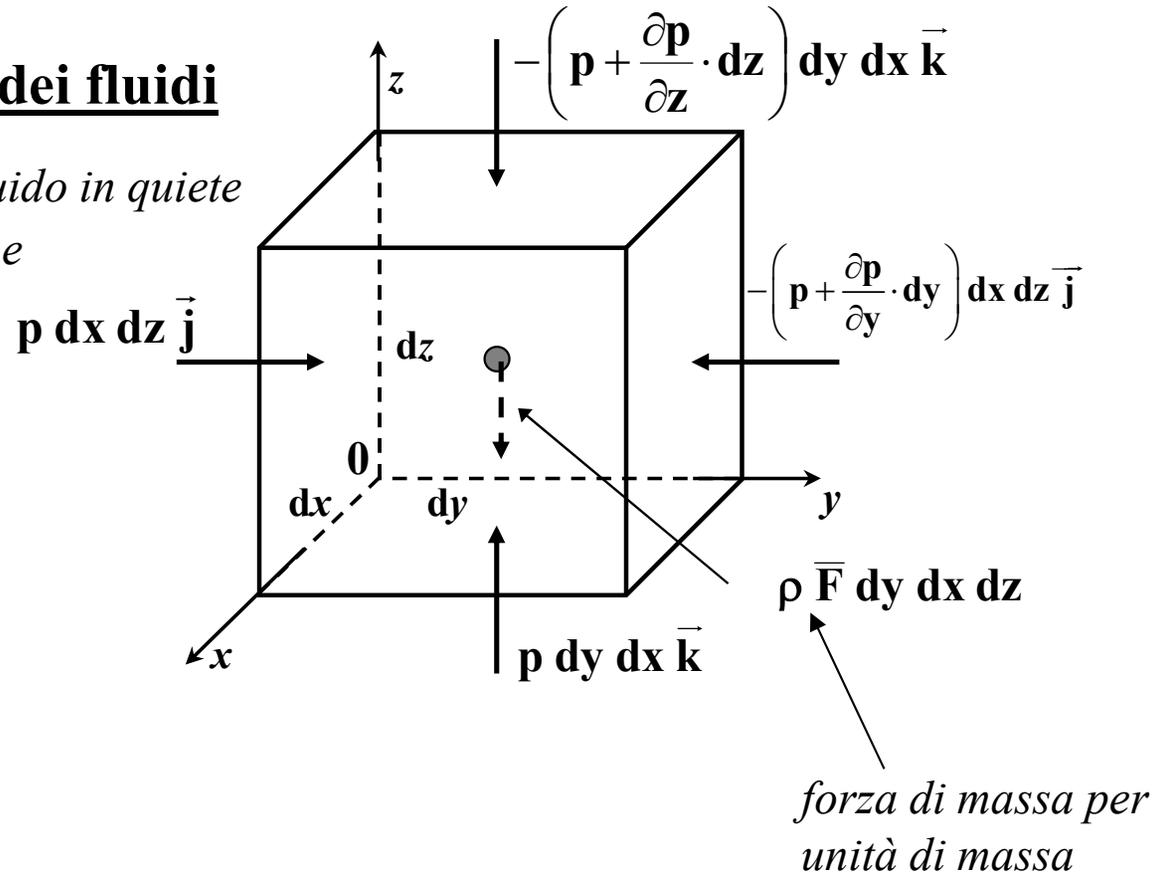
$$-\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dx dy dz \bar{k}$$

$$\boxed{\sum \bar{F}_m + \sum \bar{F}_s = 0}$$

$$\rho \bar{F} dx dy dz = + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot dx dy dz = + \text{grad}(p) \cdot dx dy dz$$

$$\boxed{\rho \bar{F} = \text{grad}(p)}$$

Equazione indefinita della statica dei fluidi:
La direzione lungo la quale varia la pressione è parallela₂
Alla risultante delle forze di massa applicate



$$\rho \bar{\mathbf{F}} = \text{grad}(p)$$

$\bar{\mathbf{F}} = \text{è una forza di massa per unità di massa} \Rightarrow \text{un'accelerazione}$

➤ *La legge di distribuzione delle pressioni nel fluido in quiete è determinata dalla soluzione del sistema:*

1. Equazione indefinita

$$\rho \bar{\mathbf{F}} = \text{grad}(p)$$

2. Equazione di stato

$$\rho = \rho(p, \text{temperatura})$$

3. Condizioni al contorno

Forniscono la soluzione particolare

FLUIDO PESANTE INCOMPRIMIBILE

$$\rho \bar{\mathbf{F}} = \text{grad}(p)$$

Fluido pesante $\bar{\mathbf{F}} = -g \vec{\mathbf{k}} = -g \text{grad } z$

Fluido incompressibile $\rho = \text{costante}$

$$\text{grad} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

$$z + p / \gamma = \text{costante}$$

LEGGE DI STEVIN

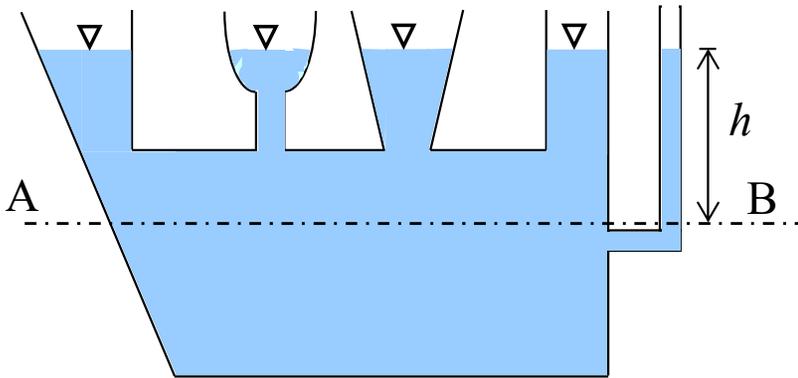
DEF.

$$z + p / \gamma = \text{quota piezometrica}$$

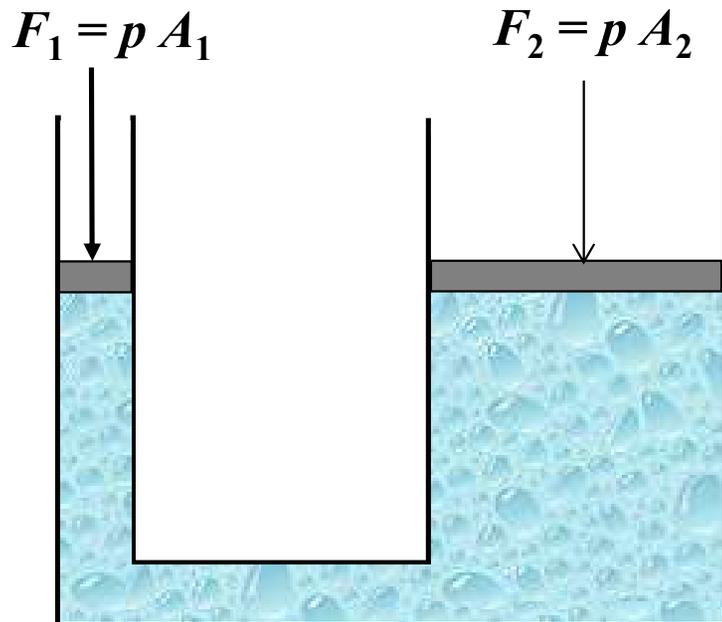
→ *altezza piezometrica*

→ *quota geodetica (rispetto ad un arbitrario piano di riferimento orizzontale)*

Conseguenze



La pressione in un punto non dipende dalla forma del recipiente che contiene il fluido



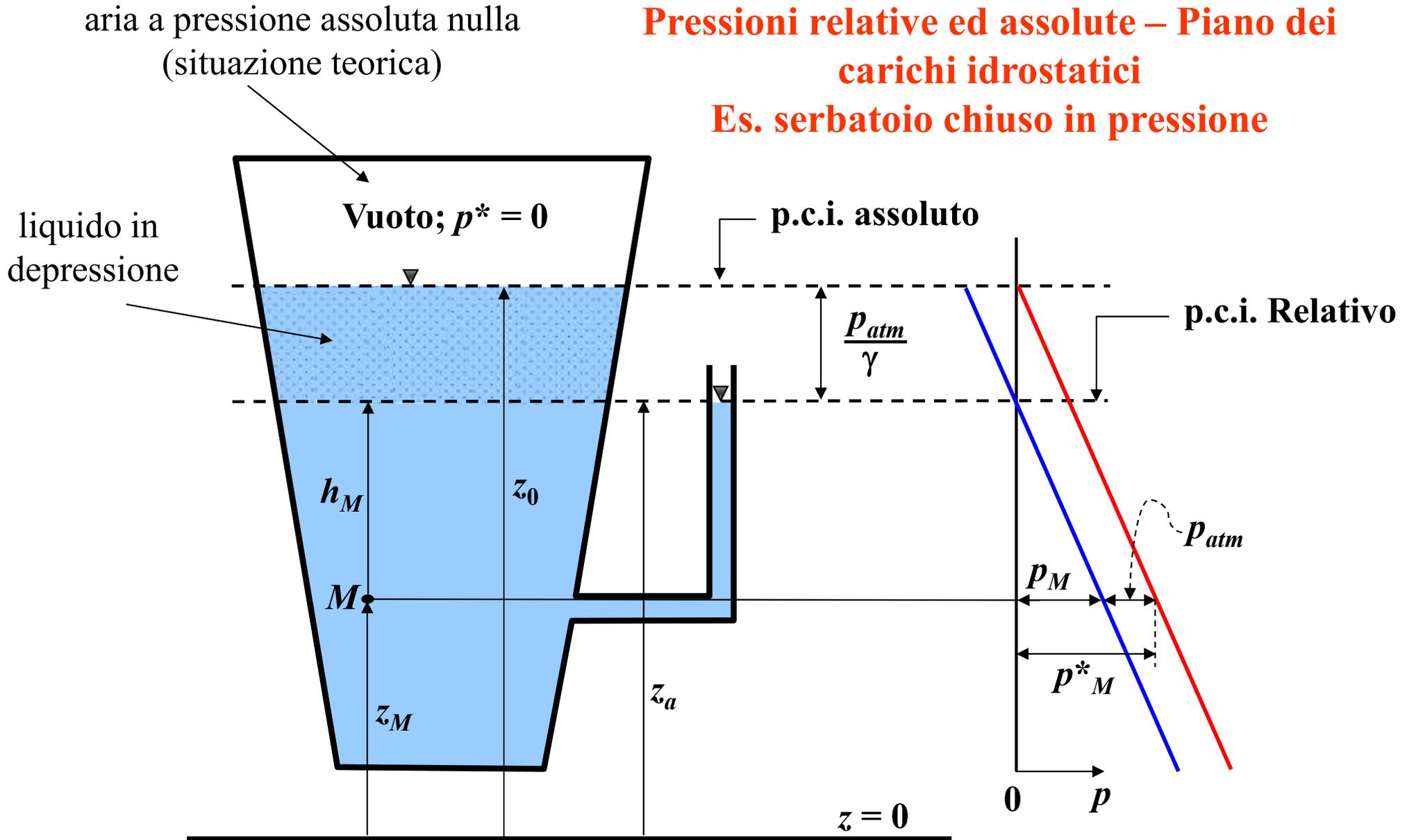
Trasmissione della pressione fluida.

Esercitando una forza piccola sul pistone di sinistra si ottiene una forza maggiore sul pistone di destra

Nota: il lavoro fatto dai due pistoni è lo stesso. Il pistone piccolo scorre di più di quello grande!

Pressioni relative ed assolute – Piano dei carichi idrostatici

Es. serbatoio chiuso in pressione

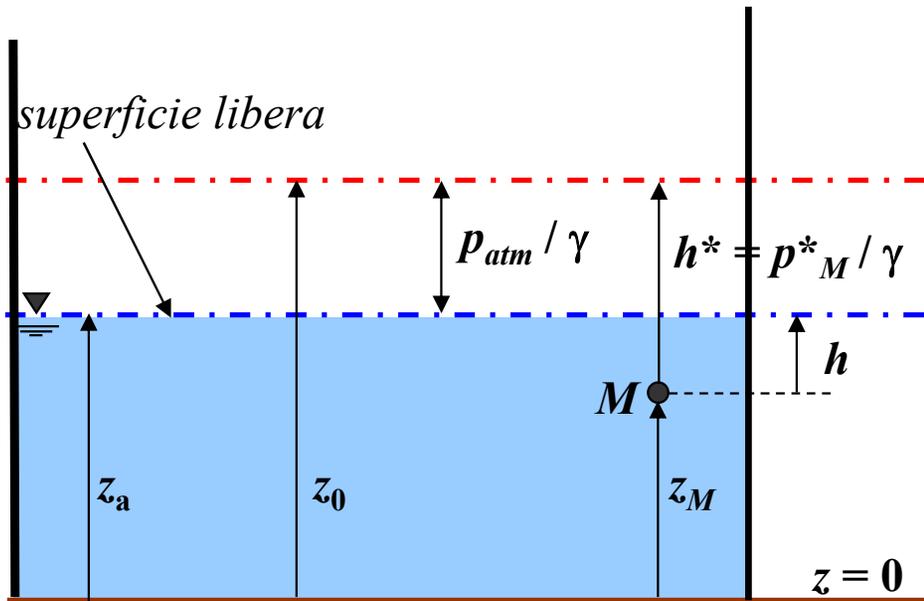


➤ $z + p / \gamma = \text{costante.}$

➤ $p_{\text{relativa}} + p_{\text{atmosferica}} = p_{\text{assoluta}} = p^* \longrightarrow$ la p_{relativa} può anche essere negativa;
la p_{assoluta} è solo positiva!

Pressioni relative ed assolute – Piano dei carichi idrostatici

Es. serbatoio aperto a pelo libero



p.c.i. Assoluto; $z^* = z_M + p^*_M / \gamma$

p.c.i. Relativo; $z_a = z_M + p_M / \gamma$

$$= z_M + (p^*_M - p_{atm}) / \gamma$$

Il p.c.i. è utile per trovare la p nei punti della massa fluida considerata

$$p_M = \gamma (z_a - z_M) = \gamma h$$

$$p^*_M = \gamma (z_0 - z_M) = \gamma h^*$$

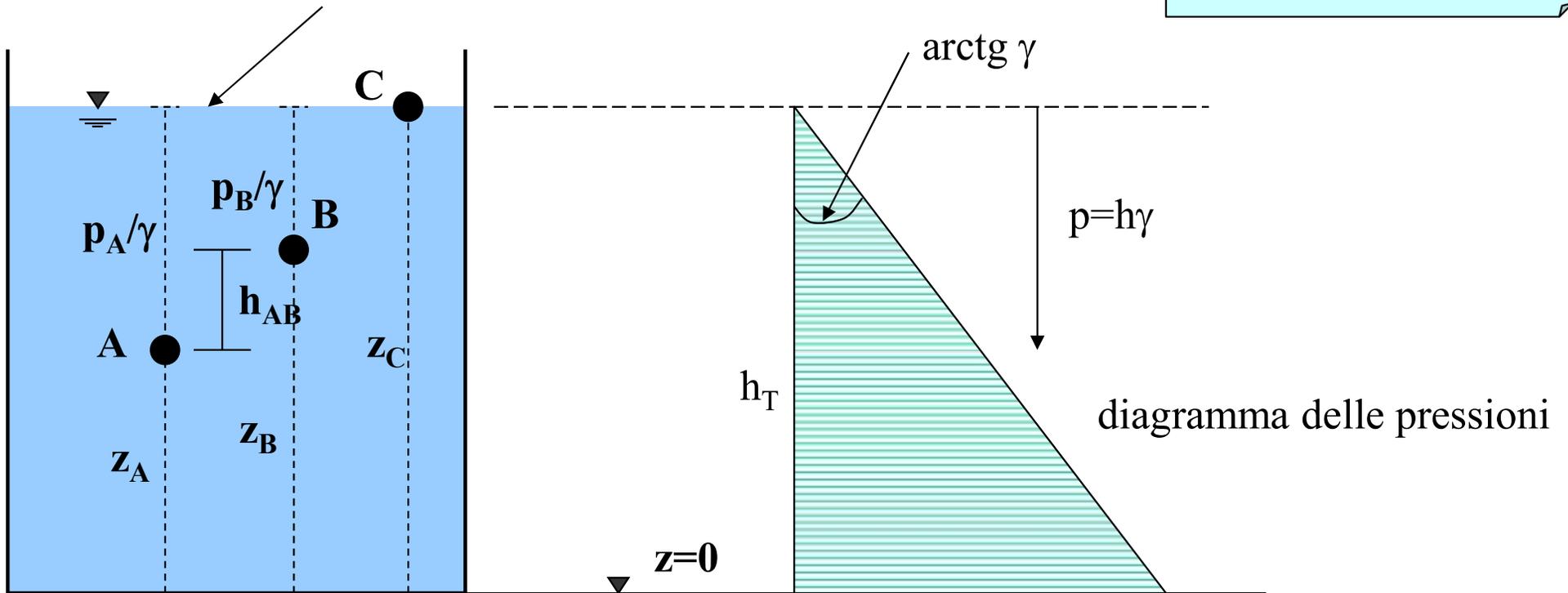
$p_{atm} / \gamma_{acqua} \approx 10.33 \text{ m}$ (altezza piezometrica della pressione atmosferica)

Distribuzione idrostatica delle pressioni

LEGGE DI STEVIN

$$z + p / \gamma = \text{costante}$$

superficie libera ; si assume come riferimento $p_{\text{atm}}=0$



$$z_A + p_A / \gamma = z_B + p_B / \gamma = z_C + p_C / \gamma = \text{cost.}$$

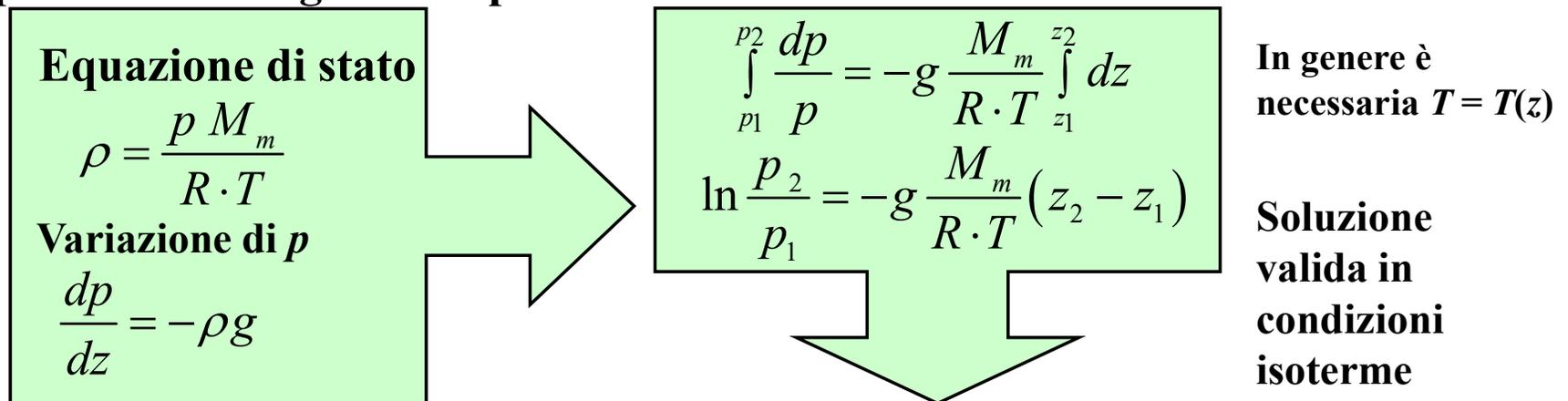
$$p_A = \gamma h_{AB} + p_B$$

Se $p = \text{costante}$ (superfici isobariche) $\Rightarrow z = \text{costante} \Rightarrow$

Le superfici isobariche sono dei piani orizzontali

FLUIDI COMPRIMIBILI

- ✓ Nei gas $\rho = \rho(p, \text{temperatura})$
- ✓ ρ dei gas più comuni \ll di ρ dei liquidi . Il gradiente verticale di pressione può essere molto piccolo e quindi la pressione si mantiene essenzialmente costante in un gas (ad esempio in serbatoi, tubazioni, ... dove le distanze coinvolte sono piccole)
- ✓ Quando le variazioni in quota sono sensibili si deve tener conto della comprimibilità del gas Esempio: **GAS PERFETTO**



P : pressione assoluta

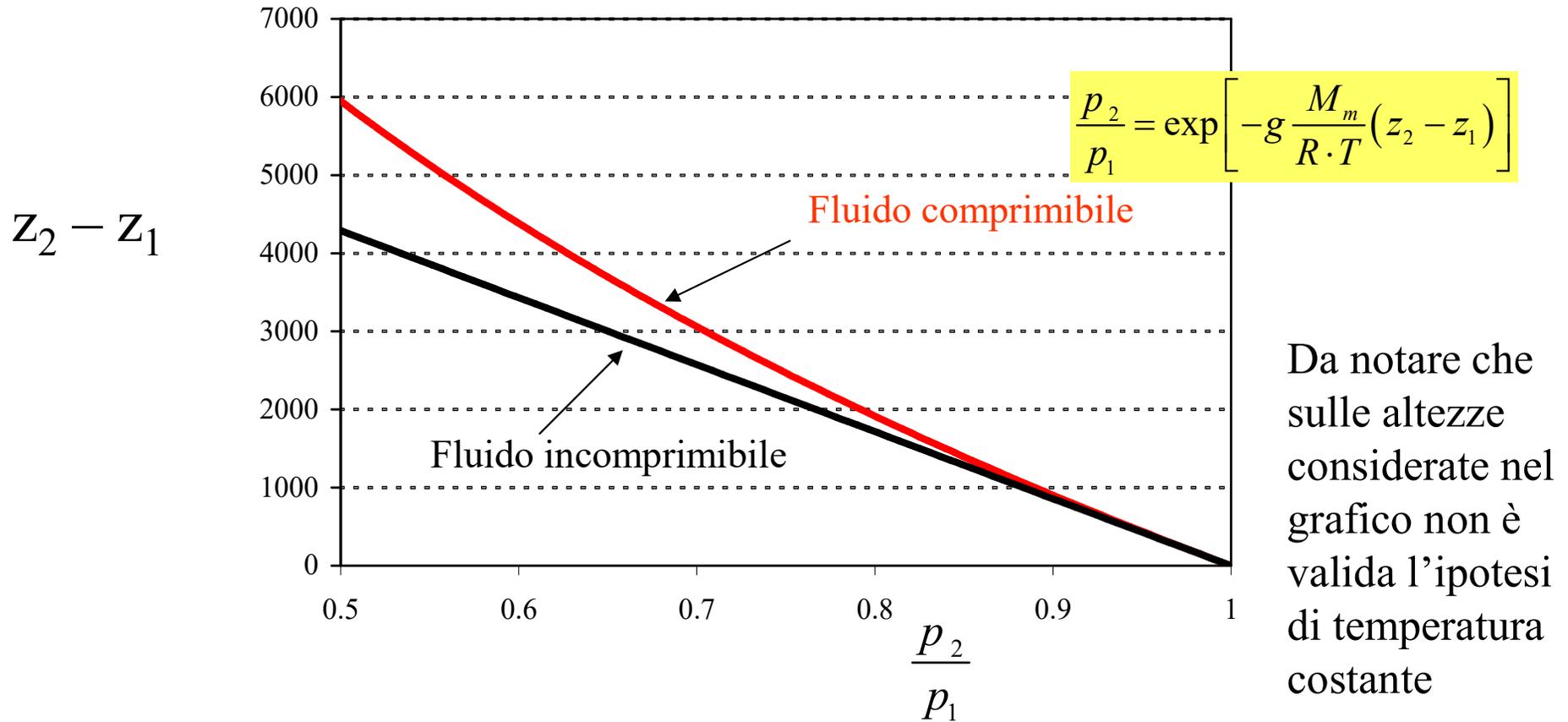
R : costante universale dei gas

M_m = Massa molare

T : temperatura assoluta

$$p_2 = p_1 \exp \left[-g \frac{M_m}{R \cdot T} (z_2 - z_1) \right]$$

L'ARIA E' COMPRIMIBILE?



R: 8.314472 J/(mol K)

M_m = 28.97 g/mol

T: 293.15 K

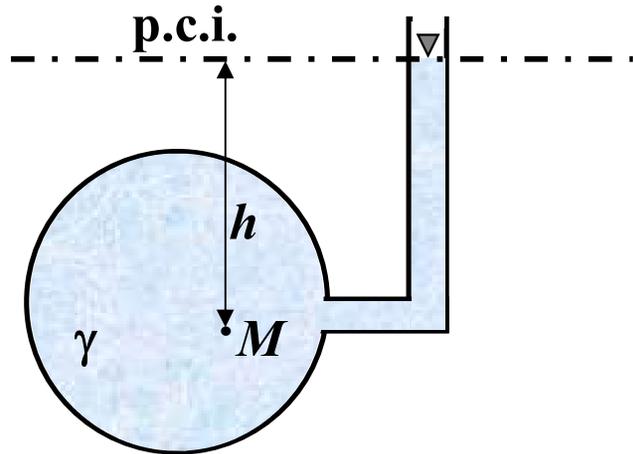
Hp. Fluido
incomprimibile

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\rho g}{p_1} (z_1 - z_2)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{M_m}{R \cdot T} g (z_1 - z_2)$$

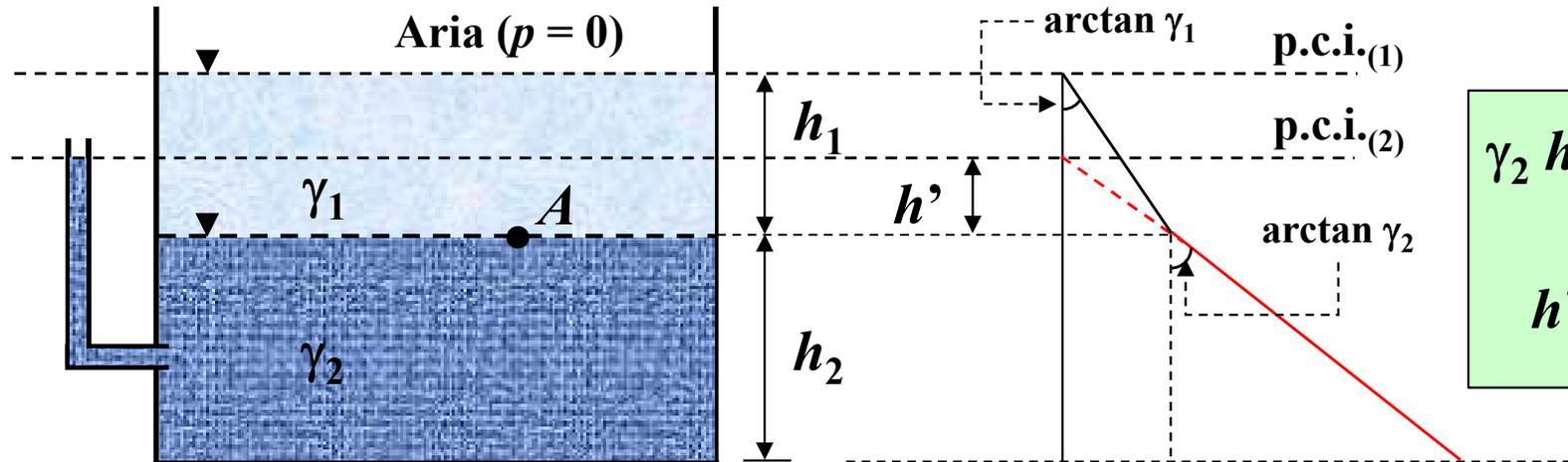
$z_2 - z_1 \leq 1000$ m la differenza tra la due soluzioni è inferiore a 1%

MISURA DELLA PRESSIONE



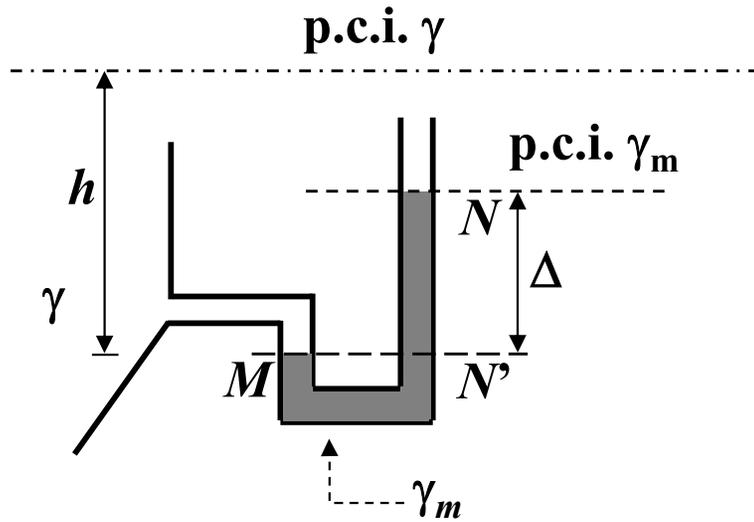
Piezometro: consente di visualizzare la quota del p.c.i.

$$p_M = \gamma h$$



$$\gamma_2 h' = p_A = \gamma_1 h_1$$

$$h' = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} h_1$$



Manometro Semplice

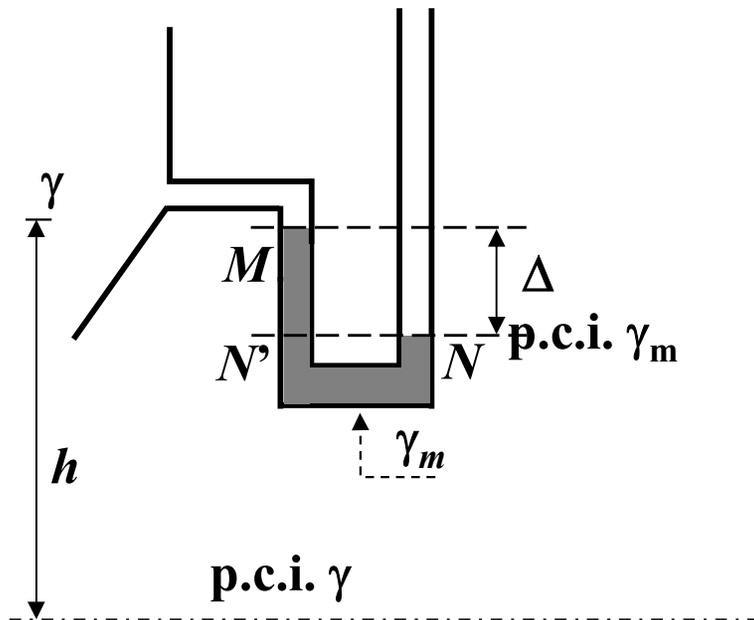
$$\gamma_m > \gamma$$

~~$$p_M = p_N + \gamma_m \Delta$$~~

$$p_M = h \gamma$$



$$h = \Delta \frac{\gamma_m}{\gamma}$$



$$\gamma_m > \gamma$$

$$p_N = 0 = p_{N'}$$

$$p_M = -\gamma_m \Delta$$



$$h = \Delta \frac{\gamma_m}{\gamma}$$

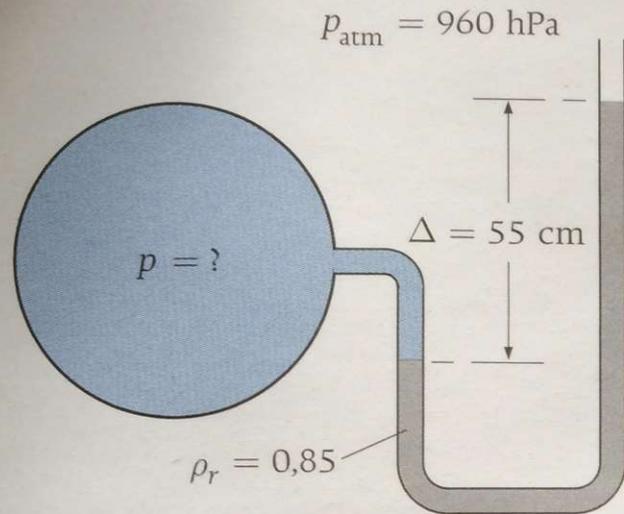


Figura 3.15
Schema dell'Esempio 3.2.

ESEMPIO 3.2 Misura della pressione con un manometro semplice

Fra i menischi di un manometro semplice collegato a un serbatoio contenente gas (Figura 3.15) vi è un dislivello $\Delta = 55 \text{ cm}$. Il fluido manometrico ha una densità relativa $\rho_r = 0,85$. Determinare la pressione assoluta nel serbatoio, sapendo che la pressione atmosferica locale è $p_{\text{atm}} = 960 \text{ hPa}$.

Proprietà Il valore standard della densità dell'acqua è $\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3$.

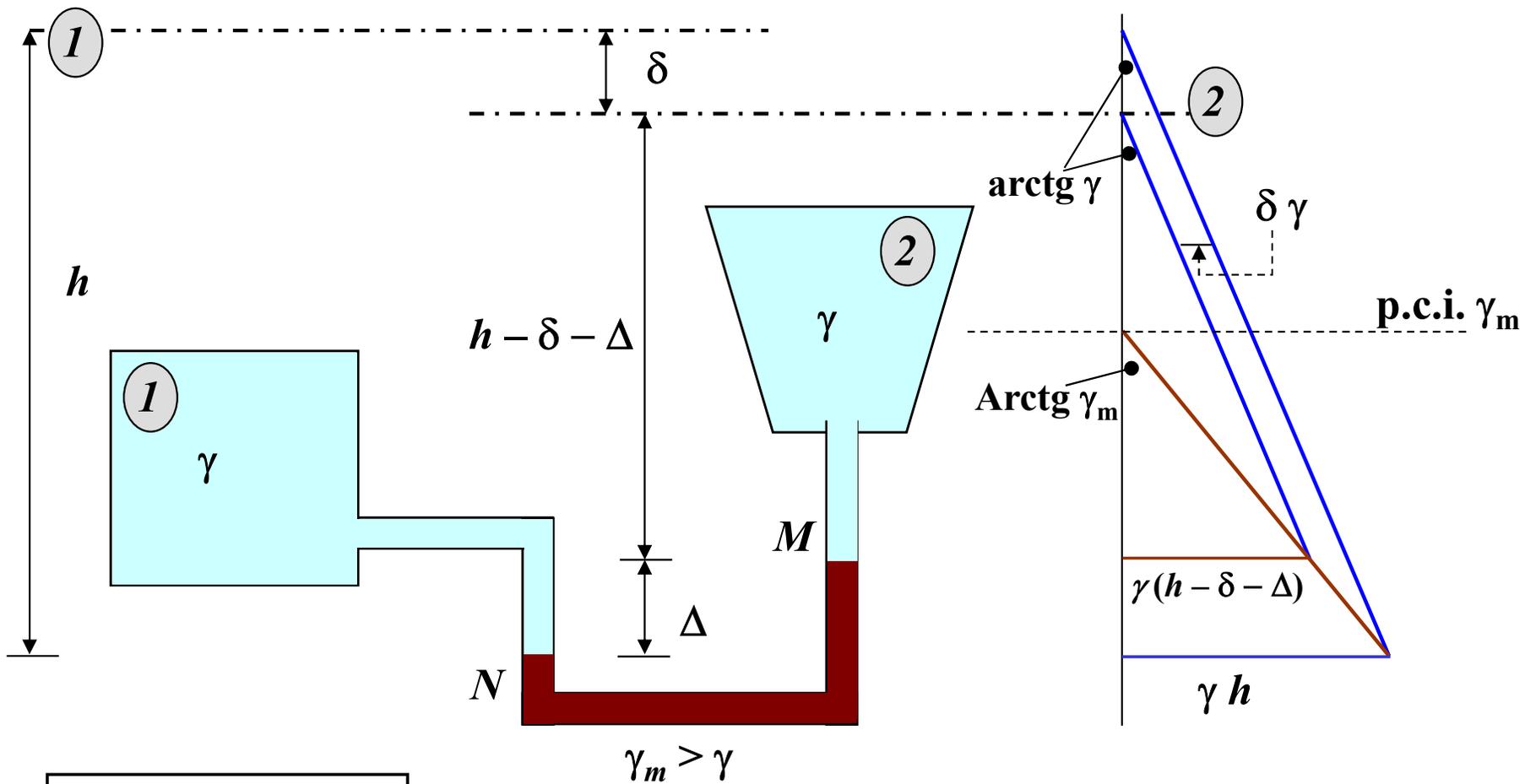
Analisi La densità del liquido manometrico è

$$\rho_m = \rho_r \rho_a = 0,85 \times 1000 = 850 \text{ kg/m}^3$$

Dalla 3.19 si ha

$$\begin{aligned} p &= p_{\text{atm}} + \rho_m g \Delta = 96\,000 + 850 \times 9,81 \times 0,55 = \\ &= 100\,590 \text{ Pa} = 1006 \text{ hPa} \end{aligned}$$

Manometro Differenziale 1/2



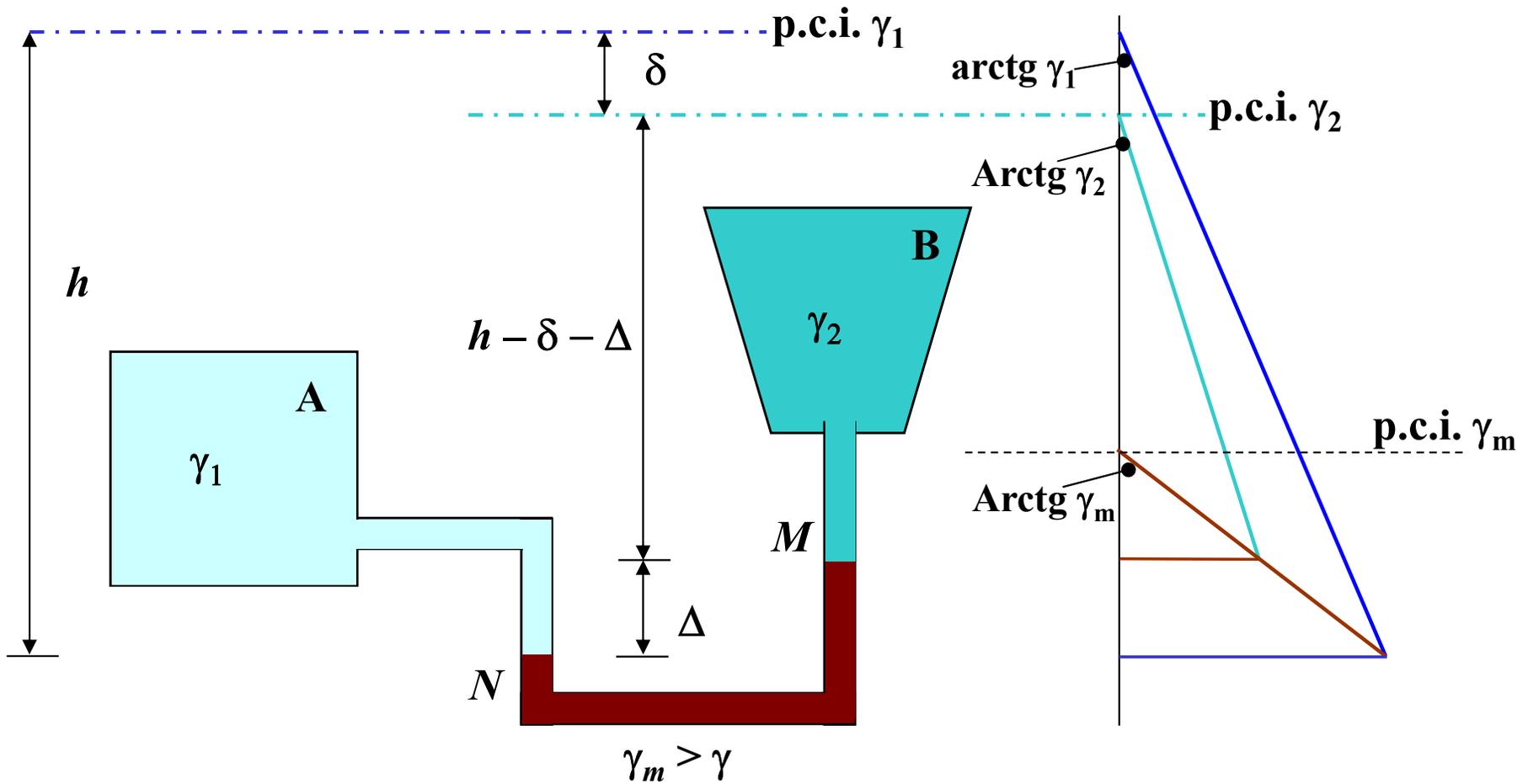
$$\begin{aligned}
 p_N &= \gamma h \\
 p_M &= \gamma (h - \Delta - \delta) \\
 p_N &= p_M + \Delta \gamma_m
 \end{aligned}$$

$$\gamma (h - \Delta - \delta) + \Delta \gamma_m = \gamma h$$

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

non dipende da h

Manometro "Differenziale" 2/2



$$p_N = \gamma_1 h$$

$$p_M = \gamma_2 (h - \Delta - \delta)$$

$$p_N = p_M + \Delta \gamma_m$$

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma_2}{\gamma_2} + h \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2}$$

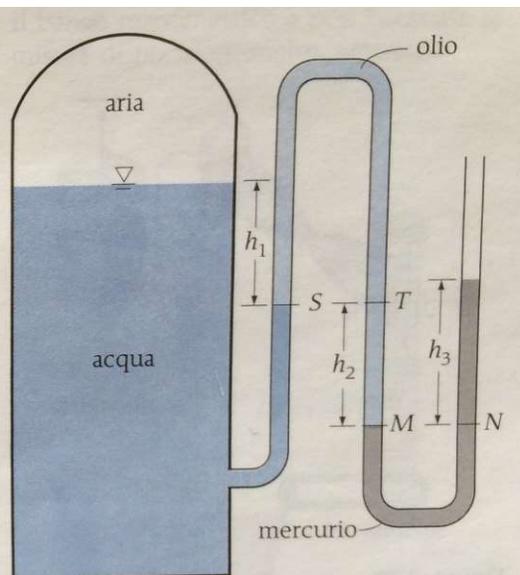
dipende da h

Esempio di calcolo della pressione In un serbatoio

ESEMPIO 3.3 Misura della pressione con un manometro a più fluidi

Un serbatoio situato in una zona di montagna a quota 1400 m, dove la pressione atmosferica vale 856 hPa, contiene acqua e aria in pressione. Al serbatoio è collegato un manometro semplice a più fluidi (Figura 3.17). Determinare la pressione p dell'aria nel serbatoio, essendo $h_1 = 0,1$ m, $h_2 = 0,2$ m e $h_3 = 0,35$ m.

Ipotesi La pressione dell'aria contenuta nel serbatoio è costante in quanto, per la bassa densità dell'aria, le variazioni di pressione



dovute alle variazioni di quota sono trascurabili. Quindi basta determinare la pressione all'interfaccia aria-acqua.

Proprietà I valori della densità dell'acqua, dell'olio e del mercurio sono, rispettivamente, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_o = 850 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$.

Analisi Per l'eguaglianza delle pressioni tra i punti M ed N e tra i punti S e T, si ha rispettivamente

$$p_M = p_N = p_{\text{atm}} + \rho_m g h_3 \quad p_S = p_T = p_M - \rho_o g h_2$$

$$p = p_S - \rho g h_1 = p_M - \rho_o g h_2 - \rho g h_1 =$$

$$= p_{\text{atm}} + \rho_m g h_3 - \rho_o g h_2 - \rho g h_1$$

da cui

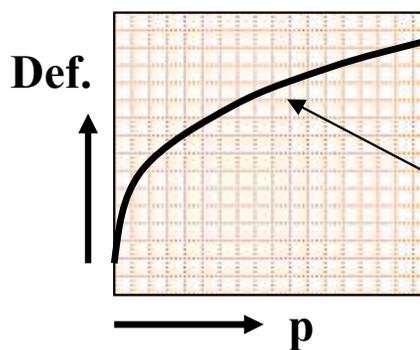
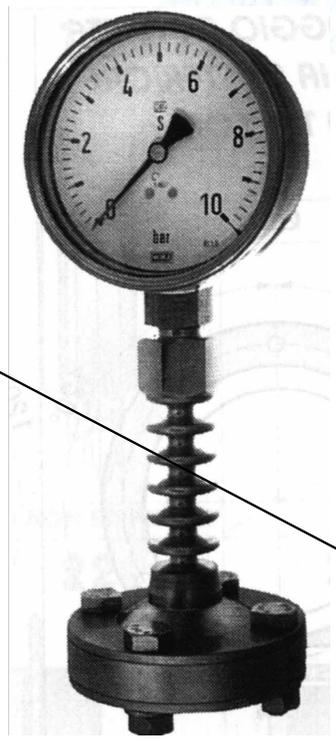
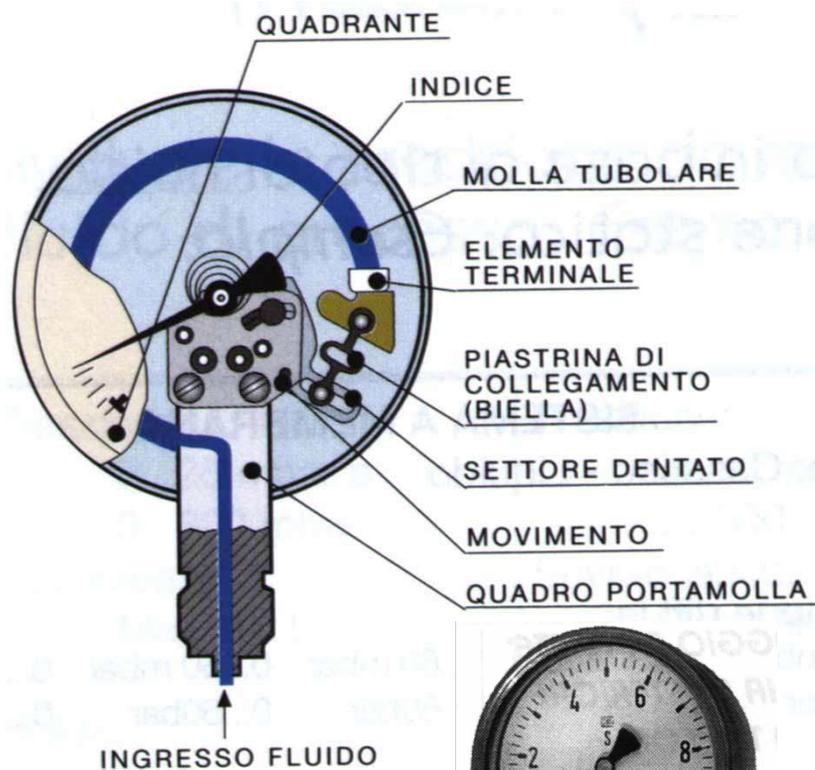
$$p = p_{\text{atm}} + g(\rho_m h_3 - \rho_o h_2 - \rho h_1) =$$

$$= 85600 + 9,81 \times (13600 \times 0,35 - 850 \times 0,2 - 1000 \times 0,1)$$

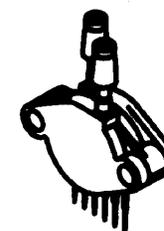
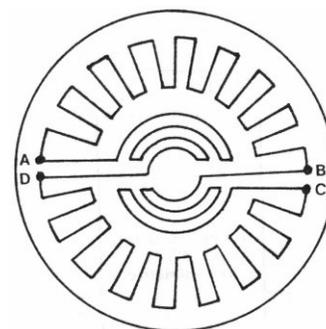
$$= 130 \text{ kPa}$$

Discussione Il mercurio è un fluido tossico, per cui, per scongiurare l'esposizione accidentale al vapore di mercurio, i manometri e i termometri a mercurio vengono oggi sostituiti con altri che contengono fluidi più sicuri.

Manometro metallico

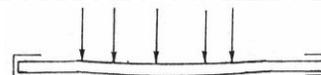


Cella di pressione

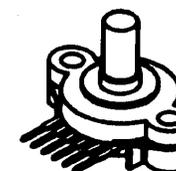


DUAL PORT
 CASE 867C-05
 SUFFIX DP

Pressione da misurare

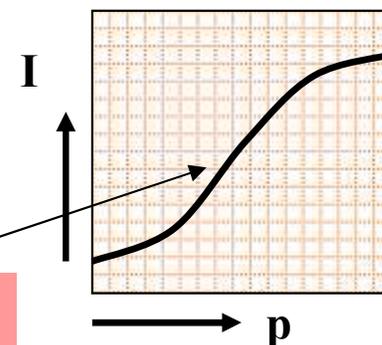


Pressione di riferimento



STOVEPIPE MEDIA PORT
 CASE 867H-03
 SUFFIX GW

Trasduttore di Pressione: converte un segnale di pressione in un output in corrente o tensione



Funzione di trasferimento

Misura della pressione atmosferica (Torricelli)

Un cilindro pieno di mercurio viene rovesciato in un contenitore:

Al di sopra del mercurio si avrà il vuoto (ovvero gas di mercurio alla tensione di vapore di quest'ultimo alla temperature di prova)

L'applicazione della legge di Stevin fornisce:

$$p_{atm} = \gamma_m h$$

In condizioni normali, al livello del mare $h=760$ mm

Se usassimo acqua $h=10.33$ m

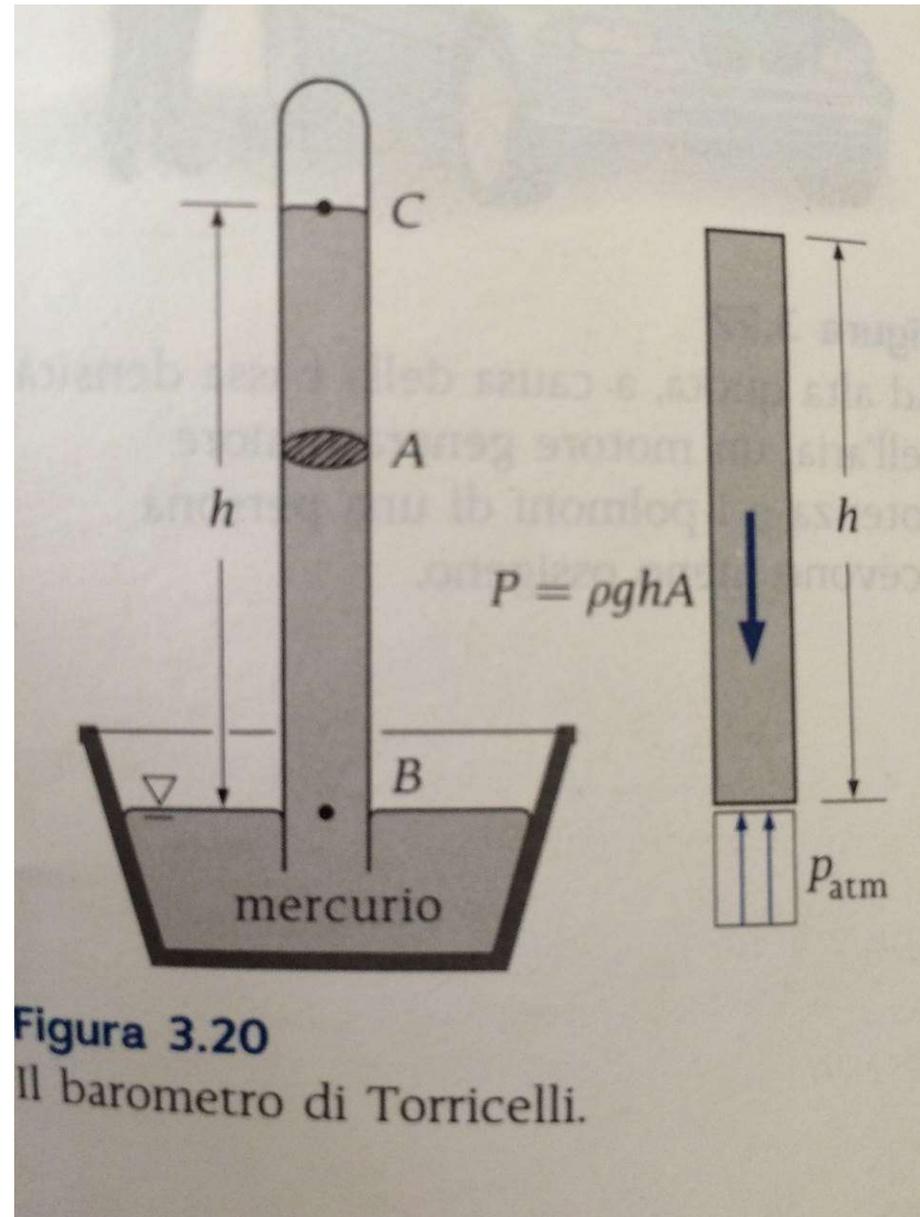


Figura 3.20
Il barometro di Torricelli.

ESEMPIO 3.4 Misura della pressione atmosferica

Determinare la pressione atmosferica in un luogo in cui l'accelerazione di gravità è $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, essendo la lettura barometrica $h = 740 \text{ mm}$ di mercurio alla temperatura di 10°C .

Proprietà La densità del mercurio a 10°C è $\rho_m = 13\,570 \text{ kg/m}^3$.

Analisi Per la 3.23

$$p_{\text{atm}} = \rho_m g h = 13\,570 \times 9,81 \times 0,74 = 98\,500 \text{ Pa} = 985 \text{ hPa}$$

Discussione La densità varia con la temperatura e di ciò si deve tener conto nei calcoli.

ESEMPIO 3.5 Effetto del peso del pistone sulla pressione del gas all'interno di un cilindro

In un sistema pistone-cilindro, il pistone ha massa $m = 60 \text{ kg}$ e sezione trasversale di area $A = 0,04 \text{ m}^2$ (Figura 3.23). La pressione atmosferica locale è $p_{\text{atm}} = 0,97 \text{ bar}$ e l'accelerazione di gravità $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Determinare la pressione assoluta del gas contenuto all'interno del cilindro.

Ipotesi L'attrito tra pistone e cilindro è trascurabile.

Analisi Per l'equilibrio alla traslazione in direzione verticale, si ha

$$pA = p_{\text{atm}} A + P$$

da cui

$$\begin{aligned} p &= p_{\text{atm}} + \frac{mg}{A} = 0,97 \times 10^5 + \frac{60 \times 9,81}{0,04} = \\ &= 97\,000 + 14\,700 = 112\,000 \text{ Pa} = 1,12 \text{ bar} \end{aligned}$$

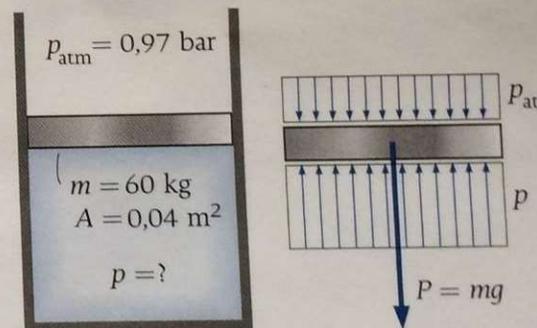
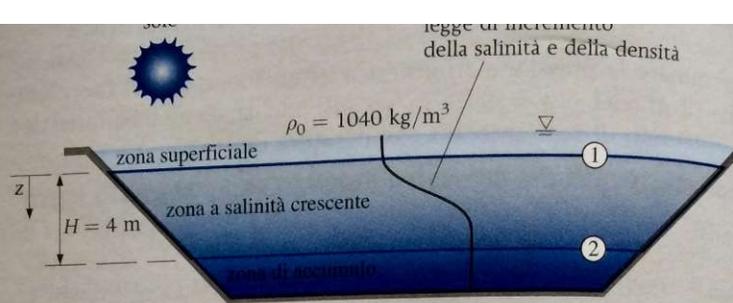


Figura 3.23
Schema dell'Esempio 3.5.



in cui ρ_0 è la densità in corrispondenza della superficie libera, z la distanza misurata lungo la verticale verso il basso a partire dal limite superiore della zona a salinità variabile e H è lo spessore di tale zona. Calcolare la pressione alla base della zona a salinità variabile, essendo $H = 4$ m, $\rho_0 = 1040$ kg/m³ e lo spessore della zona superficiale $s = 0,8$ m.

Ipotesi Nella zona superficiale la densità è costante.

Analisi La pressione relativa alla base della zona superficiale, cioè al limite superiore della zona a salinità variabile, vale

$$p_{r1} = \rho_0 g s = 1040 \times 9,81 \times 0,8 = 8160 \text{ Pa}$$

Per la 3.15, la differenza di pressione in corrispondenza di una variazione di quota dz è

$$dp = \rho g dz$$

Integrando tra la quota $z = 0$, limite superiore della zona a salinità variabile in cui la pressione relativa è p_{r1} , e la generica quota z all'interno di tale zona, si ha

$$p_r - p_{r1} = \int_0^z \rho g dz$$

e, introducendo la legge di variazione della densità,

$$p_r = p_{r1} + \int_0^z \rho_0 \sqrt{1 + \tan^2 \left(\frac{\pi z}{4 H} \right)} g dz$$

Risolviendo l'integrale, si ottiene la legge di variazione della pressione nella zona a salinità variabile

$$p_r = p_{r1} + \rho_0 g \frac{4H}{\pi} \operatorname{senh}^{-1} \left[\tan \left(\frac{\pi z}{4 H} \right) \right]$$

La pressione relativa p_{r2} alla base della zona a salinità variabile, cioè per $z = H = 4$ m, è allora pari a

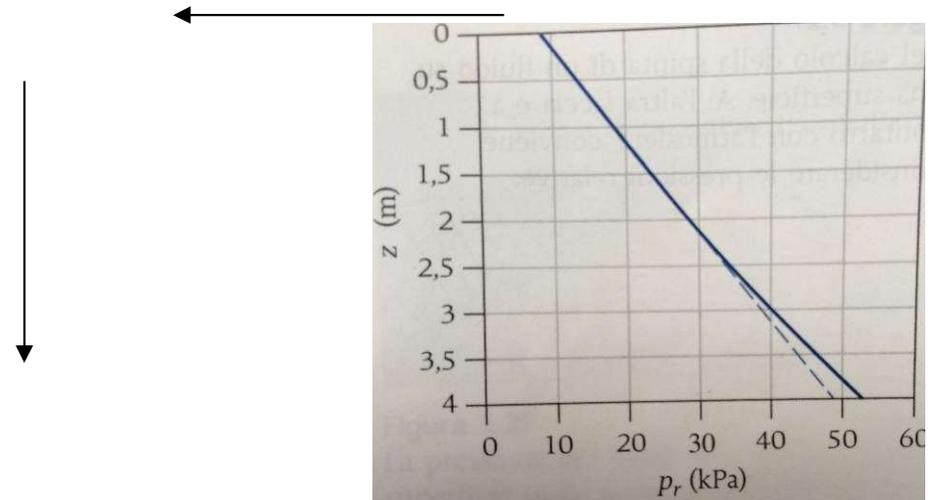
$$p_{r2} = 8160 + 1040 \times 9,81 \times \frac{4 \times 4}{\pi} \operatorname{senh}^{-1} \left[\tan \left(\frac{\pi 4}{4 4} \right) \right] = 52,4 \text{ kPa}$$

ESEMPIO 3.6 Pressione idrostatica in uno stagno solare a densità variabile

Gli stagni solari sono piccoli laghi artificiali, della profondità di pochi metri, utilizzati per immagazzinare energia solare. Per evitare la risalita di acqua calda (e quindi meno densa) verso la superficie, si aggiunge del sale al fondo.

Pertanto, si crea, come indicato in Figura 3.24, una zona a salinità variabile nella quale la densità aumenta con una legge che può essere espressa come

$$\rho = \rho_0 \sqrt{1 + \tan^2 \left(\frac{\pi z}{4 H} \right)}$$



Se la densità fosse costante e pari a ρ_0 , sarebbe

$$p_{r2} = 8160 + 1040 \times 9,81 \times 4 = 8160 + 40800 = 49 \text{ kPa}$$

Discussione La linea continua di Figura 3.25 riporta la legge di variazione della pressione con la profondità. La linea tratteggiata riporta, per confronto, l'andamento della pressione nel caso di densità costante pari al valore ρ_0 che ha sulla superficie libera. Quando la densità varia con la profondità, la legge di variazione della pressione è più che lineare.

La spinta Idrostatica

Abbiamo visto che in un fluido in quiete sono esercitati solamente sforzi di pressione, normali alla superficie di applicazione

La pressione viene quindi esercitata sui contorni del dominio. Se questi contorni sono solidi (i.e. pareti di serbatoio) le pressioni esercitano una forza che viene denominata

Spinta idrostatica

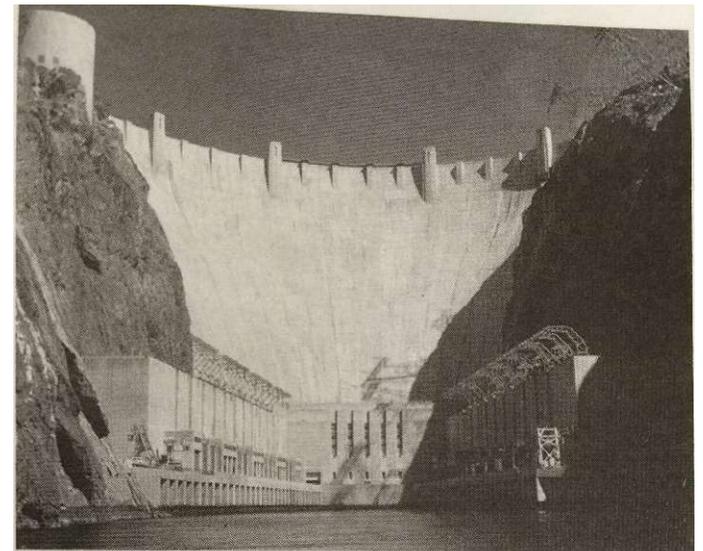


Figura 3.26

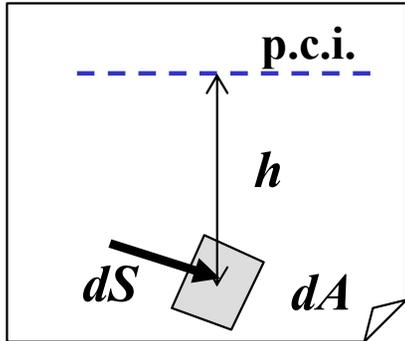
La diga Hoover.

*United States Department of the Interior,
Bureau of Reclamation - Lower Colorado
Region.*

La determinazione della spinta idrostatica risulta di grande importanza nelle applicazioni ingegneristiche per il dimensionamento di manufatti

(dalle valvole idrauliche alle dighe!)

Spinta Idrostatica su Superficie Piana



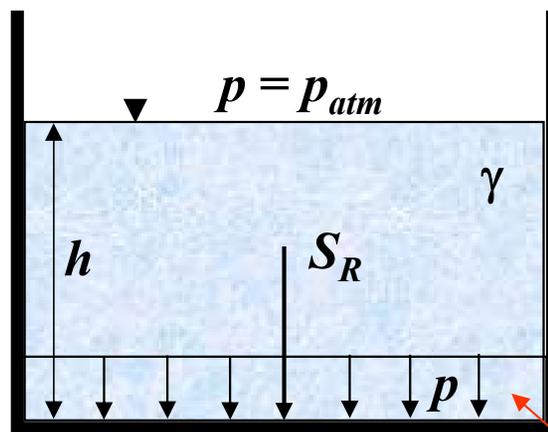
se si considera una superficie infinitesima la spinta idrostatica $d\mathbf{S}$ è sempre diretta \perp alla sup. ma è indipendente dal suo orientamento

$$d\mathbf{S} = p \mathbf{n} dA = \gamma h dA \mathbf{n}$$

l'orientamento della superficie conta per sup. finite perché cambia il diagramma di distribuzione delle pressioni

$$\mathbf{S}_R = \int_A \gamma h dA$$

superficie orizzontale

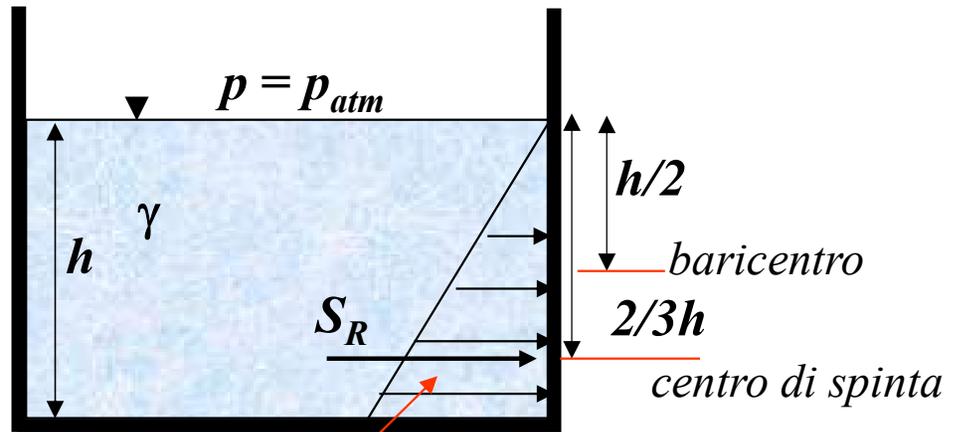


distribuzione uniforme di pressione

$$\mathbf{S}_R = p A \quad \text{con} \quad p = \gamma h$$

- ✓ normale alla superficie
- ✓ punto di applicazione nel baricentro

superficie verticale

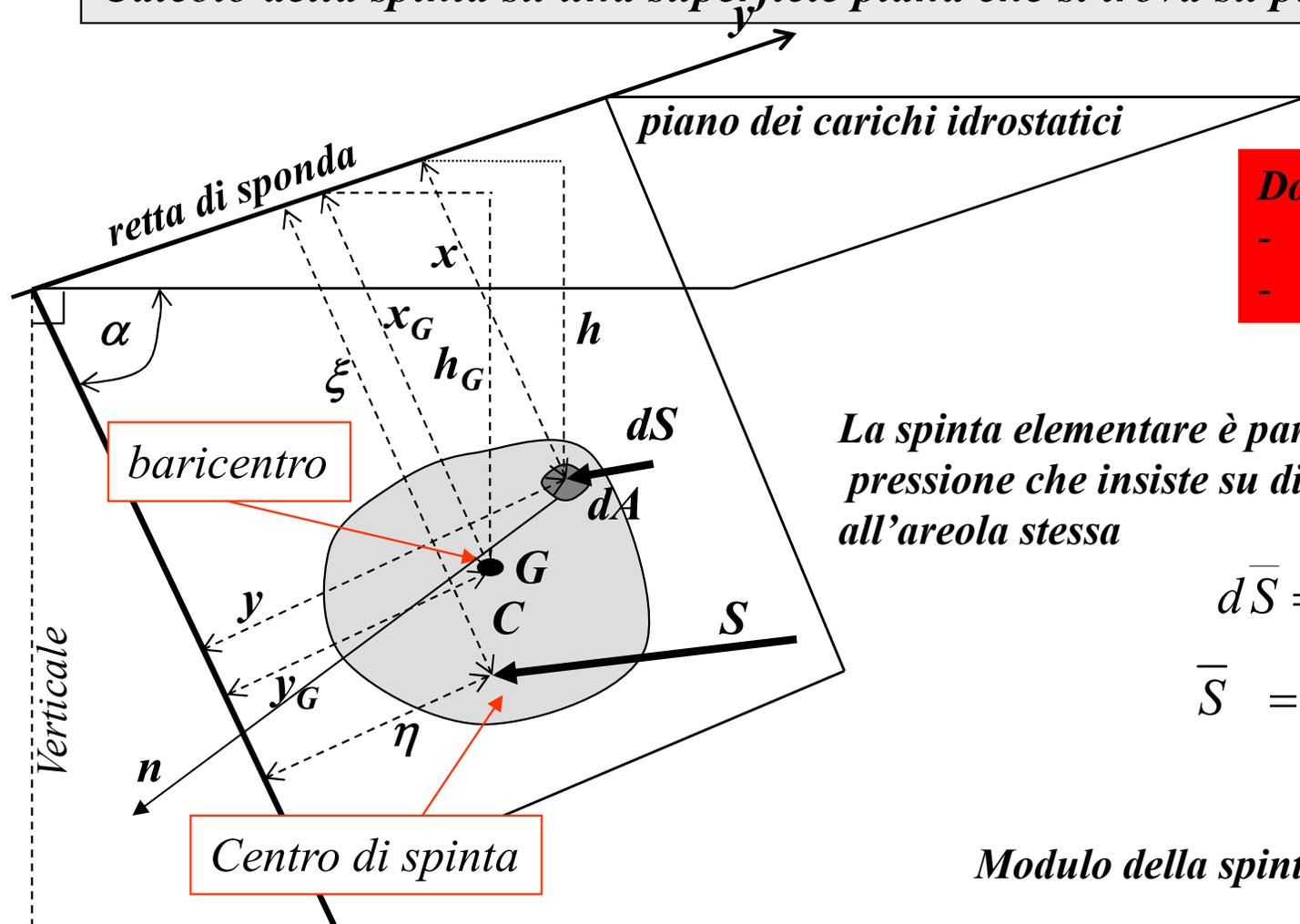


distribuzione triangolare di pressione

$$\mathbf{S}_R = p_G A \quad \text{con} \quad p_G = \gamma h/2$$

- ✓ normale alla superficie
- ✓ punto di applicazione nel centro di spinta

Calcolo della spinta su una superficie piana che si trova su piano inclinato



Dobbiamo determinare:
 - Spinta
 - Centro di spinta

La spinta elementare è pari al prodotto dell'areola per la pressione che insiste su di essa e ha direzione normale all'areola stessa

$$d\bar{S} = p dA \bar{n}$$

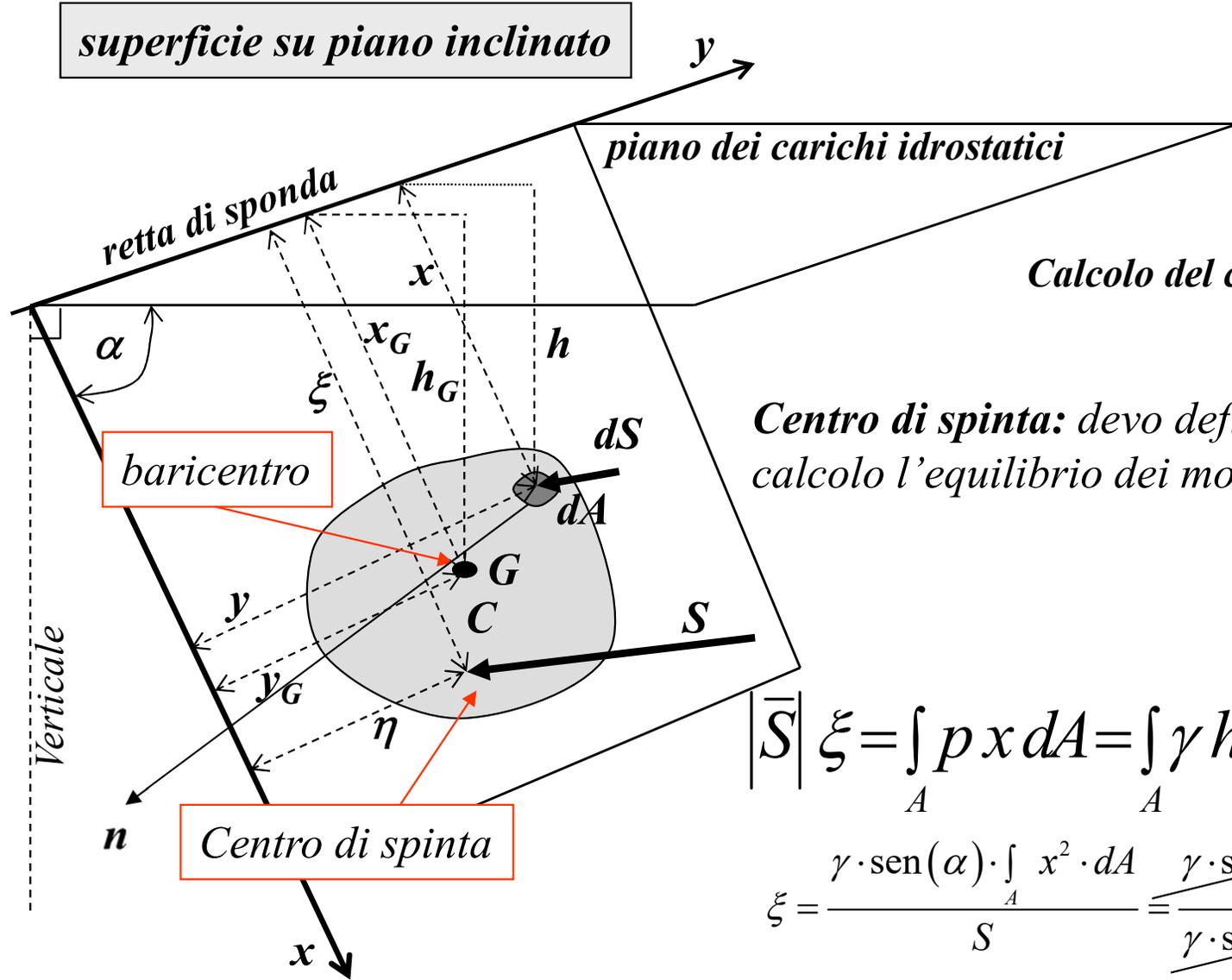
$$\bar{S} = |\bar{S}| \bar{n}$$

Modulo della spinta

$$|\bar{S}| = \int_A p dA = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma x \text{sen}(\alpha) dA = \gamma \text{sen}(\alpha) \int_A x dA =$$

$$= \gamma \text{sen}(\alpha) x_G A = \gamma h_G A = p_G A$$

superficie su piano inclinato



Calcolo del centro di spinta

Centro di spinta: devo definire le coordinate ξ e η ; calcolo l'equilibrio dei momenti rispetto agli assi x e y

$$|\bar{S}| \xi = \int_A p x dA = \int_A \gamma h x dA = \int_A \gamma \text{sen}(\alpha) x^2 dA$$

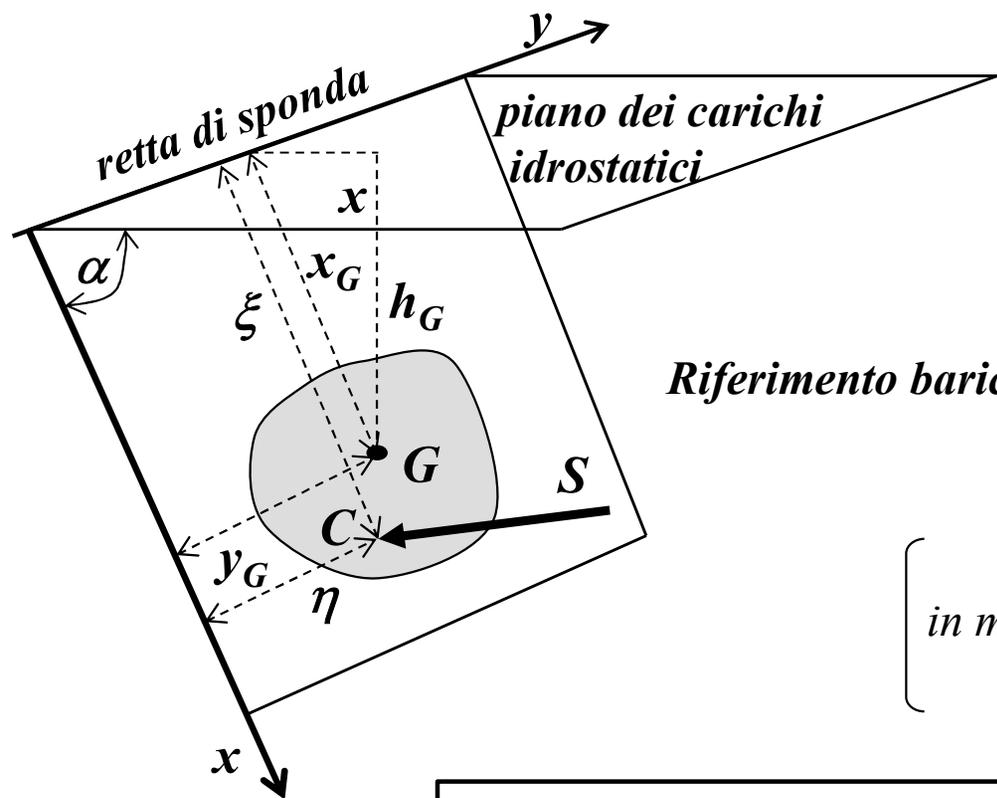
$$\xi = \frac{\gamma \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \int_A x^2 \cdot dA}{S} = \frac{\gamma \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \int_A x^2 \cdot dA}{\gamma \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \int_A x \cdot dA} = \frac{I_y}{M_y}$$

$$|\bar{S}| \eta = \int_A p y dA = \int_A \gamma h y dA = \int_A \gamma \text{sen}(\alpha) x y dA$$

$$\eta = \frac{\gamma \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA}{S} = \frac{\gamma \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA}{\gamma \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \int_A x \cdot dA} = \frac{I_{xy}}{M}$$

$$S = p_G \cdot A$$

$$\xi = \frac{I_y}{M} \quad \eta = \frac{I_{xy}}{M}$$



- Note:**
- la posizione di C non dipende da α
 - η si annulla se l'asse x (di max pendenza del piano) è di simmetria per A (situazione tipica)
 - C è sempre più distante del baricentro dalla retta di sponda.

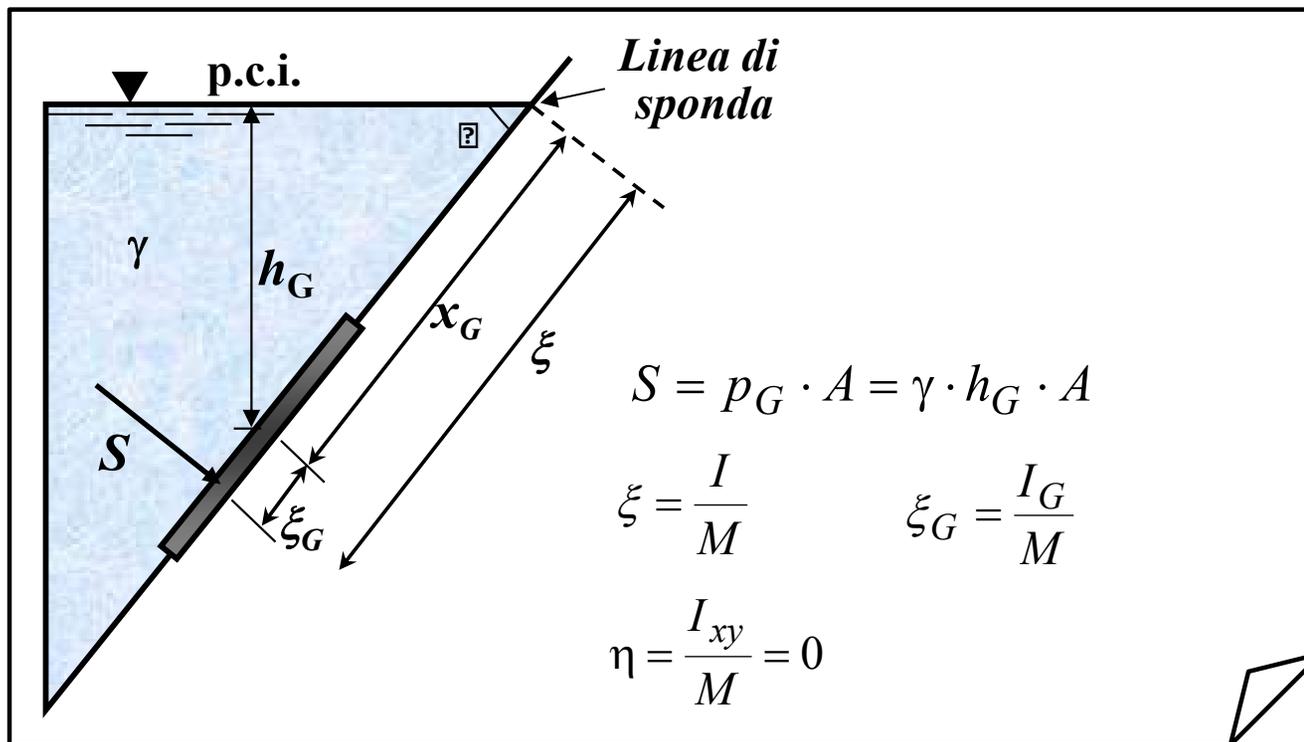
Riferimento baricentrico

$$I = I_{yG} + A x_G^2 \Rightarrow$$

$$\xi = \frac{I_{yG}}{M_y} + \frac{A \cdot x_G^2}{A \cdot x_G} = x_G + \frac{I_{yG}}{M_y}$$

in maniera analoga

$$\eta = \frac{I_{xyG}}{M_y} + \frac{A x_G y_G}{A x_G} = y_G + \frac{I_{xyG}}{M_y}$$



$$S = p_G \cdot A = \gamma \cdot h_G \cdot A$$

$$\xi = \frac{I}{M} \quad \xi_G = \frac{I_G}{M}$$

$$\eta = \frac{I_{xy}}{M} = 0$$

affondamento del centro di spinta

$$e = y_c - y_G = I_o/M$$

Il momento di inerzia dipende solo dalla forma della superficie che subisce la spinta

Il momento statico aumenta con la distanza tra la retta di sponda e il baricentro della figura

L'affondamento quindi tende a 0 per profondità elevate

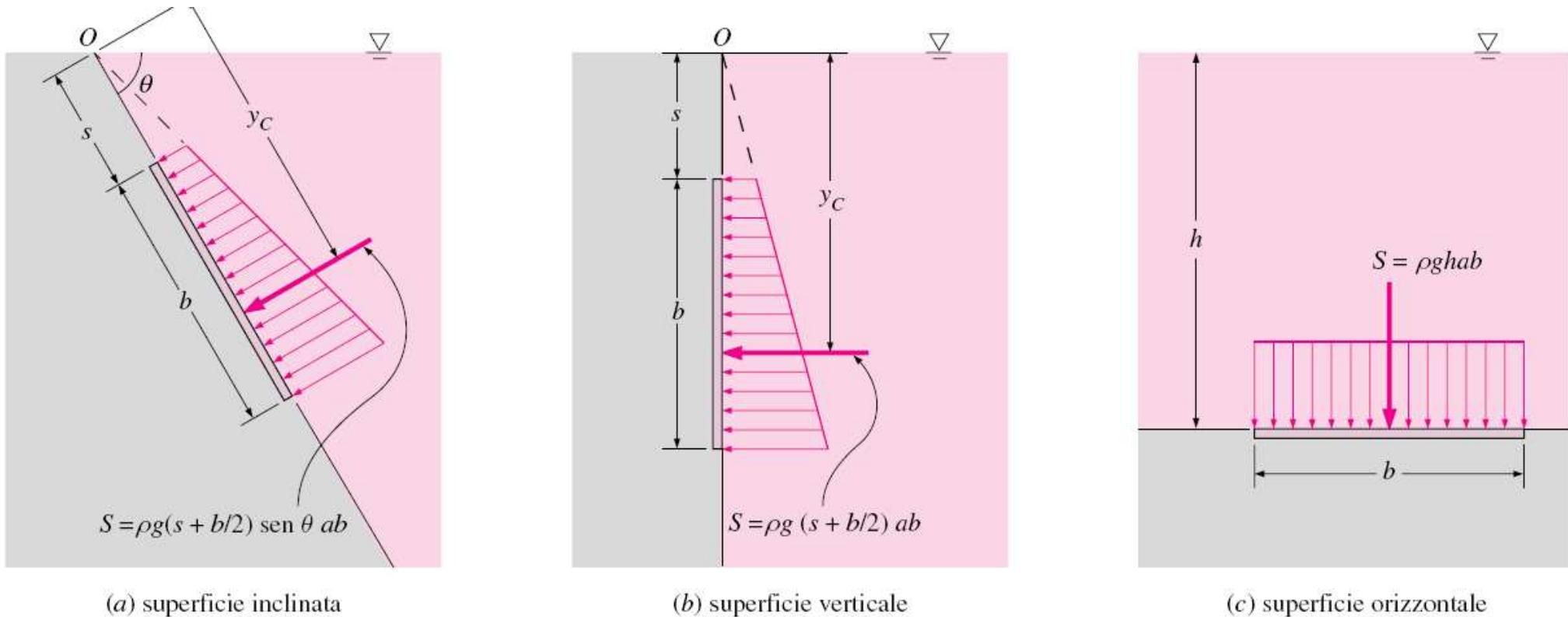


Figura 3.32

Spinta su una superficie rettangolare inclinata, verticale e orizzontale.

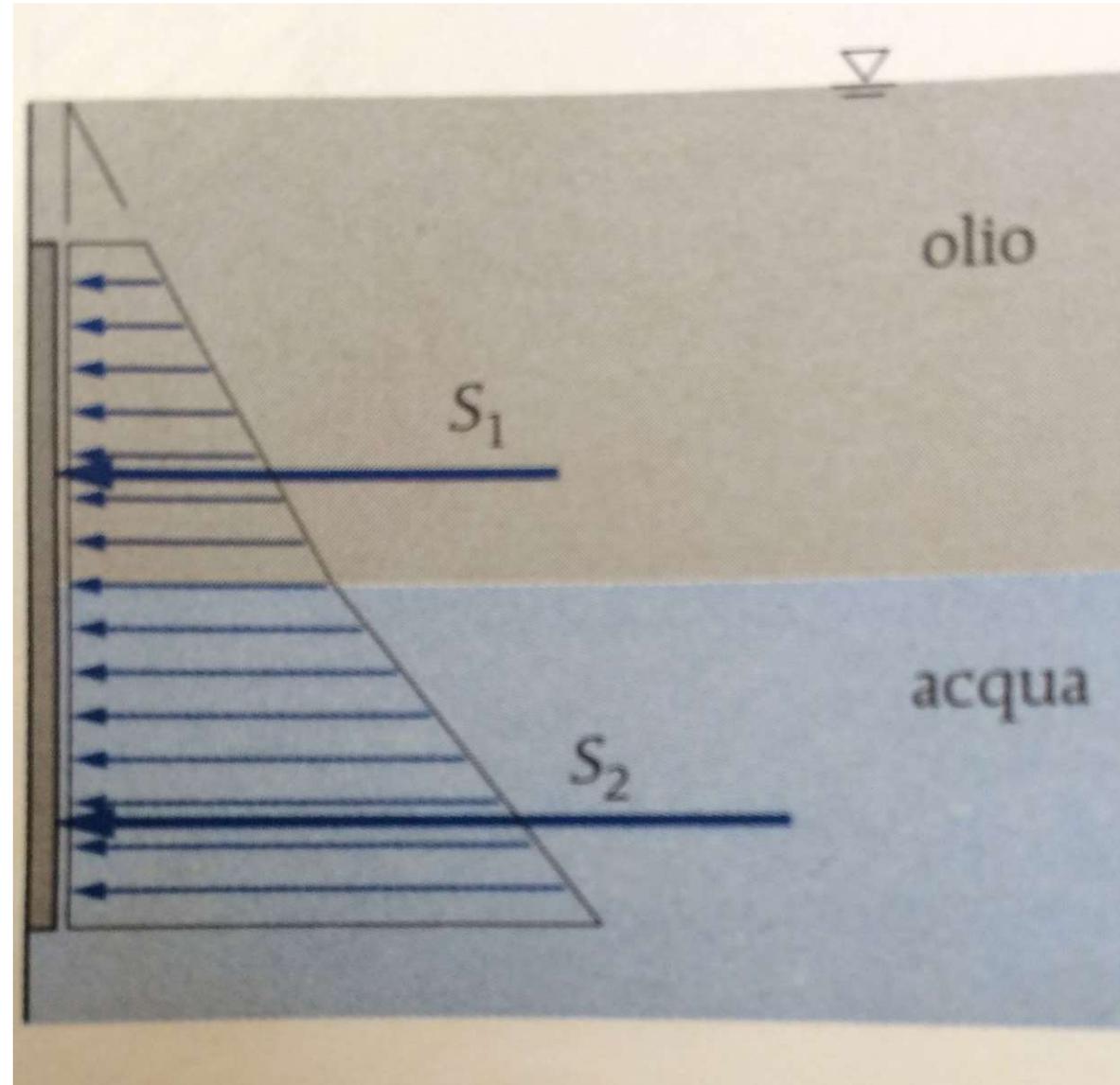
Spinte su superfici piane: liquidi a densità diversa

La spinta totale è pari alla somma delle spinte che ciascun liquido esercita sulla parete.

Valutato il centro di spinta per ognuna delle due spinte, mediante l'equilibrio alla rotazione si determina il centro di spinta totale

Il momento della spinta totale=

Somma dei momenti delle singole spinte



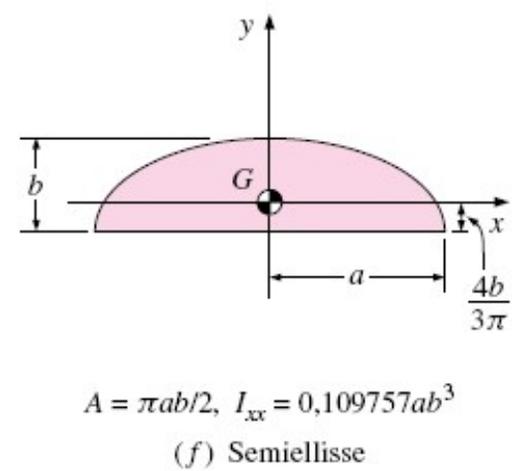
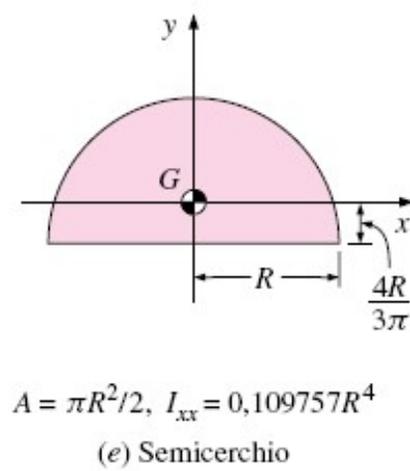
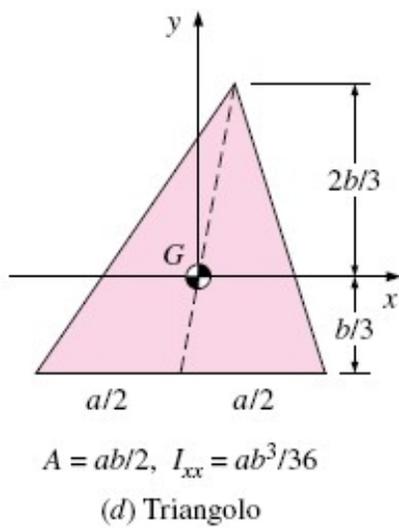
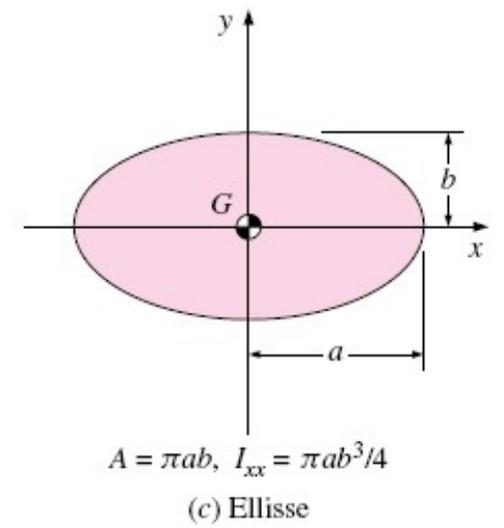
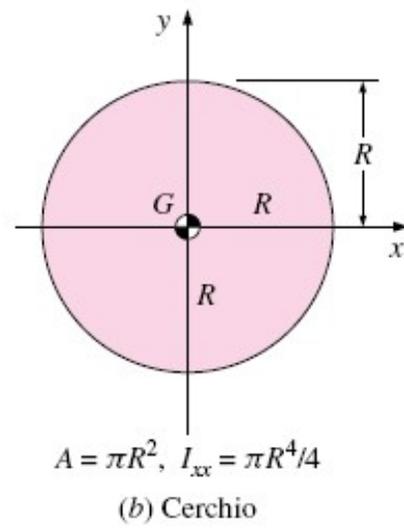
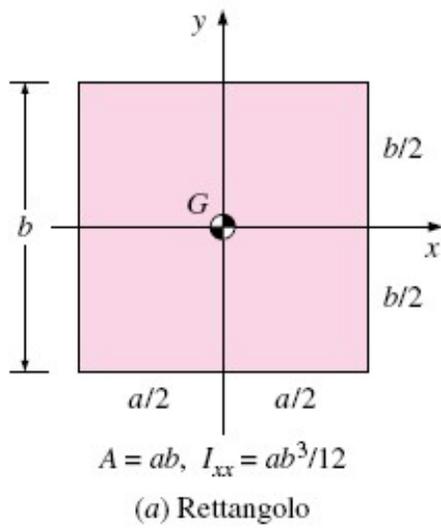


Figura 3.30
Baricentro e momento di inerzia di alcune superfici piane.

ESEMPIO 3.7 Spinta sulla portiera di un'automobile sommersa

Un'automobile precipita in un lago a causa di un incidente e si posa sul fondo sulle proprie ruote (Figura 3.36). La portiera è alta $b = 1,2$ m e larga $a = 1$ m e il suo bordo superiore è affondato rispetto alla superficie libera di $s = 8$ m. Determinare la spinta sulla portiera e la posizione del centro di spinta e valutare se chi sta all'interno è in grado di aprire la portiera.

Ipotesi 1 Il fondo del lago è orizzontale. 2 Le portiere sono ben sigillate per cui all'interno non può infiltrarsi acqua. 3 La portiera si può approssimare a una superficie piana rettangolare verticale.

4 La pressione all'interno è pari alla pressione atmosferica perché, non infiltrandosi acqua, l'aria all'interno non viene compressa.

Proprietà La densità dell'acqua del lago è pari a 1000 kg/m^3 .

Analisi La pressione relativa nel baricentro della portiera vale

$$p_{rG} = \rho g h_G = \rho g (s + b/2) = \\ = 1000 \times 9,81 \times (8 + 1,2/2) = 84\,400 \text{ Pa}$$

La spinta sulla portiera ha modulo

$$S = p_{rG} A = p_{rG} ab = 84\,400 \times 1 \times 1,2 = 101,3 \text{ kN}$$

ed è applicata, per la 3.35, a una distanza dalla superficie del lago

$$y_C = s + \frac{b}{2} + \frac{b^2}{12(s + b/2)} = 8 + \frac{1,2}{2} + \frac{1,2^2}{12 \times (8 + 1,2/2)} = 8,61 \text{ m}$$

cioè ha una eccentricità di appena 1 cm.

Discussione Una persona robusta, in grado sollevare un peso di 100 kgf (circa 1 kN), applicando la forza nel punto più lontano dalle cerniere, cioè a 1 m, può esercitare un momento massimo di $1 \text{ kN} \cdot \text{m}$. La spinta, che agisce sulla mezzieria della portiera e quindi a 0,5 m dalle cerniere, esercita un momento di $50,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, pari a circa 50 volte il momento che può essere esercitato dalla persona. L'apertura della portiera è quindi impossibile anche per una persona robusta. L'unica possibilità è quella di lasciar entrare dell'acqua, aprendo un poco il finestrino, e, tenendo la testa quanto più in alto possibile, aspettare che l'acqua riempi quasi del tutto il vano dell'auto. Solo in queste condizioni, essendo simili le pressioni sulle due facce della portiera, la si potrà aprire quasi come se la si aprisse in aria.

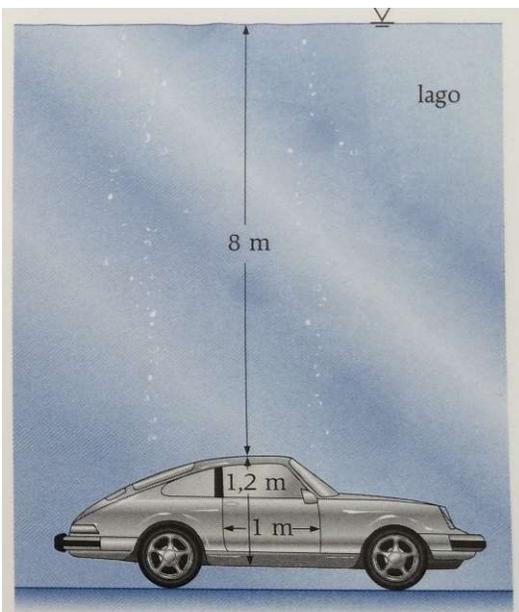
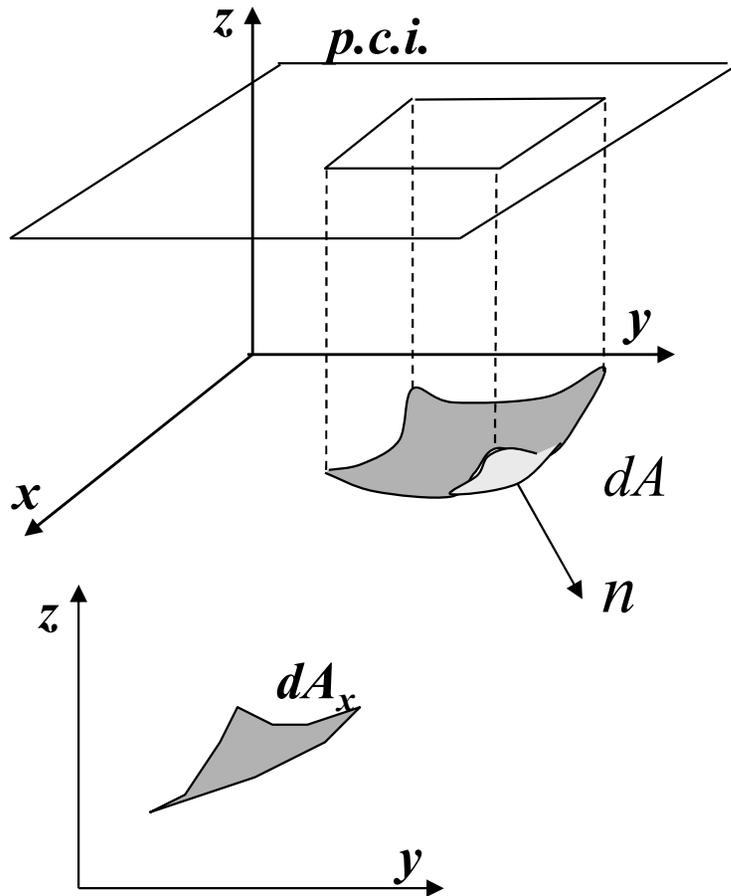


Figura 3.36
Schema dell'Esempio 3.7.

Spinte su superfici curve 1/2

In genere la spinta ha due componenti orizzontali e una verticale



$$d\bar{S} = p \cdot \bar{n} \cdot dA$$

$$dS_X = p \cdot \left(\cos \hat{n}_x \cdot dA \right) = p \cdot dA_X$$

$$dS_Y = p \cdot \left(\cos \hat{n}_y \cdot dA \right) = p \cdot dA_Y$$

$$dS_Z = p \cdot \left(\cos \hat{n}_z \cdot dA \right) = p \cdot dA_Z$$

$$S_x = \int_{A_x} dS_x = \int_{A_x} p dA_x = \int_{A_x} \gamma h dA_x = \gamma h_{Gx} A_x$$

➤ La superficie A_x è piana

➤ h_{Gx} è il baricentro di A_x piana

$$S_y = \int_{A_y} dS_y = \int_{A_y} p dA_y = \int_{A_y} \gamma h dA_y = \gamma h_{Gy} A_y$$

⇒ **Proiezione A_x, A_y**

⇒ **$\gamma h_G = p_G$ baricentro**

⇒ **Applicata (S_x, S_y) nel centro di spinta**

⇒ **In genere S_x, S_y non sono complanari**

Spinte su superfici curve 2/2

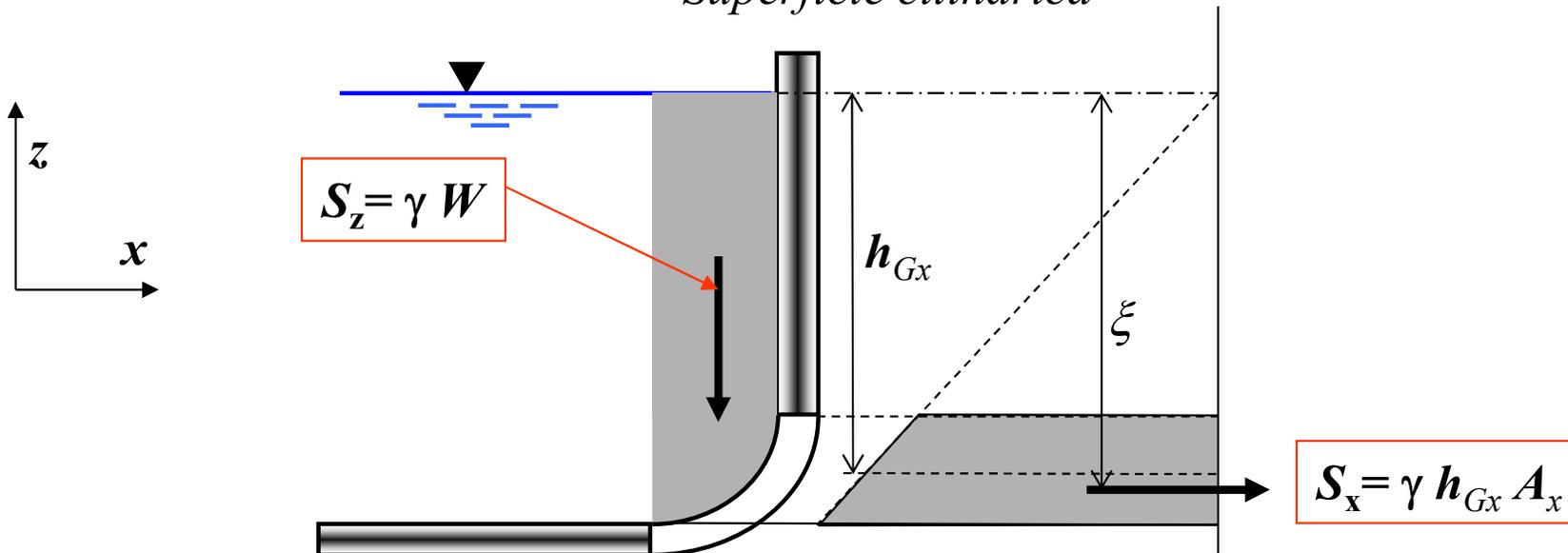
$$S_z = \int_{A_z} dS_z = \int_{A_z} p dA_z = \int_{A_z} \gamma h_z dA_z = \gamma \int_{A_z} dW = \gamma W$$

1. *Peso colonna sovrastante*

2. *Applicata nel baricentro della colonna*

$$dW = h_z dA_z$$

Superficie cilindrica



Spinte su superfici curve: calcolo per componenti

Conviene considerare un volume finito e applicare l'equilibrio alla traslazione

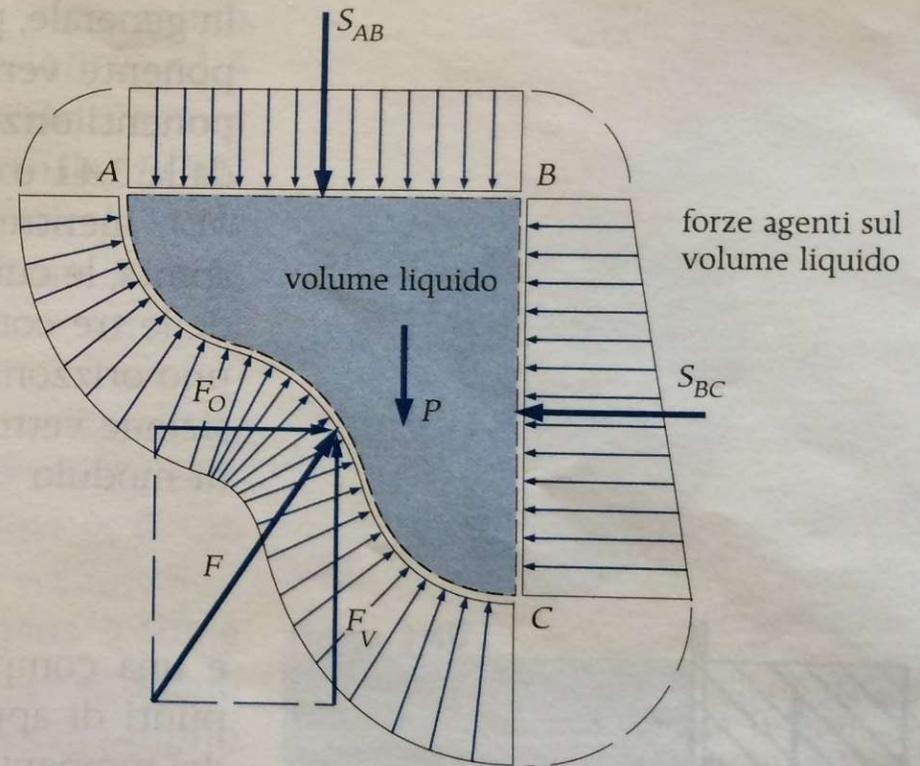
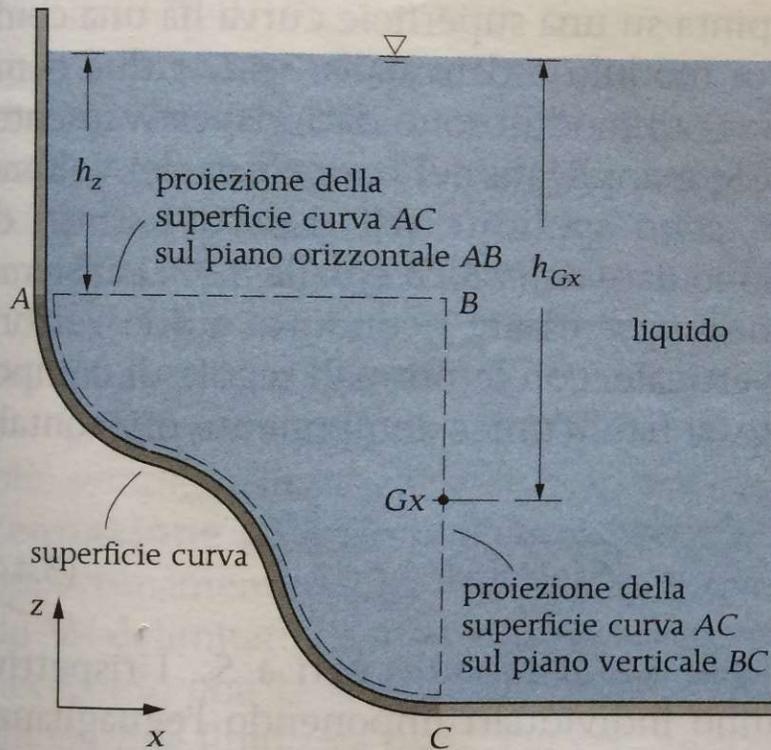


Figura 3.37

Calcolo delle componenti della spinta su una superficie curva.

$$F_0 = S_{BC} = \gamma h_{Gx} A_x$$

Applicata sul centro di spinta

$$F_v = S_{AB} + P = \gamma h_z A_z + \gamma W$$

Applicata sul baricentro del volume

Spinte su superfici curve: il volume virtuale

In alcuni casi si può considerare un volume virtuale di liquido e calcolare la spinta verticale S_v come in figura:

S_v è pari alla spinta S_z meno il peso del liquido P

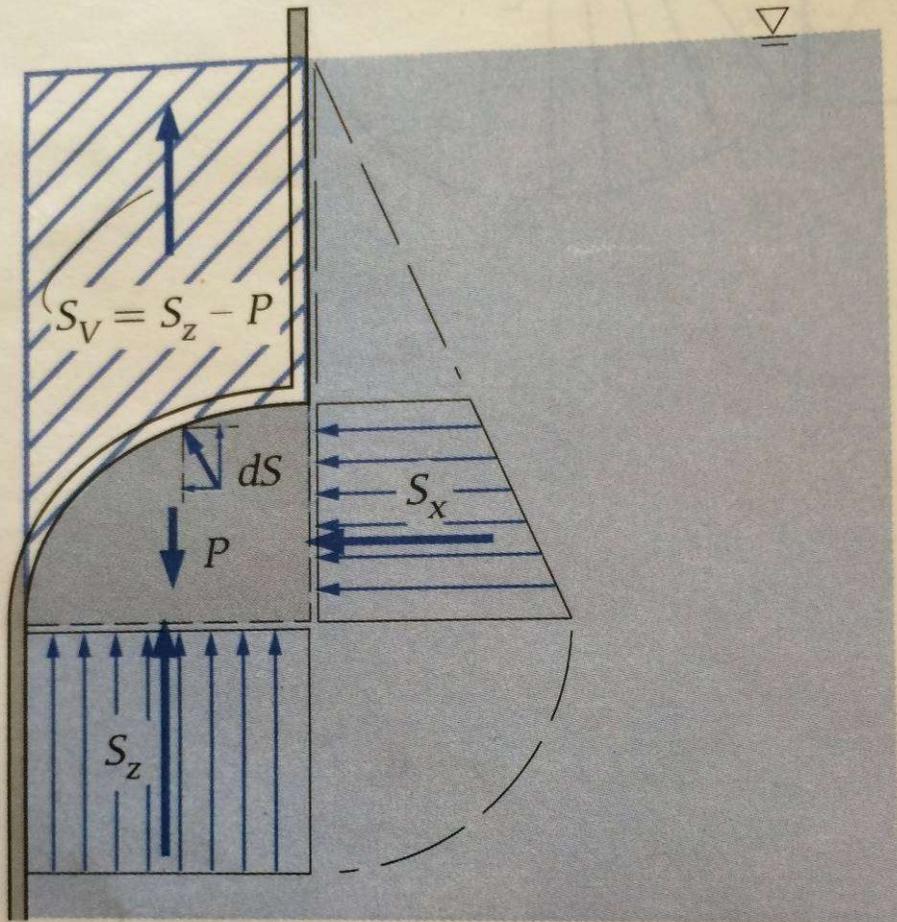
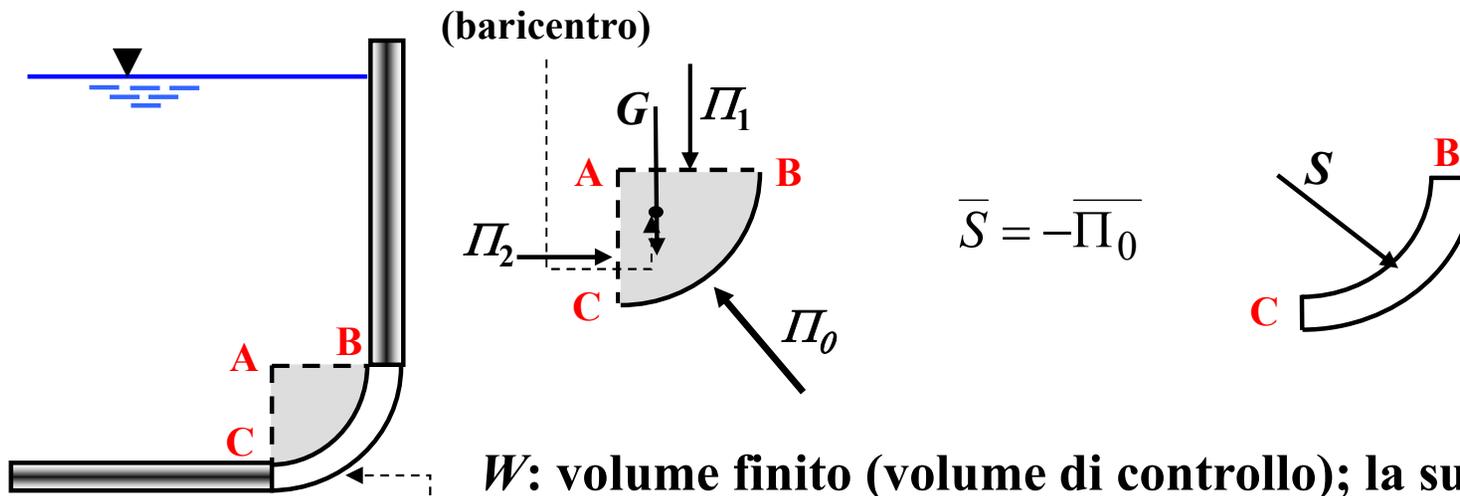


Figura 3.38

La componente verticale della spinta sulla superficie curva ha modulo pari al peso del volume di liquido compreso tra la superficie e il piano dei carichi idrostatici ed è diretta come la componente verticale della spinta elementare.

Equazione globale dell'equilibrio statico



W : volume finito (volume di controllo); la sua scelta dipende dal tipo di problema che si affronta

$$\int_W \rho g dW = - \int_A p \mathbf{n} dA$$

Risultante delle forze di massa su W

Risultante delle spinte elementari pn sugli elementini della superficie di contorno

$$\overline{\mathbf{G}}_i + \overline{\mathbf{\Pi}}_i = \mathbf{0}$$

$$\underline{G} + \underline{\Pi}_0 + \underline{\Pi}_1 = 0$$

$$\underline{S} = -\underline{\Pi}_0 = \underline{G} + \underline{\Pi}_1$$

*Il calcolo viene
ricondotto quindi alla
valutazione del peso
del volume ABCA e
della spinta sulla
superficie AC*

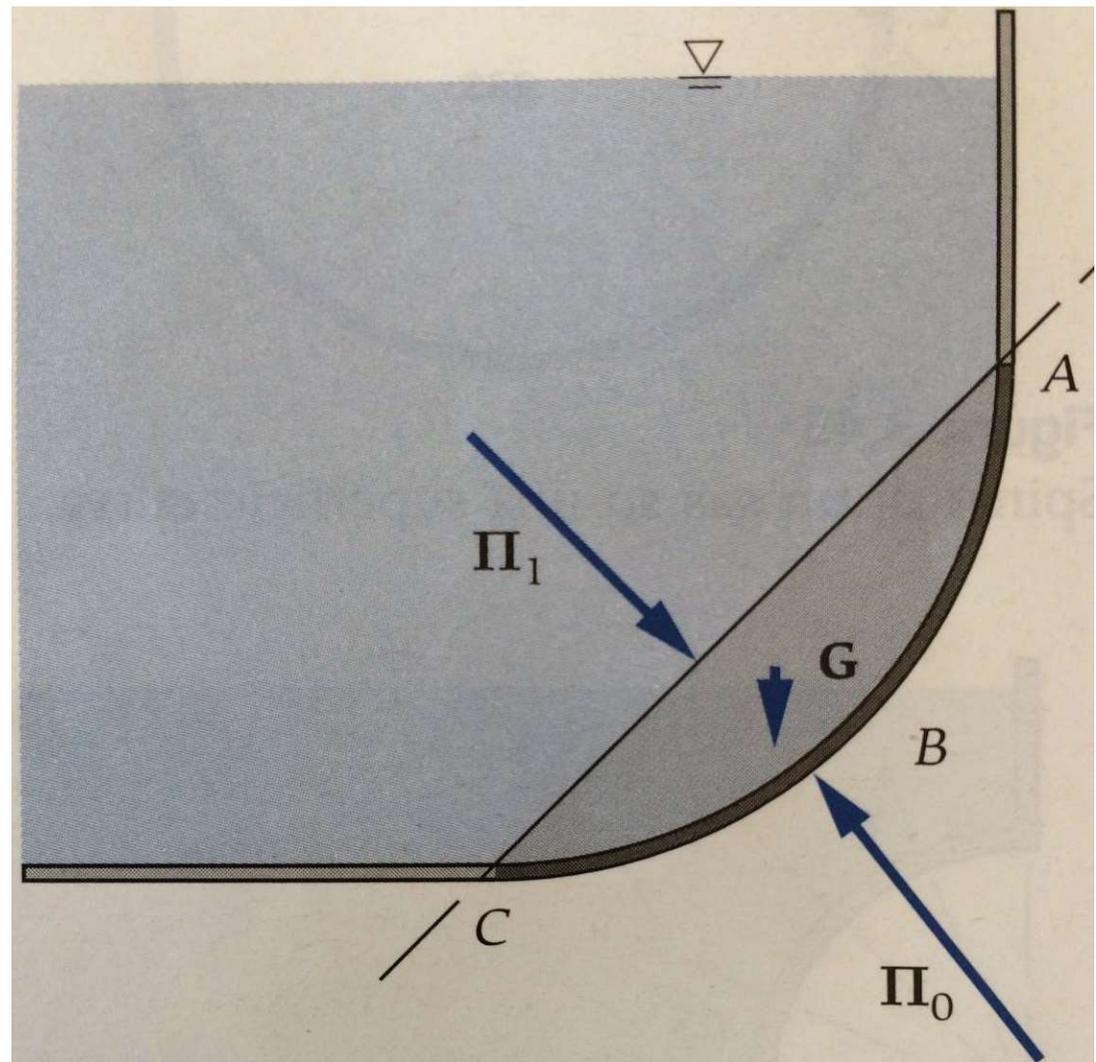


Figura 3.41

La spinta del liquido sulla superficie curva è uguale e contraria all'azione che la superficie curva esercita sul liquido.

L'equazione globale può essere scritta anche per un volume virtuale di liquido purchè nelle stesse condizioni di pressione di quello che determina la spinta

$$\underline{G} + \underline{\Pi}_0 + \underline{\Pi}_1 = 0$$

$$\underline{S} = \underline{\Pi}_0 = -\underline{G} - \underline{\Pi}_1$$

Se il fluido è un gas allora la forza peso è trascurabile e l'equazione diventa:

$$+ \underline{\Pi}_0 + \underline{\Pi}_1 = 0$$

$$\underline{S} = -\underline{\Pi}_0 = \underline{\Pi}_1$$

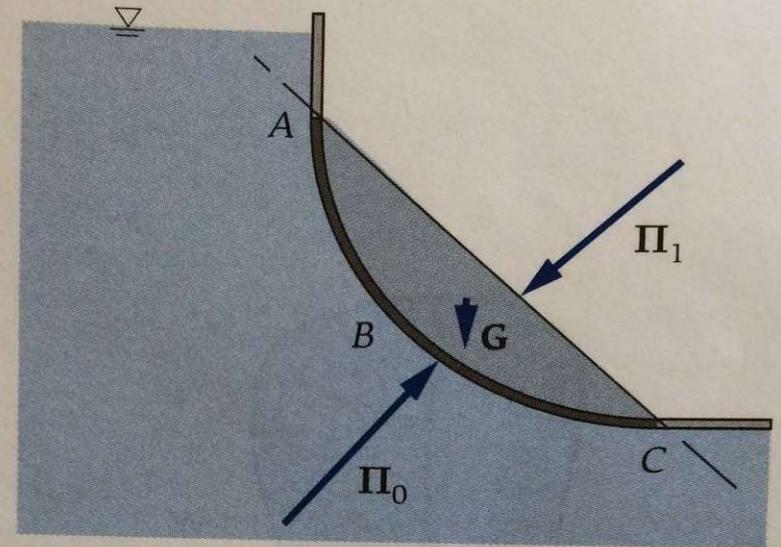


Figura 3.42

La spinta del liquido sulla superficie curva coincide con l'azione della superficie sul volume liquido virtuale ABCA.

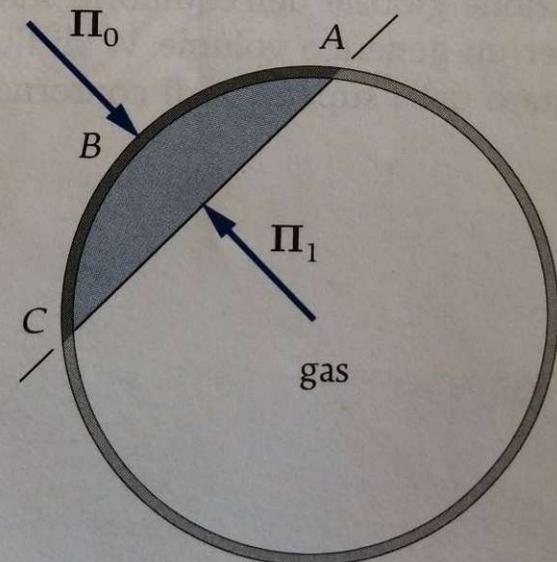


Figura 3.43

Spinta di un gas su una superficie curva.

La spinta su un arco di circonferenza passa per il centro della circonferenza stessa.

Posso determinare la spinta applicando il metodo delle componenti come visto precedentemente

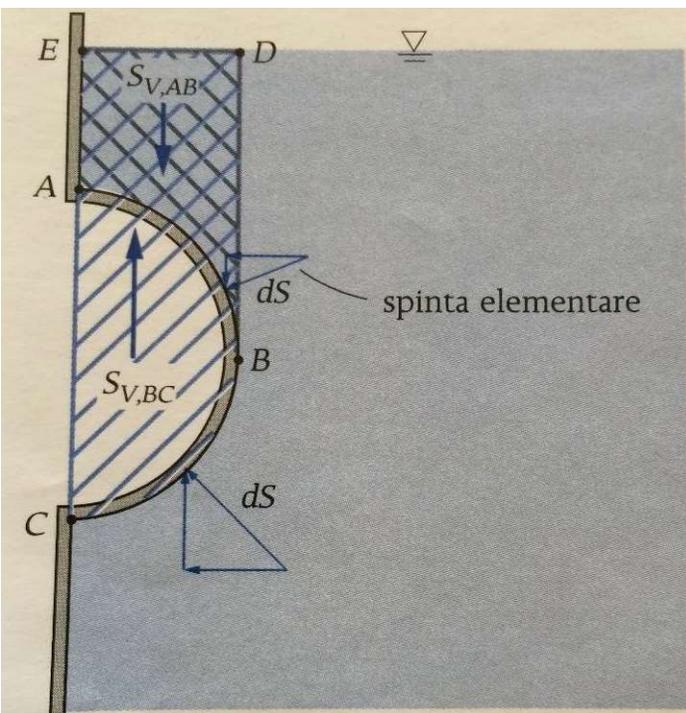


Figura 3.39

Se la superficie ha una tangente verticale bisogna considerare separatamente le due parti individuate dal punto di tangenza.

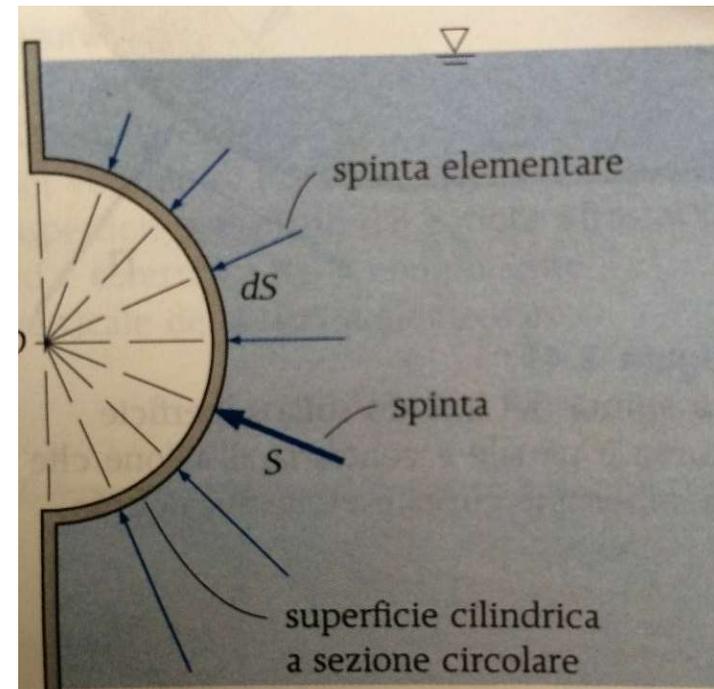


Figura 3.44

La spinta su una superficie a curvatura costante passa per il centro di curvatura.

Posso determinare la spinta applicando il metodo delle componenti come visto precedentemente

Per la componente verticale considero il peso della parte superiore AEDB e sottraggo il peso della parte (reale e virtuale) CEDB.

Per la parte orizzontale considero la spinta su AC

ESEMPIO 3.8 Paratoia cilindrica

Un cilindro di raggio $R = 1,2$ m, incernierato in A (Figura 3.46), è usato come paratoia automatica. Quando il livello dell'acqua raggiunge i 4,8 m rispetto al fondo, la paratoia si apre ruotando attorno alla cerniera in A, posta ad altezza dal fondo uguale a R . Determinare (per unità di lunghezza del cilindro): **(a)** la spinta sul cilindro e la sua retta d'azione in corrispondenza dell'apertura della paratoia; **(b)** il peso del cilindro.

Ipotesi L'attrito alla cerniera è trascurabile.

Proprietà La densità dell'acqua è pari a 1000 kg/m^3 .

Analisi

(a) La proiezione della superficie premuta su un piano verticale è un rettangolo di altezza R e lunghezza unitaria. Pertanto, la componente orizzontale della spinta vale

$$S_O = \rho g h_{Gx} A_x = \rho g (s + R/2) R \times 1 = 1000 \times 9,81 \times (3,6 + 1,2/2) \times 1,2 \times 1 = 49,4 \text{ kN}$$

Il volume di liquido compreso tra la paratoia e il piano dei carichi idrostatici ha lunghezza unitaria e area trasversale data dalla somma del rettangolo di altezza s e base R e del quarto di cerchio sottostante. Pertanto, la componente verticale, diretta verso l'alto, vale

$$S_V = \rho g W_T = \rho g \left(sR + \frac{\pi R^2}{4} \right) \times 1 = 1000 \times 9,81 \times (3,6 \times 1,2 + \pi \times 1,2^2 / 4) = 53,5 \text{ kN}$$

La spinta per unità di lunghezza ha modulo

$$S = \sqrt{S_O^2 + S_V^2} = \sqrt{49,4^2 + 53,5^2} = 72,8 \text{ kN}$$

e forma con l'orizzontale l'angolo

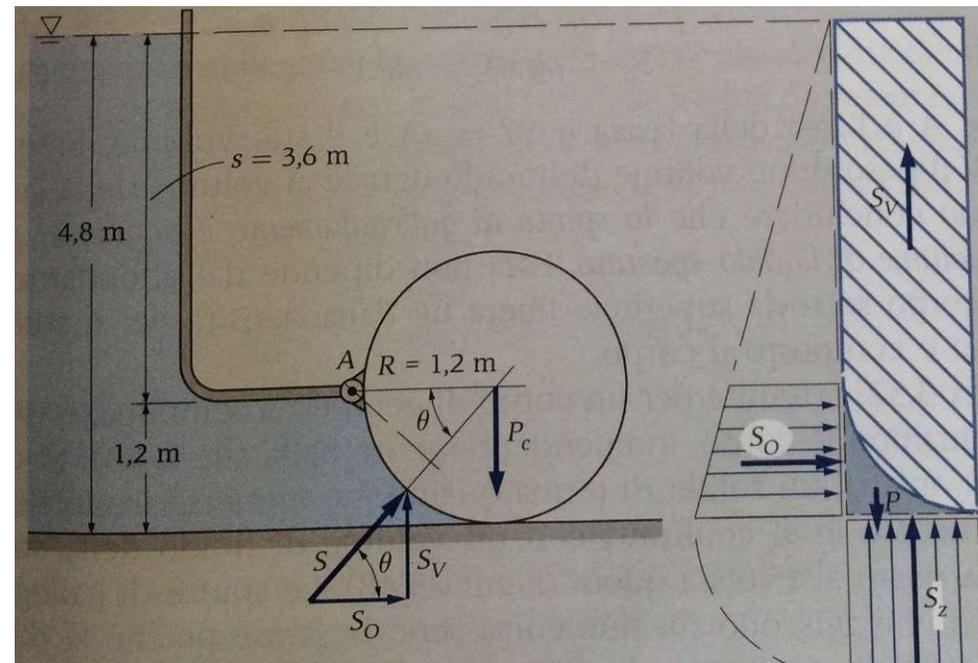
$$\theta = \arctan(S_V/S_O) = \arctan(53,5/49,4) = \arctan 1,08 = 47,2^\circ$$

(b) Quando il livello dell'acqua è a 4,8 m dal fondo, la paratoia è sul punto di aprirsi e la reazione del fondo sul cilindro è nulla. Le forze che agiscono sul cilindro, oltre alla reazione della cerniera, sono il suo peso, applicato nel baricentro, e la spinta idrostatica. Per l'equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera, si ha

$$S \cdot R \sin \theta - P_c \cdot R = 0$$

da cui

$$P_c = S \sin \theta = S_V = 53,5 \text{ kN}$$



Spinte su corpi immersi:

La spinta che subisce un corpo immerso (es. figura 3.47) è:

$$S = \gamma s A = \gamma W$$

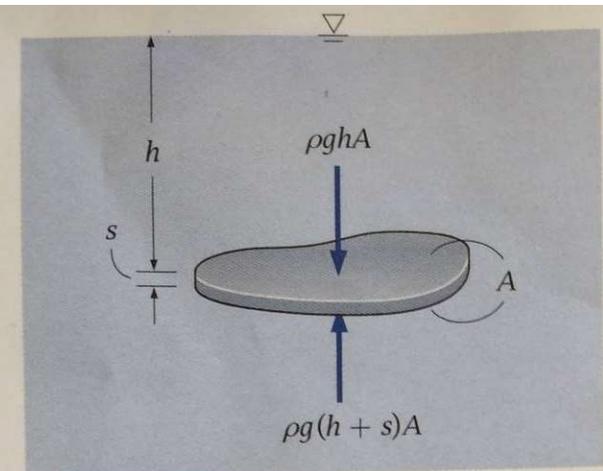


Figura 3.47

Lastra piana di spessore s immersa in un liquido parallelamente alla superficie libera.

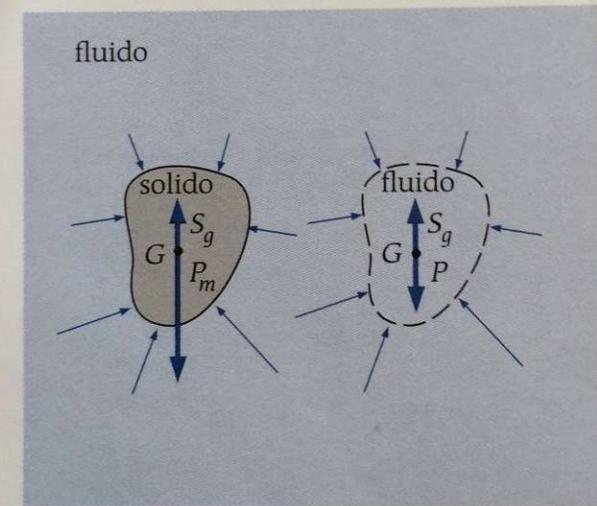
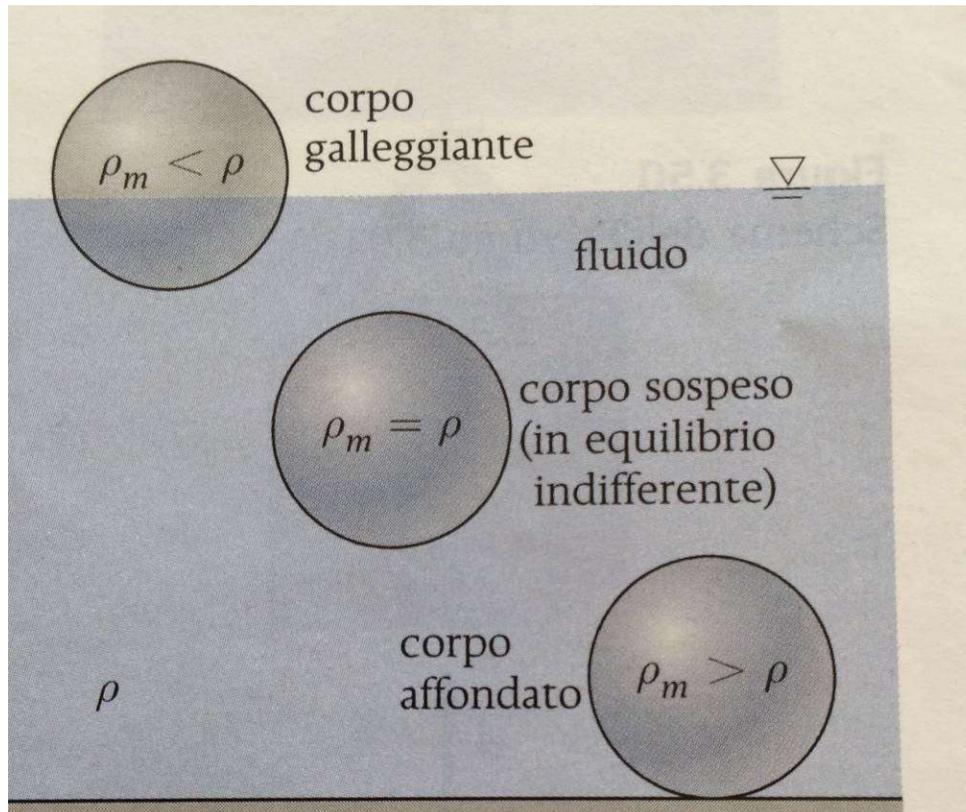


Figura 3.48

La spinta di galleggiamento che agisce su un solido immerso è uguale a quella che si esercita su un volume di fluido avente lo stesso contorno. Pertanto, è uguale al peso del volume di fluido spostato, è applicata nel baricentro del volume di fluido ed è diretta verso l'alto.

ESEMPIO 3.10 Peso di un corpo immerso in acqua

Alcuni grossi blocchi vengono calati in mare con una gru per realizzare una costruzione sott'acqua (Figura 3.51). Determinare la tensione della fune della gru quando solleva un blocco di calcestruzzo del volume di $0,5 \text{ m}^3$ **(a)** sospeso in aria e **(b)** completamente immerso in acqua.

Ipotesi 1 La spinta di galleggiamento dell'aria è trascurabile. 2 Il peso proprio della fune è trascurabile.

Proprietà La densità dell'acqua di mare è $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$ e quella del calcestruzzo $\rho_c = 2300 \text{ kg/m}^3$.

Analisi

(a) In aria, le forze che agiscono sul blocco di calcestruzzo sono il peso proprio P e la tensione T_a della fune, che, per l'equilibrio, deve essere uguale al peso proprio del blocco. Per cui

$$T_a = P = \rho_c g W = 2300 \times 9,81 \times 0,5 = 11,3 \text{ kN}$$

(b) Quando il blocco è completamente immerso, su di esso agisce, oltre al peso proprio P e alla tensione della fune T_i , anche la spinta di galleggiamento S_g , diretta verso l'alto. Per l'equilibrio delle forze, si ha

$$\begin{aligned} T_i = P - S_g &= \rho_c g W - \rho g W = g W (\rho_c - \rho) = \\ &= 9,81 \times 0,5 \times (2300 - 1025) = 6,25 \text{ kN} \end{aligned}$$

Discussione Per effetto della spinta di Archimede, è come se il peso del blocco immerso, e quindi la tensione della fune, diminuisse quasi della metà.

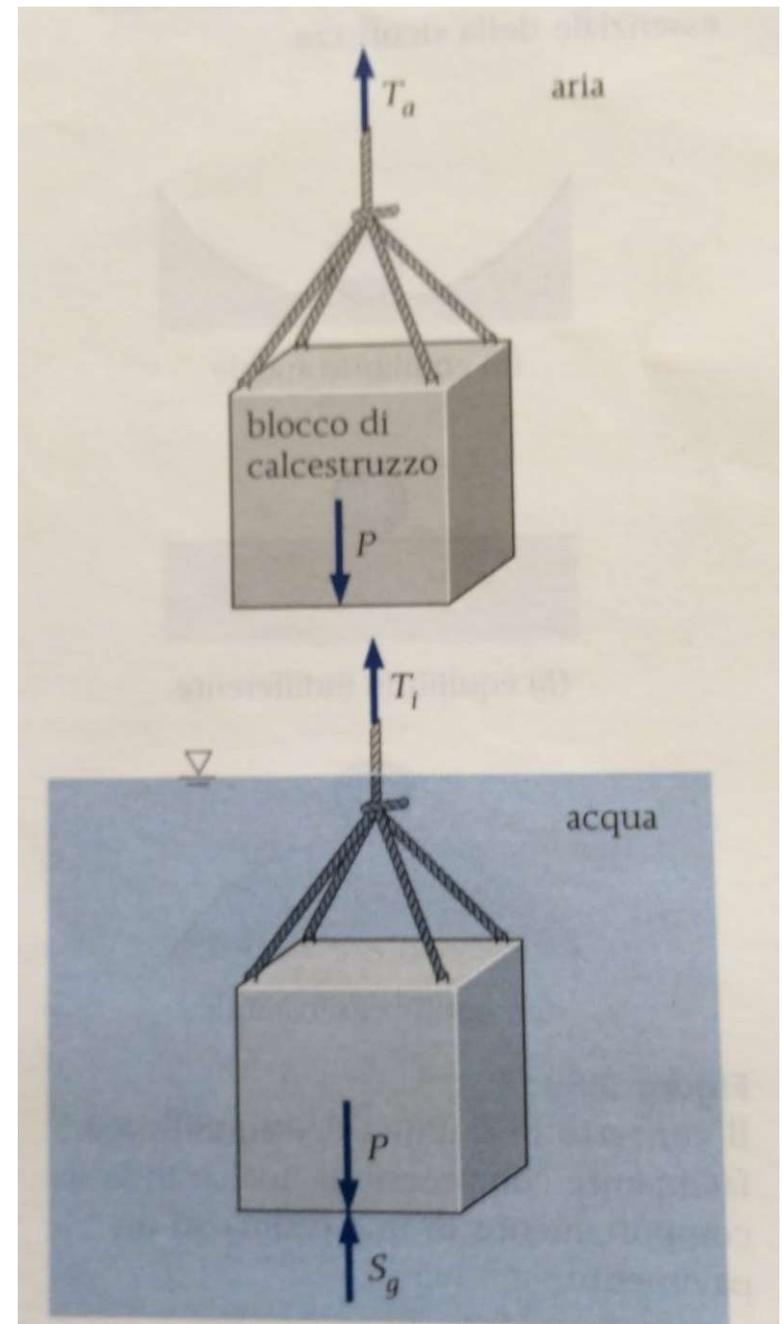
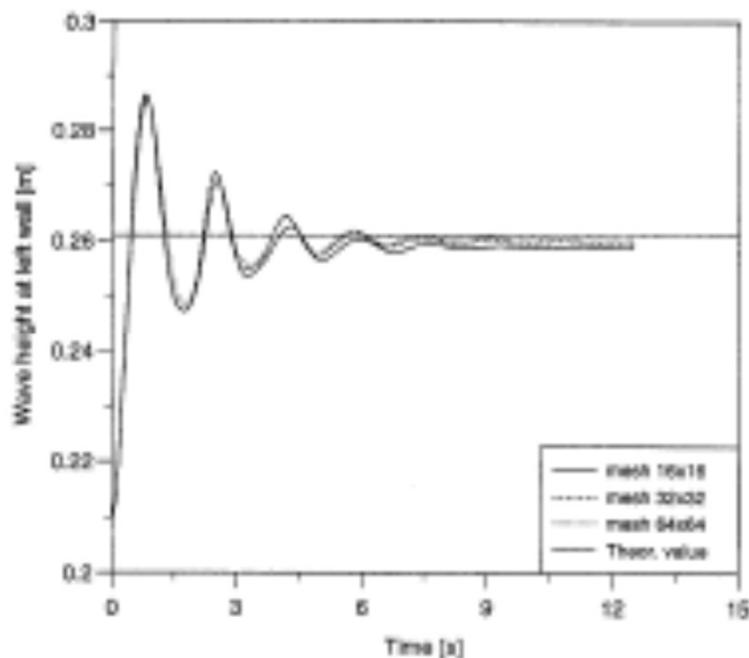


Figura 3.51
Schema dell'Esempio 3.10.

Moto rigido dei fluidi (generalità)

Un fluido in un contenitore in movimento assume una configurazione statica se il contenitore è posto con accelerazione lineare costante o velocità angolare costante.

Dopo un transitorio durante il quale il fluido si muove dalla condizione iniziale a quella finale, il fluido si troverà in equilibrio statico, soggetto ad un sistema di forze applicate. Il fluido si muoverà di moto rigido



La figura mostra il transitorio nel caso di un serbatoio a superficie libera accelerato impulsivamente. L'oscillazione rappresenta il livello del liquido sulla parte opposta alla direzione del moto

Moto rigido dei fluidi (generalità)

Nelle nuove condizioni statiche le azioni tangenziali saranno nulle e si avrà una diversa distribuzione di pressione rispetto alla situazione iniziale (contenitore fermo)

Domanda:

- 1) Qual è la distribuzione di pressione nel fluido?*
- 2) Che configurazione assume la superficie libera?*

Importanza pratica: fluidi trasportati in cisterne (benzina, acqua, latte...)

Moto rigido dei fluidi (equazione indefinita)

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

$$\rho\bar{a} = -\mathbf{grad}(p) - \rho g\bar{k}$$

Se l'accelerazione a è nulla, come caso particolare ritroviamo l'equazione indefinita per i fluidi pesanti.

Se il contenitore è in caduta libera (soggetto ad una accelerazione $a=g$ verso il basso), l'equazione restituisce $\mathbf{grad}(p)=0$ e quindi la pressione non varia nello spazio (praticamente come essere in assenza di gravità). L'unica forza presente è la tensione superficiale

L'equazione dice che il gradiente di pressione è parallelo al risultante delle forze di massa $\rho(\bar{a} + \bar{g})$ che significa che le superfici a pressione costante sono ortogonali al vettore risultante delle accelerazioni

Moto rigido dei fluidi

(contenitore soggetto ad accelerazione costante orizzontale)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + a_z) \quad (3.67)$$

Quindi, la pressione non dipende da y . Per la 3.67, il differenziale totale di $p = p(x, z)$, che è $dp = (\partial p/\partial x) dx + (\partial p/\partial z) dz$, diventa

$$dp = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z) dz \quad (3.68)$$

che, integrando tra due punti 1 e 2, fornisce, per $\rho = \text{costante}$, la differenza di pressione

$$p_2 - p_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1) \quad (3.69)$$

Assumendo il punto 1 coincidente con l'origine ($x_1 = 0, z_1 = 0$), dove la pressione è p_0 , e il punto 2 come un punto generico all'interno della massa fluida, la distribuzione di pressione può essere espressa come

$$p = p_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_z) z \quad (3.70)$$

Per la 3.69, la differenza di quota Δz tra due punti 1 e 2 sulla superficie libera (Figura 3.61), dove $p = p_1 = p_2 = \text{costante}$, vale

$$\Delta z = z_2 - z_1 = -\frac{a_x}{g + a_z}(x_2 - x_1) \quad (3.71)$$

L'equazione delle superfici a pressione costante, chiamate **isobare**, si ottiene dalla 3.68, ponendo $dp = 0$. Indicando con z_i la quota del generico punto di un'isobara, si ha

$$\frac{dz_i}{dx} = -\frac{a_x}{g + a_z} = \text{costante} \quad (3.72)$$

Pertanto, si può concludere che, in un fluido incompressibile in moto rettilineo uniformemente accelerato, le isobare (e quindi anche la superficie libera) sono superfici *piane* parallele la cui traccia, nel piano xz , è inclinata rispetto all'orizzontale dell'angolo

$$\theta = \arctan \frac{a_x}{g + a_z} \quad (3.73)$$

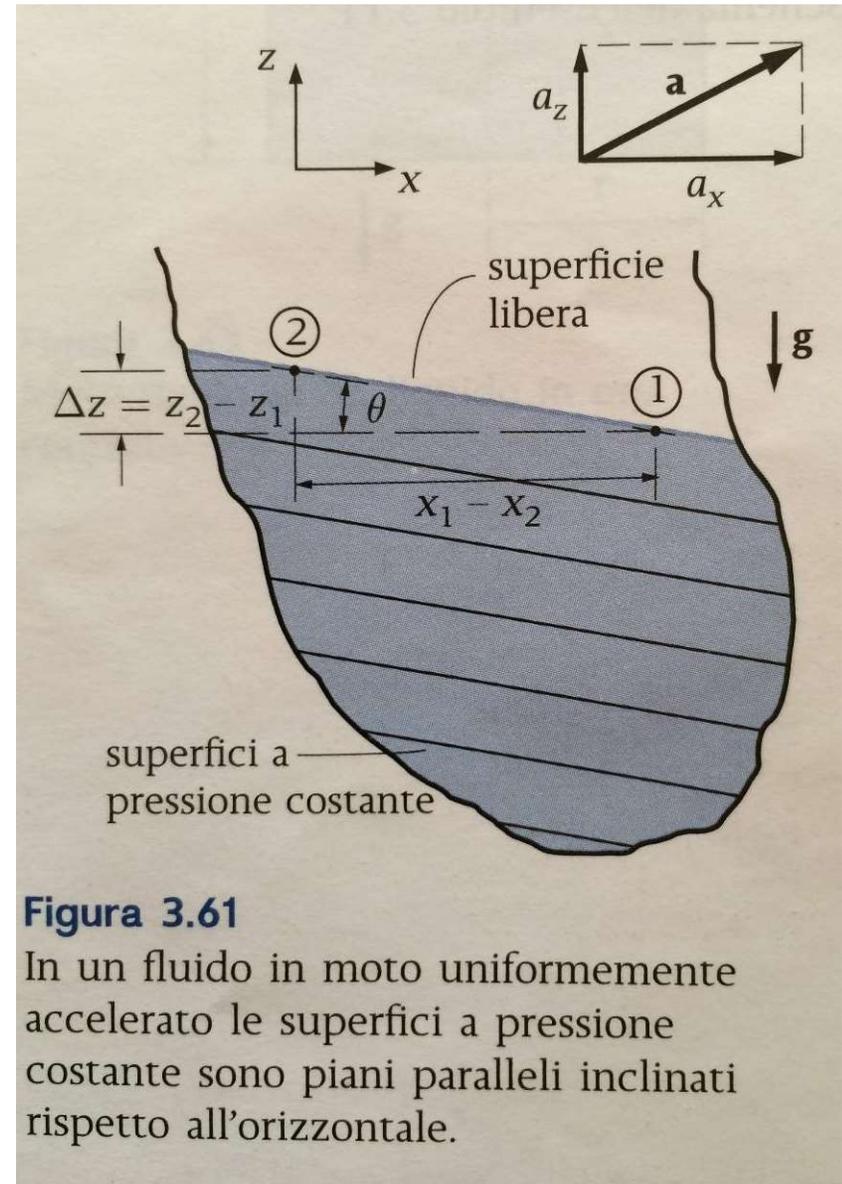


Figura 3.61

In un fluido in moto uniformemente accelerato le superfici a pressione costante sono piani paralleli inclinati rispetto all'orizzontale.

ESEMPIO 3.11 Trasporto di un contenitore d'acqua

Un contenitore, di altezza $h = 80$ cm e sezione trasversale rettangolare di lati $a = 2$ m e $b = 0,6$ m (Figura 3.62), viene utilizzato per il trasporto di acqua su un camion in grado di raggiungere la velocità di 90 km/h in 10 s, con partenza da fermo. Determinare l'altezza massima di riempimento del contenitore affinché il liquido non trabocchi durante l'accelerazione e se è preferibile disporre nella direzione del moto il lato corto o quello lungo.

Ipotesi 1 La strada è orizzontale per cui l'accelerazione non ha componente verticale ($a_z = 0$). **2** Gli effetti dovuti alle frenate e all'attraversamento di dossi sono trascurabili. **3** L'accelerazione si mantiene costante.

Analisi Si assume come asse x la direzione del moto, come asse z la direzione verticale verso l'alto e come origine lo spigolo inferiore sinistro del contenitore. Se il camion passa da 0 a 90 km/h in 10 s l'accelerazione vale

$$a_x = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{90 - 0}{10} \times \frac{1000}{3600} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Per la 3.73, l'angolo che la superficie libera forma con l'orizzontale vale

$$\theta = \arctan \frac{a_x}{g + a_z} = \arctan \frac{2,5}{9,81 + 0} = \arctan 0,255 = 14,3^\circ$$

Durante l'accelerazione, la superficie libera ruota attorno all'asse orizzontale in mezz'aria, ortogonale alla direzione del moto, innalzandosi nella parte posteriore e abbassandosi della stessa quantità nella parte anteriore. L'innalzamento massimo della superficie libera rispetto al piano di mezz'aria vale $\Delta z = (L/2) \tan \theta$, essendo L la dimensione del contenitore nella direzione del moto. In particolare, esso vale

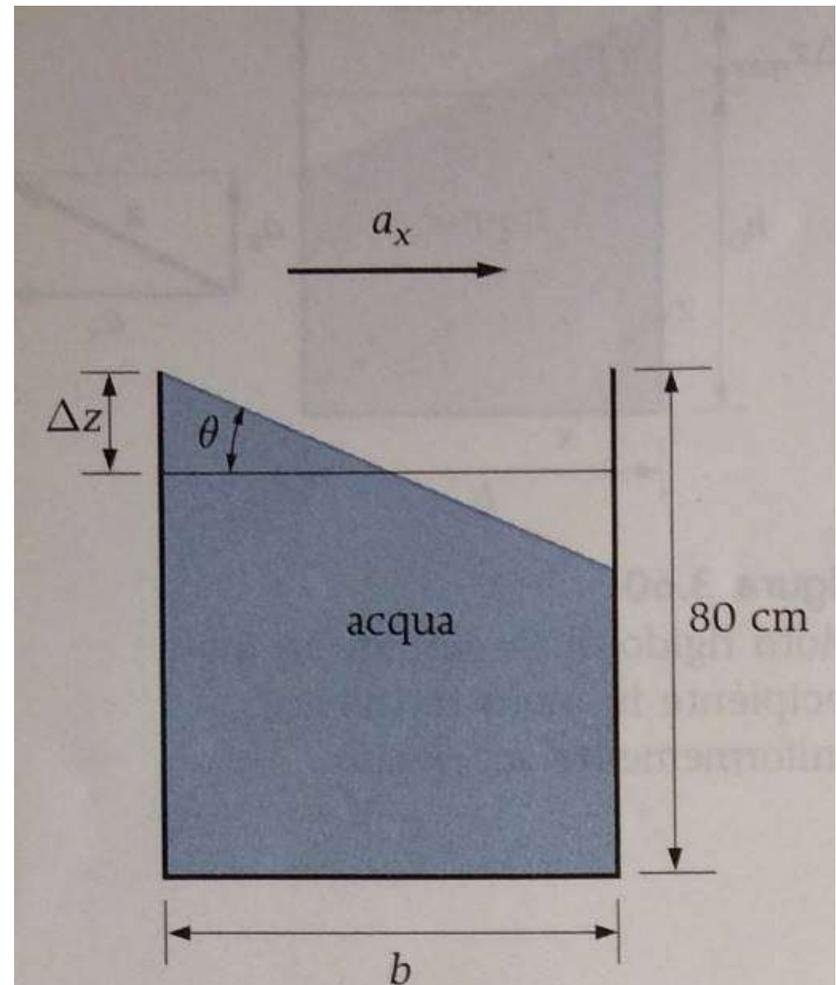
Caso 1 - Lato lungo allineato con la direzione del moto:

$$\Delta z_1 = (a/2) \tan \theta = 2/2 \times 0,255 \text{ m} = 0,255 \text{ m} = 25,5 \text{ cm}$$

Caso 2 - Lato corto allineato con la direzione del moto:

$$\Delta z_2 = (b/2) \tan \theta = 0,6/2 \times 0,255 \text{ m} = 0,076 \text{ m} = 7,6 \text{ cm}$$

Conviene, pertanto, disporre il contenitore col lato corto nella direzione del moto, riempiendolo al massimo fino a 7,6 cm al di sotto del bordo superiore.



Moto rigido dei fluidi (contenitore a ω costante)

Poiché il contenitore ha forma cilindrica e le particelle descrivono traiettorie circolari, conviene analizzare il problema usando coordinate cilindriche (r, θ, z) , essendo z coincidente con l'asse del cilindro, positivo verso l'alto. L'accelerazione centripeta su una particella di fluido che ruota con velocità angolare costante ω , a distanza r dall'asse di rotazione, vale $r\omega^2$ ed è diretta radialmente verso l'asse (direzione r negativa), per cui $a_r = -r\omega^2$. Il moto è simmetrico rispetto all'asse z e quindi non dipende da θ . Pertanto, $p = p(r, z)$ e $a_\theta = 0$. Anche $a_z = 0$ poiché non vi è moto nella direzione z .

Quindi, per liquidi in rotazione, le 3.64 diventano

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.74)$$

e il differenziale totale di $p(r, z)$, che è

$$dp = (\partial p / \partial r) dr + (\partial p / \partial z) dz$$

diventa

$$dp = \rho r \omega^2 dr - \rho g dz \quad (3.75)$$

Ponendo $dp = 0$, si ottiene l'equazione delle superfici a pressione costante

$$\frac{dz_i}{dr} = \frac{r\omega^2}{g} \quad (3.76)$$

e, integrando,

$$z_i = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C \quad (3.77)$$

che è l'equazione di un *paraboloide*. Si può, quindi, concludere che le superfici a pressione costante, compresa la superficie libera, sono *paraboloidi di rivoluzione* (Figura 3.64).

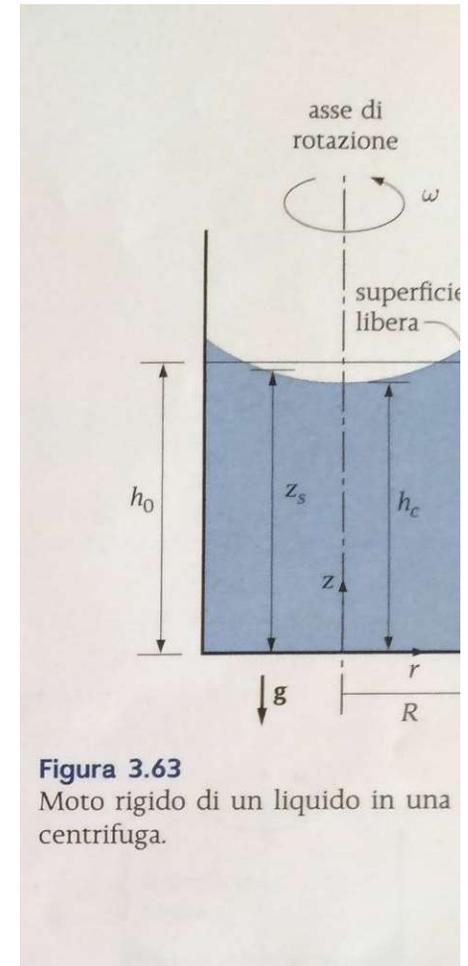
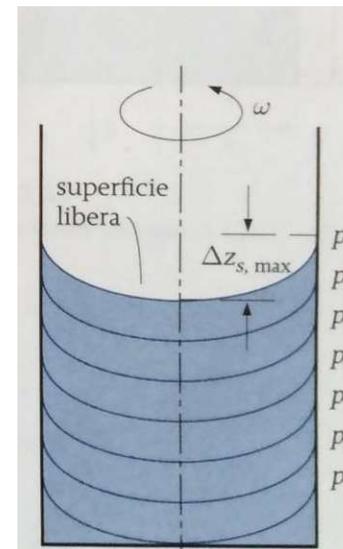


Figura 3.63
Moto rigido di un liquido in una centrifuga.



Per determinare la costante di integrazione considero che $C=z$ per $R=0$ e quindi C è uguale all'altezza del liquido al centro del contenitore

$$z_s = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_C \quad (3.78)$$

in cui z_s è l'altezza dal fondo del contenitore di un punto della superficie libera a distanza r dall'asse. L'analisi svolta presuppone che nella centrifuga ci sia liquido in quantità sufficiente a mantenere coperto il fondo.

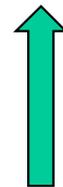
Per determinare h_C calcolo il volume del paraboloide e lo eguaglio al volume iniziale:

Il volume di un anello cilindrico di raggio r , altezza z_s e spessore dr vale $dW = 2\pi r z_s dr$. Pertanto, il volume del paraboloide formato dalla superficie libera è

$$\begin{aligned} W &= \int_0^R 2\pi z_s r dr = 2\pi \int_0^R \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_C \right) r dr = \\ &= \pi R^2 \left(\frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_C \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Poiché la massa si conserva e la densità è costante, questo volume deve essere uguale al volume di liquido a contenitore fermo, pari a $\pi R^2 h_0$. Uguagliando questi due volumi, si ottiene l'altezza h_C del fluido in corrispondenza dell'asse del contenitore

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g} (R^2 - 2r^2)$$



$$h_C = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

La massima altezza verticale si ha al bordo, per $r = R$, e vale

$$z_{s,\max} = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (3.82)$$

Dal confronto con la 3.80, risulta che il liquido si innalza al bordo della stessa quantità di cui si abbassa in corrispondenza dell'asse. La differenza tra l'altezza al bordo e quella sull'asse è

$$\Delta z_{s,\max} = \left(h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right) - \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right) = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (3.83)$$

Per $\rho = \text{costante}$, integrando la 3.75, si ottiene la differenza di pressione tra due punti 1 e 2

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g(z_2 - z_1) \quad (3.84)$$

Assumendo il punto 1 in corrispondenza dell'origine ($r_1 = 0$, $z_1 = 0$), dove la pressione è p_0 , e come punto 2 un generico punto, si ottiene la legge di distribuzione della pressione nel fluido

$$p = p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}r^2 - \rho g z \quad (3.85)$$

ESEMPIO 3.12 Innalzamento della superficie libera in una centrifuga

Un recipiente cilindrico verticale di altezza $h = 60$ cm e raggio $R = 10$ cm, contenente liquido di densità $\rho = 850$ kg/m³ per un'altezza $h_0 = 50$ cm, viene posto in rotazione a velocità costante (Figura 3.65). Determinare il valore della velocità angolare ω in corrispondenza della quale il liquido si innalza fino a raggiungere il bordo del contenitore.

Ipotesi 1 L'aumento di velocità angolare è molto lento così che il liquido si comporta sempre come un corpo rigido. 2 La quantità di liquido è tale da coprire sempre il fondo del contenitore.

Analisi Assumendo come asse z l'asse del cilindro, positivo verso l'alto e con origine al fondo del cilindro, l'altezza che il liquido raggiunge in corrispondenza del bordo è data dalla 3.82, dalla quale

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{4g(z_{s,\max} - h_0)}$$

Imponendo che l'altezza $z_{s,\max}$ del liquido in corrispondenza del bordo del contenitore sia uguale all'altezza h del contenitore stesso, si ha

$$\omega = \frac{1}{0,1} \sqrt{4 \times 9,81 \times (0,6 - 0,5)} = 19,8 \text{ rad/s}$$

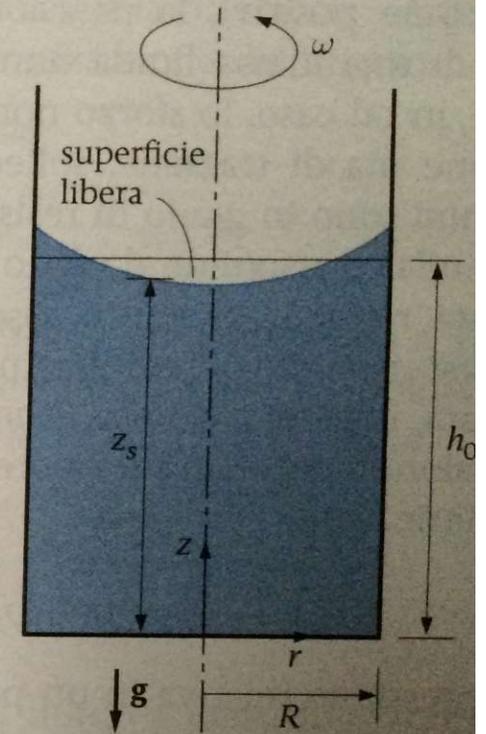


Figura 3.65
Schema dell'Esempio 3.12.