Yunus A. Çengel
John M. Cimbala

per l'edizione italiana
Giuseppe Cozzo
Cinzia Santoro

Meccanica dei fluidi

Seconda edizione

Soluzione dei problemi
Capitolo 3

McGraw-Hill

Indice

STATICA DEI FLUIDI 3

SOMMARIO

In un fluido in quiete, non essendovi moto relativo, non vi sono sforzi tangenziali. Conseguentemente, lo sforzo normale in un punto ha modulo costante, cioè indipendente dalla direzione. Tale modulo dello sforzo normale, che ha le dimensioni di una forza per unità di area, è chiamato *pressione* e si misura in *pascal* (1 Pa = 1 N/m^2). Assumendo gli sforzi di compressione come positivi, la pressione p in un generico punto di una massa fluida non può essere negativa perché, in tal caso, lo sforzo non sarebbe più di compressione ma di trazione, sollecitazione alla quale i fluidi non sono in grado di resistere. Lo stato di pressione nulla corrisponde al vuoto assoluto. La pressione misurata rispetto al vuoto assoluto viene chiamata *pressione assoluta* o semplicemente *pressione*. Viene chiamata, invece, *pressione relativa* p_r la differenza tra la pressione assoluta p e il valore locale della pressione atmosferica p_{atm}

$$p_r = p - p_{\text{atm}} \tag{3.2}$$

Se la pressione relativa in un punto è minore di zero (cioè se la pressione assoluta in quel punto è minore della pressione atmosferica) si dice che il fluido in quel punto è in *depressione*; tale depressione vale

$$p_d = p_{\text{atm}} - p \tag{3.3}$$

In un fluido in quiete la pressione varia con la quota con la legge

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{3.15}$$

essendo l'asse z positivo verso l'alto. I fluidi che possono essere considerati praticamente incomprimibili (come i liquidi) hanno densità $\rho =$ costante e peso specifico $\gamma = \rho g =$ costante. Per tali fluidi, integrando, si ottiene

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{costante} \tag{3.10}$$

nota come *legge di Stevin*. Pertanto, nota la pressione in un punto 1 di quota z_1, la pressione in un punto 2 di quota $z_2 < z_1$ vale

$$p_2 = p_1 + \gamma(z_1 - z_2) = p_1 + \gamma h$$

essendo $h = z_1 - z_2$ il dislivello fra i due punti.
La quantità p/γ prende il nome di *altezza piezometrica*, mentre la somma di quota geodetica e di altezza piezometrica prende il nome di *quota piezometrica*. Per la legge di Stevin, tutti i punti di una massa fluida (incomprimibile) in quiete hanno la stessa quota piezometrica, che è la quota del piano in cui la pressione (relativa o assoluta) è nulla. Tale piano prende il nome di *piano dei carichi idrostatici* (relativi o assoluti).
Se il liquido in quiete è a contatto con l'atmosfera la superficie di separazione, essendo la pressione atmosferica localmente costante, deve essere orizzontale. Tale superficie, che viene detta superficie libera, coincide con il piano dei carichi idrostatici relativi. In un punto a profondità h rispetto alla superficie libera si ha la pressione relativa

$$p_r = \gamma h \tag{3.13}$$

Viceversa, nota la pressione in un punto di una massa fluida (incomprimibile) in quiete, il suo piano dei carichi idrostatici relativi si trova più in alto del punto a distanza

$$h = p_r/\gamma$$

Conseguenza della legge di Stevin è la *legge di Pascal*, per la quale, in un fluido confinato, un aumento locale della pressione fa aumentare della stessa quantità la pressione in tutti gli altri punti.
La misura della pressione nei recipienti chiusi si effettua con i *manometri* (semplici, differenziali, metallici). Si chiamano *barometri* i dispositivi che misurano la pressione atmosferica.
La spinta che un liquido omogeneo in quiete esercita su una superficie piana è un vettore ortogonale alla superficie, di modulo uguale al prodotto della pressione p_G nel baricentro della superficie per l'area A della superficie

$$S = p_G A = \gamma h_G A = \rho g h_G A \tag{3.26}$$

dove h_G è l'*affondamento* del baricentro sotto il piano dei carichi idrostatici del liquido.
La spinta è applicata in un punto (*centro di spinta*) che dista dal baricentro, lungo una linea di massima pendenza, di una quantità (*eccentricità*)

$$e = \frac{I_0}{M} \tag{3.31}$$

dove M è il momento statico della superficie rispetto alla retta intersezione tra il piano che contiene la superficie e il piano dei carichi idrostatici (*retta di sponda*) ed I_0 è il momento di inerzia della superficie rispetto all'asse baricentrico orizzontale parallelo alla retta di sponda.
La spinta calcolata con riferimento alle pressioni assolute è diretta sempre dal liquido verso la superficie. Se, invece, si fa riferimento alle pressioni relative, la spinta è diretta dal liquido verso la superficie se $p_{r,G} > 0$ e dalla superficie verso il liquido se $p_{r,G} < 0$ (liquido in depressione).
La spinta su una superficie curva si determina calcolandone le componenti, verticale e orizzontali, secondo tre direzioni ortogonali. La componente verticale è uguale al peso del volume di fluido compreso tra la superficie e il piano dei carichi idrostatici. Le componenti orizzontali sono uguali, in modulo e retta d'azione, alle spinte sulle superfici piane che si ottengono proiettando la superficie curva su due piani verticali ortogonali.
Su un corpo immerso, un fluido esercita una forza verso l'alto, chiamata *spinta di galleggiamento*

$$S_g = \rho g W \tag{3.52}$$

pari al peso del volume W di liquido spostato e applicata nel suo baricentro (*principio di Archimede*). Per un corpo parzialmente immerso (*galleggiante*) la porzione di volume immersa è pari al rapporto tra la densità media del corpo e la densità del fluido.
Un fluido contenuto in un recipiente in movimento si comporta come un corpo rigido la cui equazione del moto è

$$\nabla p + \rho g \mathbf{k} = -\rho \mathbf{a} \tag{3.62}$$

o, in forma scalare,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

in cui a_x, a_y e a_z sono, rispettivamente, le componenti dell'accelerazione nelle direzioni x, y e z.
In un moto rettilineo uniformemente accelerato nel piano xz, la distribuzione di pressione è espressa dalla

$$p = p_0 - \rho a_x x - \rho(g + a_z)z \tag{3.70}$$

dove p_0 è la pressione in corrispondenza dell'origine ($x = 0$, $z = 0$). Le superfici a pressione costante (*isobare*) sono superfici piane parallele la cui traccia, nel piano xz, è inclinata rispetto all'orizzontale dell'angolo

$$\theta = \arctan \frac{a_x}{g + a_z} \tag{3.73}$$

In una centrifuga di raggio R, in rotazione a velocità angolare costante ω, le isobare sono paraboloidi di rivoluzione. La superficie libera ha equazione

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2) \tag{3.81}$$

dove h_0 è l'altezza del fluido a centrifuga ferma e z_s è la quota rispetto al fondo di un punto della superficie libera a distanza r dall'asse. La pressione varia con la legge

$$p = p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}r^2 - \rho g z \tag{3.85}$$

in cui p_0 è la pressione al fondo sull'asse ($r = 0$, $z = 0$).

PROBLEMI

Pressione, manometro e barometro

3.1 Qual è la differenza tra pressione relativa e pressione assoluta?

Analisi In un generico punto di una massa fluida in quiete lo sforzo agisce solo in direzione normale alla giacitura dell'elementino che contiene il punto ed ha, pertanto, modulo indipendente dalla giacitura stessa, variando solo al variare del punto. La *pressione assoluta* in un punto di una massa fluida in quiete è il modulo di tale sforzo normale; la *pressione relativa* p_r in un punto è la differenza tra la pressione assoluta p in quel punto e la pressione atmosferica p_{atm}

$$p_r = p - p_{\text{atm}}$$

3.2 Perché, ad altitudini elevate, si hanno difficoltà di respirazione?

Analisi Al crescere dell'altitudine la pressione atmosferica diminuisce e, con essa, per l'equazione di stato dei gas perfetti 2.4, aumenta il volume specifico (cioè il volume dell'unità di massa) dell'atmosfera e, quindi, diminuisce la massa dell'unità di volume (cioè la densità). Ciò comporta che nell'unità di volume sia presente una minore quantità di ossigeno. Questo fatto, a sua volta, causa difficoltà respiratorie.

3.3 In un liquido di densità costante la pressione assoluta raddoppia se si raddoppia la profondità. È vero? Perché?

Analisi È falso. In un liquido di densità ρ costante, la pressione in un punto è data dalla 3.11

$$p = \gamma(z_0 - z) = \gamma h$$

in cui $\gamma = \rho g$ è il peso specifico del liquido, z_0 è la quota del piano dei carichi idrostatici assoluti, z la quota del generico punto ed h il suo affondamento rispetto al piano dei carichi idrostatici assoluti. Pertanto, la pressione assoluta varia linearmente con l'affondamento rispetto a tale piano. Tuttavia, abitualmente, la profondità di un punto di una massa liquida in quiete è misurata rispetto alla superficie libera, cioè rispetto alla superficie di separazione con l'atmosfera. In tal caso, la pressione in un punto alla profondità h rispetto alla superficie libera è data dalla 3.12

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g h$$

in cui p_{atm} è la pressione atmosferica. La pressione relativa p_r vale

$$p_r = p - p_{\text{atm}} = \rho g h$$

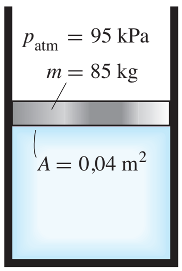
e varia linearmente con la profondità. Pertanto, se si raddoppia la profondità (rispetto alla superficie libera), raddoppia la pressione relativa, non la pressione assoluta.

3.4 Esprimere il principio di Pascal e darne un esempio reale.

Analisi Il principio di Pascal afferma che *un incremento di pressione applicato ad un volume finito di fluido fa aumentare la pressione della stessa quantità in tutto il volume*. Una sua applicazione è il martinetto idraulico, grazie al quale si può sollevare un peso molto grande applicando una forza relativamente piccola.

3.5 Due ventilatori identici, posti uno al livello del mare e l'altro in cima a un'alta montagna, sono in moto alla stessa velocità. Che rapporto c'è tra (*a*) le portate di massa e (*b*) le portate di volume dei due ventilatori?

Analisi La densità dell'aria al livello del mare è maggiore che in cima ad un'alta montagna. Di conseguenza, se i due ventilatori sono in moto alla stessa velocità, sono uguali le portate di volume, ma non le portate di massa. Al livello del mare, infatti, la portata di massa sarà maggiore che in alta montagna.



3.6 Il pistone che scorre in un cilindro contenente gas ha una sezione trasversale di 0,04 m^2 e massa di 85 kg. La pressione atmosferica locale è di 95 kPa. Calcolare la pressione all'interno del cilindro. Se il gas viene scaldato e il suo volume raddoppia, la pressione all'interno del cilindro varia o rimane costante?

Ipotesi L'attrito tra pistone e cilindro è trascurabile.
Analisi La pressione p del gas all'interno del cilindro dipende dalla pressione atmosferica e dal peso del cilindro. Infatti, per l'equilibrio alla traslazione verticale, deve essere

$$pA = p_{atm}A + mg$$

da cui

$$p = p_{atm} + \frac{mg}{A} = 95\,000 + \frac{85 \times 9{,}81}{0{,}04} = 116 \text{ kPa}$$

L'aumento di volume del gas non ha alcuna influenza sulle condizioni di equilibrio del pistone, per cui la pressione del gas rimane invariata. Se il gas si comporta come un gas perfetto, un raddoppio del volume comporta un raddoppio della temperatura assoluta. Infatti, per la 2.4, rimanendo costante la pressione, si ha

$$T_2 = \frac{w_2}{w_1} T_1 = 2\,T_1$$

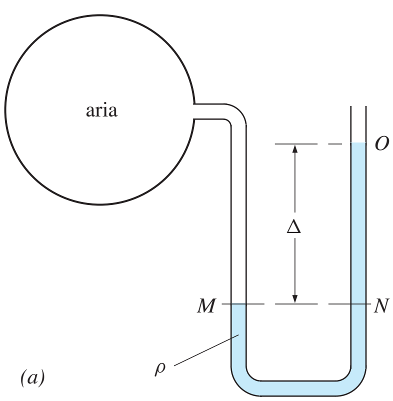
3.7 In una località in cui la pressione atmosferica è di 92 kPa, un vacuometro collegato a un serbatoio segna 24 kPa. Determinare la pressione assoluta nel serbatoio.

Analisi Il vacuometro misura la depressione p_d, che, per la 3.3

$$p_d = p_{atm} - p$$

è la differenza tra la pressione atmosferica p_{atm} e la pressione assoluta p. Pertanto, si ha

$$p = p_{atm} - p_d = 92 - 24 = 68 \text{ kPa}$$

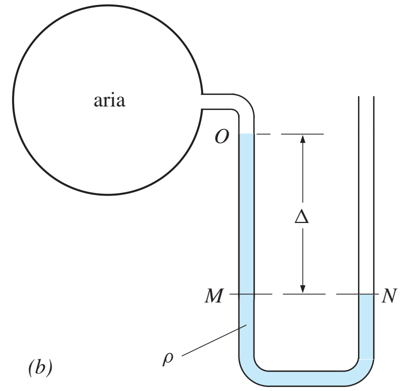


(*a*)

3.8 La pressione dell'aria contenuta in un serbatoio è misurata mediante un manometro semplice, contenente liquido avente densità relativa di 1,25. Essendo la differenza tra le quote dei menischi di 70 cm, determinare la pressione relativa dell'aria nel caso in cui il menisco a contatto con l'atmosfera sia (*a*) più in alto del menisco del ramo collegato al serbatoio o (*b*) più in basso.

Analisi Per la 2.2, la densità ρ del fluido manometrico è pari al prodotto della sua densità relativa ρ_r per la densità ρ_a dell'acqua

$$\rho = \rho_r \rho_a = 1{,}25 \times 1\,000 = 1\,250 \text{ kg/m}^3$$



(a) Per l'eguaglianza delle pressioni nei punti M ed N, ed essendo $p_O = p_{atm}$, si ha

$$p_M = p_N = p_{atm} + \rho g \Delta$$

Essendo l'aria un fluido di piccolo peso specifico, la pressione dell'aria contenuta nel serbatoio è uguale in tutti i punti. Pertanto, la sua pressione relativa p_r è uguale alla pressione relativa p_{rM} nel punto M, per cui

$$p_r = p_{rM} = p_M - p_{atm} = \rho g \Delta = 1\,250 \times 9{,}81 \times 0{,}70 = 8\,580 \text{ Pa}$$

(b) La pressione dell'aria è uguale alla pressione p_O nel punto O, che, per l'eguaglianza delle pressioni nei punti M ed N, ed essendo $p_N = p_{atm}$, è

$$p_O = p_M - \rho g \Delta = p_{atm} - \rho g \Delta$$

Pertanto, la pressione relativa p_r dell'aria contenuta nel serbatoio è

$$p_r = p_{rO} = p_O - p_{atm} = -\rho g \Delta = -1\,250 \times 9{,}81 \times 0{,}70 = -8\,580 \text{ Pa}$$

Essendo $p_r < 0$, l'aria contenuta nel serbatoio è in depressione.

3.9 In un liquido, la pressione relativa alla profondità di 3 m è di 28 kPa. Determinare la pressione relativa alla profondità di 12 m.

Analisi Sulla superficie libera la pressione è uguale a quella atmosferica. Pertanto, essendo la superficie in cui la pressione relativa è nulla, essa costituisce il piano dei carichi idrostatici relativi del liquido. Per la 3.12, la pressione relativa p_r in un liquido di densità ρ, costante, varia linearmente con la profondità h rispetto al piano dei carichi idrostatici relativi

$$p_r = \rho g h$$

Pertanto, il rapporto tra le pressioni relative p_{r1} e p_{r2} nei punti 1 e 2 di profondità, rispettivamente, h_1 e h_2 vale

$$\frac{p_{r1}}{p_{r2}} = \frac{\rho g h_1}{\rho g h_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

per cui

$$p_{r2} = p_{r1} \frac{h_2}{h_1} = 28 \times \frac{12}{3} = 112 \text{ kPa}$$

Discussione In un fluido in quiete la pressione relativa è proporzionale alla profondità.

3.10 La pressione assoluta in acqua alla profondità di 5 m è di 145 kPa. Determinare (*a*) la pressione atmosferica locale e (*b*) la pressione assoluta nello stesso luogo alla profondità di 5 m in un liquido la cui densità relativa è di 0,85.

Analisi In un liquido di densità costante ρ, per la 3.13, alla profondità h la pressione relativa p_r vale

$$p_r = \rho g h$$

Per la 3.2, essa è anche uguale alla differenza tra la pressione assoluta p in quel punto e la pressione atmosferica p_{atm}. Per cui

$$p_{atm} = p - p_r = p - \rho g h = 145\,000 - 1\,000 \times 9{,}81 \times 5 = 96 \text{ kPa}$$

Nello stesso luogo ed alla stessa profondità nel liquido di densità

$$\rho_1 = 0{,}85 \times 1\,000 = 850 \text{ kg/m}^3$$

la pressione assoluta p_1 vale

$$p_1 = p_{atm} + p_{r1} = p_{atm} + \rho_1 gh = 96\,000 + 850 \times 9{,}81 \times 5 = 138 \text{ kPa}$$

Discussione Alla stessa profondità, la pressione nel fluido più leggero è, come ci si attende, minore.

3.11 La pianta del piede di un uomo del peso di 90 kgf ha un'area di 450 cm^2. Determinare la pressione che quest'uomo esercita sul suolo se (a) poggia entrambi i piedi, (b) sta su un piede solo.

Analisi Essendo, per definizione, la pressione uguale alla forza per unità di area, ipotizzando che il peso P sia distribuito uniformemente su tutta l'area A del piede, si ha:

(a)

$$p = \frac{P}{2A} = \frac{90 \times 9{,}81}{2 \times 450 \times 10^{-4}} = 9{,}81 \text{ kPa}$$

(b)

$$p = \frac{P}{A} = \frac{90 \times 9{,}81}{450 \times 10^{-4}} = 19{,}6 \text{ kPa}$$

3.12 Determinare la pressione atmosferica in una località in cui la lettura barometrica è 750 mmHg, sapendo che la densità del mercurio è di 13 600 kg/m^3.

Analisi Per la 3.23, la pressione atmosferica p_{atm} è proporzionale alla densità ρ del liquido barometrico e alla lettura h. Per cui

$$p_{atm} = \rho gh = 13\,600 \times 9{,}81 \times 0{,}75 = 100\,100 \text{ Pa} = 100,1 \text{ kPa}$$

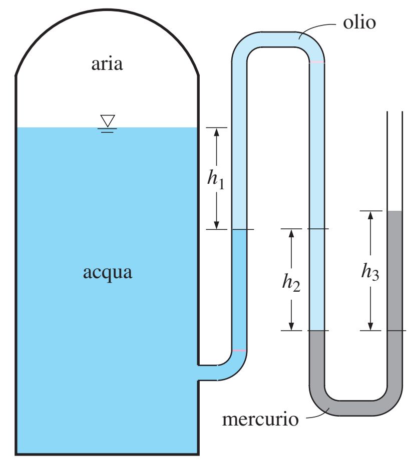
3.13 La pianta del piede di una donna del peso di 70 kgf ha un'area di 400 cm^2. Determinare la dimensione minima di ciascuna delle racchette da neve che deve mettere ai piedi per potere camminare, senza affondare, su neve che non è in grado di sopportare pressioni maggiori di 0,5 kPa.

Analisi Ipotizzando che il peso della persona sia uniformemente distribuito sull'area A dell'unica racchetta su cui il suo corpo grava mentre cammina, questa deve essere pari al rapporto tra il peso P e il valore massimo p_{max} di pressione che la neve è in grado di sopportare. Per cui, la racchetta deve avere una superficie

$$A = \frac{P}{p_{max}} = \frac{70 \times 9{,}81}{500} = 1{,}37 \text{ m}^2 = 13\,700 \text{ cm}^2$$

Discussione L'area di ciascuna racchetta risulta molto elevata, essendo pari a circa 34 volte l'area del piede. Racchette da neve così grandi sarebbero impossibili da usare, per cui nella realtà si useranno racchette più piccole, accettando di sprofondare un poco mentre si cammina.

3.14 Un serbatoio contiene acqua e aria in pressione. La pressione è misurata dal manometro a rami multipli di figura, contenente mercurio di densità 13 600 kg/m^3 e olio di densità pari a 850 kg/m^3. Determinare la pressione relativa dell'aria nel serbatoio essendo $h_1 = 0{,}2$ m, $h_2 = 0{,}3$ m e $h_3 = 0{,}46$ m.



Analisi La pressione relativa p_r dell'aria contenuta all'interno del serbatoio è uguale a quella sulla superficie di separazione con l'acqua. Tale pressione si ottiene percorrendo il manometro a partire dal menisco a contatto con l'atmosfera, sul quale vige pressione relativa nulla, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Pertanto, indicando rispettivamente con ρ_m, ρ_o e ρ le densità del mercurio, dell'olio e dell'acqua, si ha

$$p_r = \rho_m g h_3 - \rho_o g h_2 - \rho g h_1 =$$
$$= 9{,}81 \times (13\,600 \times 0{,}46 - 850 \times 0{,}3 - 1\,000 \times 0{,}2) = 56\,900 \text{ Pa}$$

3.15 In una località in cui la lettura barometrica è di 755 mmHg, un vacuometro collegato a un serbatoio segna 30 kPa. Determinare la pressione assoluta nel serbatoio, essendo la densità del mercurio di 13 590 kg/m^3.

Analisi Per la 3.23, la pressione atmosferica p_{atm} è proporzionale alla densità ρ del liquido barometrico e alla lettura h. Per cui

$$p_{\text{atm}} = \rho g h = 13\,590 \times 9{,}807 \times 0{,}755 = 100\,600 \text{ Pa} = 100{,}6 \text{ kPa}$$

Per la 3.3, nota la depressione p_d letta al vacuometro, la pressione assoluta nel serbatoio vale

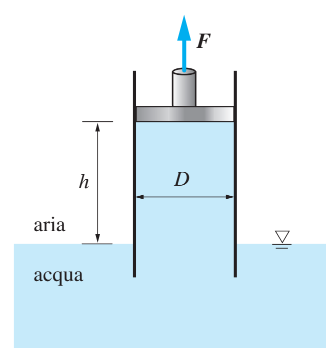
$$p = p_{\text{atm}} - p_d = 100{,}6 - 30 = 70{,}6 \text{ kPa}$$

3.16 In una località in cui la pressione atmosferica è di 94 kPa, un manometro metallico collegato a un serbatoio segna 500 kPa. Determinare la pressione assoluta nel serbatoio.

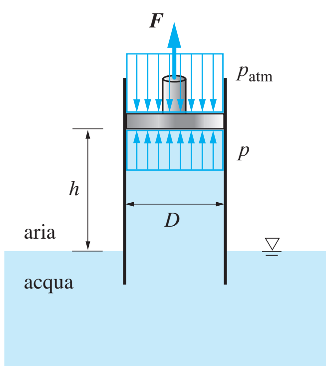
Analisi Per la 3.2, nota la pressione relativa p_r letta al manometro e la pressione atmosferica p_{atm}, la pressione assoluta vale

$$p = p_{\text{atm}} + p_r = 94 + 500 = 594 \text{ kPa}$$

3.17 Con riferimento alla figura, calcolare la forza F necessaria per innalzare una colonna d'acqua all'interno del tubo verticale di figura, di diametro $D = 30$ cm, per un'altezza $h_1 = 1,5$ m e per un'altezza $h_2 = 3$ m. Sapendo che la pressione atmosferica locale è di 96 kPa, tracciare il diagramma delle pressioni assolute sulla superficie inferiore del pistone per h variabile tra 0 e 3 m.



Ipotesi L'attrito tra pistone e cilindro è trascurabile.
Analisi Sul pistone di area A, oltre al peso proprio, agisce esternamente la pressione atmosferica, che esercita una spinta $S_{\text{atm}} = p_{\text{atm}} A$ verticale diretta



verso il basso, e internamente la pressione del liquido, che esercita una spinta $S_L = pA$ verticale diretta verso l'alto. Pertanto, la spinta complessiva S è

$$S = S_L - S_{atm} = pA - p_{atm}A = (p - p_{atm})A = p_r A$$

La pressione assoluta p del liquido a contatto col pistone si ottiene sottraendo alla pressione in corrispondenza della superficie libera, sulla quale vige la pressione atmosferica, il peso della colonna di liquido di altezza h. Pertanto, si ha

$$p = p_{atm} - \rho g h$$

e, conseguentemente,

$$p_r = p - p_{atm} = -\rho g h$$

Essendo $p_{atm} > p$ e $S_{atm} > S_L$, la spinta dell'aria esterna prevale su quella del liquido e, quindi, la spinta complessiva S è diretta verso il basso. Conseguentemente la forza F necessaria per innalzare la colonna d'acqua di un'altezza $h = 1{,}5$ m deve essere diretta verso l'alto. Essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, essa ha modulo

$$F = S = p_r A = \rho g h A = 1\,000 \times 9{,}81 \times 1{,}5 \times \frac{\pi \times 0{,}30^2}{4} = 1{,}04\,\text{kN}$$

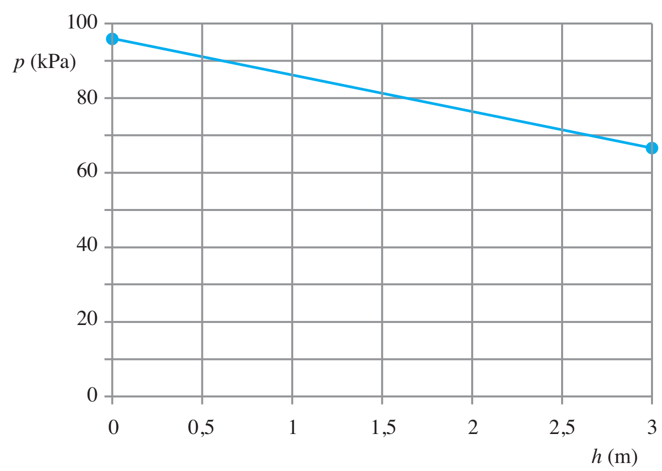
e, per $h = 3$ m,

$$F = S = p_r A = \rho g h A = 1\,000 \times 9{,}81 \times 3{,}0 \times \frac{\pi \times 0{,}30^2}{4} = 2{,}08\,\text{kN}$$

Per mantenere in equilibrio il pistone, alla forza F bisogna aggiungere una forza uguale e contraria al peso proprio del pistone. La forza F varia linearmente con la pressione relativa p_r e, quindi, con l'altezza h. Anche la pressione assoluta varia linearmente con h. Per $h = 3{,}0$ m, si ha

$$p = p_{atm} - \rho g h = 96\,000 - 1\,000 \times 9{,}81 \times 3{,}0 = 66{,}6 \text{ kPa}$$

per cui il diagramma delle pressioni assolute sul pistone è una retta di coordinate (0; 96) e (3; 66,6), come riportato in figura.



3.18 In un'escursione in montagna il barometro segna 930 mbar all'inizio dell'escursione e 780 mbar alla fine. Trascurando l'effetto della variazione di quota sull'accelerazione di gravità e sapendo che la densità media dell'aria è di $1{,}20\ \mathrm{kg/m^3}$, determinare la differenza di quota tra i due luoghi.

Analisi Considerando l'aria compresa tra le quote di inizio e fine escursione come un fluido di densità ρ costante, pari al valor medio, vale la legge di Stevin 3.10

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{costante}$$

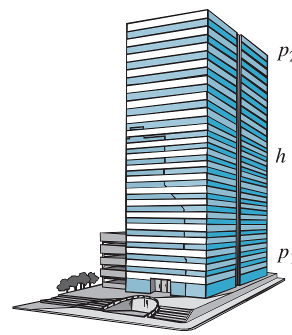
secondo la quale la pressione varia linearmente con la quota. Conseguentemente, la differenza di pressione (relativa o assoluta) Δp tra due punti di un fluido in quiete di densità ρ costante tra i quali vi è una differenza di quota Δz vale

$$\Delta p = \rho g \Delta z$$

per cui

$$\Delta z = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{93\,000 - 78\,000}{1{,}20 \times 9{,}81} = 1\,270\ \mathrm{m}$$

3.19 Le letture barometriche fatte sul tetto e al piede di un edificio sono, rispettivamente, di 730 e 755 mmHg. Essendo la densità media dell'aria di $1{,}18\ \mathrm{kg/m^3}$, determinare l'altezza dell'edificio.



Proprietà La densità del mercurio è $\rho_m = 13\,590\ \mathrm{kg/m^3}$.
Analisi Per la 3.23, la pressione atmosferica p_{atm} è proporzionale alla densità ρ_m del liquido barometrico e alla lettura h. Per cui, sul tetto e al piede dell'edificio la pressione atmosferica vale, rispettivamente

$$p_1 = \rho_m g h_1 = 13\,590 \times 9{,}807 \times 0{,}730 = 97\,292\ \mathrm{Pa}$$

$$p_2 = \rho_m g h_2 = 13\,590 \times 9{,}807 \times 0{,}755 = 100\,624\ \mathrm{Pa}$$

Considerando l'aria compresa tra il tetto e il piede dell'edificio come un fluido di densità ρ costante, pari al valor medio, vale la legge di Stevin 3.10

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{costante}$$

secondo la quale la pressione varia linearmente con la quota. Conseguentemente, la differenza di pressione (relativa o assoluta) Δp tra due punti di un fluido in quiete di densità ρ costante tra i quali vi è una differenza di quota Δz vale

$$\Delta p = \rho g \Delta z$$

per cui

$$\Delta z = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{100\,624 - 97\,292}{1{,}18 \times 9{,}807} = 287{,}9\ \mathrm{m}$$

3.20 In una località in cui la pressione barometrica è di 101 kPa, determinare la pressione che agisce a 30 m di profondità su un sommozzatore, essendo la densità relativa dell'acqua di mare di 1,03.

Analisi Per la 3.12, in un fluido in quiete di densità ρ costante, che per la 2.2 vale

$$\rho = \rho_r \rho_a = 1{,}03 \times 1\,000 = 1\,030 \text{ kg/m}^3$$

la pressione alla profondità h rispetto alla superficie libera, sulla quale vige la pressione atmosferica p_{atm}, è

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g h = 101\,000 + 1\,030 \times 9{,}81 \times 30 = 404 \text{ kPa}$$

3.21 Determinare a quale pressione è sottoposto un sottomarino che viaggia alla profondità di 100 m, essendo la pressione barometrica di 1,03 kgf/cm^2 e la densità relativa dell'acqua di mare 1,03.

Analisi Ipotizzando che la variazione di densità con la profondità sia trascurabile, per la 3.12, in un fluido in quiete di densità ρ, che per la 2.2 vale

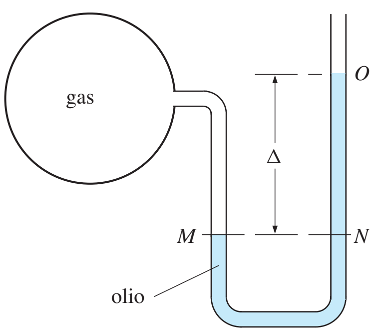
$$\rho = \rho_r \rho_a = 1{,}03 \times 1\,000 = 1\,030 \text{ kg/m}^3$$

sulla cui superficie libera vige la pressione atmosferica

$$p_{\text{atm}} = 1{,}03 \times 9{,}81 \times 10^4 = 101\,000 \text{ Pa}$$

la pressione alla profondità h è

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g h = 101\,000 + 1\,030 \times 9{,}81 \times 100 = 1\,111\,000 \text{ Pa} = 1\,111 \text{ kPa}$$



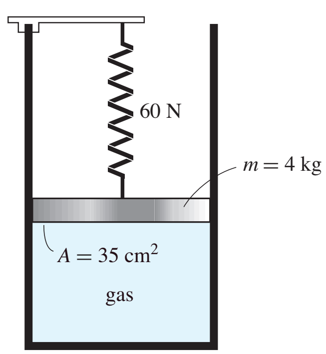
3.22 La differenza di quota tra i menischi di un manometro a olio (ρ = 850 kg/m^3), collegato a un contenitore di gas, è di 45 cm. Determinare la pressione assoluta del gas, essendo la pressione atmosferica di 98 kPa.

Analisi Per l'eguaglianza delle pressioni nei punti M ed N, ed essendo $p_O = p_{\text{atm}}$, si ha

$$p_M = p_N = p_{\text{atm}} + \rho g \Delta$$

Essendo l'aria un fluido di piccolo peso specifico, la pressione dell'aria contenuta nel serbatoio è uguale in tutti i punti. Pertanto, la sua pressione assoluta p è uguale alla pressione assoluta p_M nel punto M, per cui

$$p = p_M = p_{\text{atm}} + \rho g \Delta = 98\,000 + 850 \times 9{,}81 \times 0{,}45 = 102 \text{ kPa}$$



3.23 In un sistema pistone-cilindro verticale privo di attrito è contenuto del gas. Il pistone, sul quale una molla compressa esercita una forza di 60 N, ha massa di 4 kg e sezione trasversale di 35 cm^2. Determinare la pressione del gas all'interno del cilindro, essendo la pressione atmosferica di 95 kPa.

Analisi Sul pistone agiscono verticalmente verso il basso, oltre al peso proprio P, la forza F esercitata dalla molla e la spinta S_{atm} esercitata dalla pressione atmosferica. Verticalmente verso l'alto è, invece, diretta la spinta S esercitata dal gas. Per l'equilibrio, deve essere

$$S = P + F + S_{\text{atm}}$$

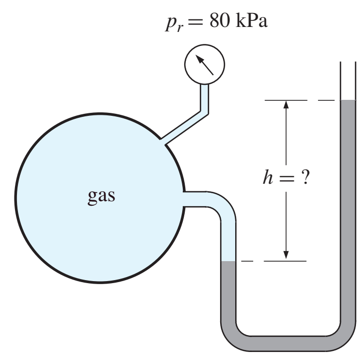
Poiché sia la pressione atmosferica p_{atm} che la pressione p del gas sono costanti in tutti i punti delle superfici premute, entrambe di area A, le spinte sono uguali al prodotto della pressione per l'area. Pertanto

$$pA = P + F + p_{\text{atm}} A$$

da cui

$$p = p_{\text{atm}} + \frac{P + F}{A} = 95\,000 + \frac{4 \times 9{,}81 + 60}{0{,}0035} = 123 \text{ kPa}$$

3.24 A un contenitore di gas sono collegati un manometro metallico e un manometro semplice. Essendo la lettura del manometro metallico di 80 kPa, determinare la differenza di quota tra i menischi del manometro semplice quando il liquido manometrico è (a) mercurio ($\rho = 13\,600$ kg/m^3) o (b) acqua ($\rho = 1\,000$ kg/m^3).



Analisi Per la 3.19, la pressione relativa p_r in corrispondenza del menisco inferiore, cioè all'interfaccia liquido manometrico - gas, è proporzionale alla densità ρ del liquido ed al dislivello h tra i due menischi

$$p_r = \rho g h$$

Per cui, si ha:
(a) nel caso di mercurio

$$h = \frac{p_r}{\rho g} = \frac{80\,000}{13\,600 \times 9{,}81} = 0{,}60 \text{ m}$$

(a) nel caso di acqua

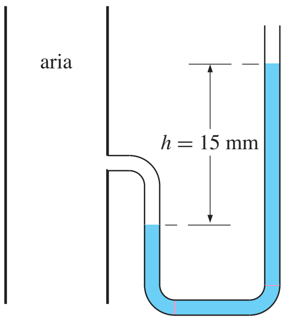
$$h = \frac{p_r}{\rho g} = \frac{80\,000}{1\,000 \times 9{,}81} = 8{,}15 \text{ m}$$

3.25 Un uomo alto 1,8 m è completamente immerso in posizione verticale in una piscina. Calcolare la differenza tra le pressioni che agiscono sulla testa e sui piedi dell'uomo.

Analisi La pressione alla quota dei piedi è pari a quella che agisce al livello della testa incrementata del peso della colonna di liquido di altezza pari all'altezza h dell'uomo. Per cui, essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, si ha

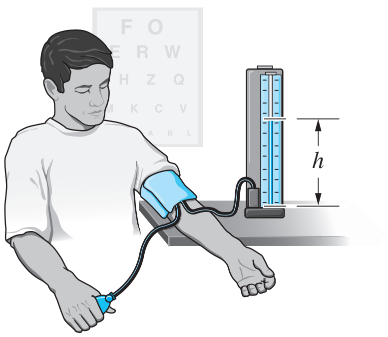
$$\Delta p = \rho g h = 1\,000 \times 9{,}81 \times 1{,}8 = 17{,}7 \text{ kPa}$$

3.26 Un manometro semplice a mercurio ($\rho = 13\,600$ kg/m^3) è collegato a una tubazione contenente aria. La differenza tra i menischi del manometro è di 15 mm. Essendo il menisco più alto quello a contatto con l'atmosfera, (a) stabilire se la pressione all'interno della tubazione è maggiore o minore della pressione atmosferica e (b) calcolare la pressione assoluta all'interno della tubazione, essendo la pressione atmosferica pari a 100 kPa.



Analisi *(a)* Se i due menischi fossero alla stessa quota, la pressione dell'aria all'interno della tubazione sarebbe uguale a quella atmosferica. Un aumento della pressione all'interno della tubazione farebbe spostare il liquido manometrico verso l'ambiente a pressione minore, cioè dal ramo di sinistra a quello di destra. Viceversa, una diminuzione della pressione lo farebbe spostare dal ramo di destra a quello di sinistra. Quindi, il menisco a quota più bassa è quello a contatto con l'ambiente a pressione maggiore. Pertanto, la pressione dell'aria all'interno della tubazione è maggiore della pressione atmosferica.
(b) Per la 3.19, la pressione assoluta p in corrispondenza del menisco inferiore, che è uguale a quella dell'aria all'interno della tubazione, è

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g h = 100\,000 + 13\,600 \times 9{,}81 \times 0{,}015 = 102 \text{ kPa}$$



3.27 La pressione del sangue è misurata, normalmente, arrotolando una sacca chiusa piena d'aria, collegata a un manometro metallico, attorno al braccio di una persona all'altezza del cuore. Usando un manometro a mercurio e uno stetoscopio, vengono misurate, in mmHg, la pressione sistolica (la massima pressione mentre il cuore pompa) e la pressione diastolica (la minima pressione col cuore a riposo). Le pressioni sistolica e diastolica di una persona in buona salute valgono circa 120 mmHg e 80 mmHg, rispettivamente, e si indicano come 120/80. Esprimere queste pressioni in kPa e in metri di colonna d'acqua.

Proprietà La densità dell'acqua è $\rho_a = 1\,000 \text{ kg/m}^3$, quella del mercurio è $\rho_m = 13\,600 \text{ kg/m}^3$.
Analisi I due valori della pressione espressi in kPa valgono

$$p_{\max} = \rho_m g h_{\max,m} = 13\,600 \times 9{,}81 \times 0{,}120 = 16{,}0 \text{ kPa}$$

$$p_{\min} = \rho_m g h_{\min,m} = 13\,600 \times 9{,}81 \times 0{,}080 = 10{,}7 \text{ kPa}$$

Volendo esprimere le stesse pressioni in termini di altezze h_a di colonna d'acqua, essendo

$$p = \rho_m g h_m = \rho_a g h_a$$

si ha

$$h_a = \frac{\rho_m}{\rho_a} h_m$$

per cui

$$h_{\max,a} = \frac{\rho_m}{\rho_a} h_{\max,m} = \frac{13\,600}{1\,000} \times 0{,}120 = 1{,}63 \text{ m}$$

$$h_{\min,a} = \frac{\rho_m}{\rho_a} h_{\min,m} = \frac{13\,600}{1\,000} \times 0{,}080 = 1{,}09 \text{ m}$$

Discussione Usare l'acqua come fluido manometrico per la misura della pressione del sangue richiederebbe strumenti troppo ingombranti. Conseguentemente, si impiega il mercurio.

3.28 La pressione massima nel braccio di una persona in buona salute vale circa 120 mmHg. Determinare a quale altezza si porterebbe il sangue in un tubicino verticale, aperto all'estremità superiore e collegato all'estremità inferiore all'arteria della persona, essendo la densità del sangue pari a $1\,050 \text{ kg/m}^3$.

Analisi La pressione p può essere espressa sia in termini di altezza h_m di una colonna di mercurio di densità ρ_m che in termini di altezza h_s di una colonna di sangue di densità ρ_s, essendo

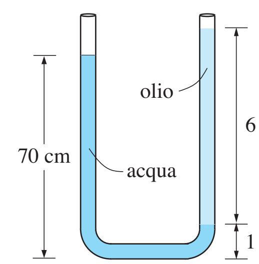
$$p = \rho_m g h_m = \rho_s g h_s$$

Per cui

$$h_s = \frac{\rho_m}{\rho_s} h_m = \frac{13\,600}{1\,000} \times 0{,}120 = 1{,}55\,\text{m}$$

Discussione In un tubicino collegato all'arteria il sangue risale all'incirca per un metro e mezzo. Pertanto, i flaconi per infusione tramite fleboclisi vanno posizionati bene in alto affinché la soluzione possa fluire per gravità all'interno dei vasi sanguigni.

3.29 Un tubo a U con entrambi i rami aperti in atmosfera contiene acqua in uno dei rami e olio ($\rho = 790$ kg/m^3) nell'altro. Il primo ramo contiene acqua fino a 70 cm di quota, mentre il secondo contiene entrambi i fluidi con un rapporto tra altezze pari a 6. Si calcoli l'altezza di ciascun fluido nel secondo ramo.



Analisi Indicando con h_{a1} l'altezza della colonna d'acqua di densità ρ_a nel primo ramo e con h_{a2} e h_{o2}, rispettivamente, l'altezza della colonna d'acqua e quella della colonna d'olio di densità ρ_o nel secondo ramo, la pressione relativa p_r al fondo del tubo, essendo entrambi i rami aperti in atmosfera, è

$$p_r = \rho_a g h_{a1} = \rho_a g h_{a2} + \rho_o g h_{o2}$$

ed, essendo $h_{o2} = 6h_{a2}$,

$$\rho_a h_{a1} = \rho_a h_{a2} + 6\rho_o h_{a2}$$

da cui

$$h_{a2} = \frac{h_{a1}}{1 + 6\dfrac{\rho_o}{\rho_a}} = \frac{0{,}70}{1 + 6 \times \dfrac{790}{1\,000}} = 0{,}122\,\text{m}$$

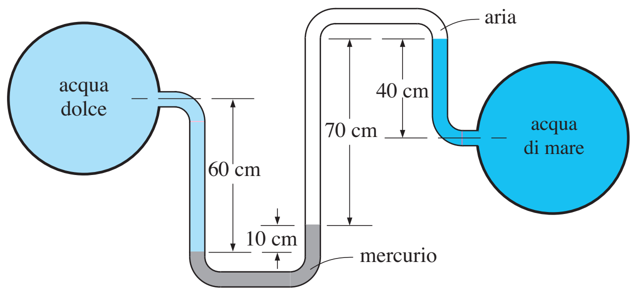
e

$$h_{o2} = 6h_{a2} = 6 \times 0{,}122 = 0{,}732 \text{ m}$$

Discussione Essendo l'olio più leggero dell'acqua, il ramo con l'olio contiene fluido per una altezza maggiore.

3.30 In due tubazioni orizzontali parallele scorrono acqua dolce e acqua di mare; esse sono collegate con un manometro a doppia U. Calcolare la differenza di pressione tra gli assi delle due tubazioni, essendo la densità dell'acqua di mare pari a 1 035 kg/m^3.

Proprietà La densità dell'acqua dolce è $\rho = 1\,000$ kg/m^3, quella del mercurio è $\rho_m = 13\,600$ kg/m^3.



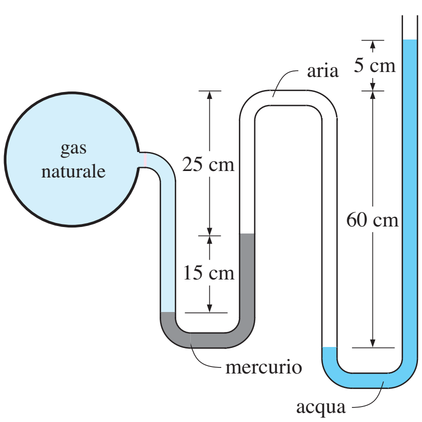
Analisi La pressione p in corrispondenza dell'asse della tubazione che convoglia acqua dolce si ottiene percorrendo il manometro a partire dell'asse della tubazione che convoglia acqua di mare, in cui vige la pressione p_a, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Pertanto, essendo $h_a = 40$ cm l'altezza della colonna di acqua di mare di densità ρ_a, $h_g = 70$ cm l'altezza della colonna d'aria di densità ρ_g, $h_m = 10$ cm l'altezza della colonna di mercurio e $h = 60$ cm quella della colonna d'acqua dolce, si ha

$$p = p_a - \rho_a g h_a + \rho_g g h_g + \rho_m g h_m - \rho g h$$

da cui, trascurando il termine relativo all'aria perché di densità trascurabile rispetto a quella dei liquidi, si ha

$$\begin{aligned} p - p_a &= -\rho_a g h_a + \rho_m g h_m - \rho g h = \\ &= 9{,}81 \times (-1\,035 \times 0{,}4 + 13\,600 \times 0{,}1 - 1\,000 \times 0{,}6) = 3{,}39 \text{ kPa} \end{aligned}$$

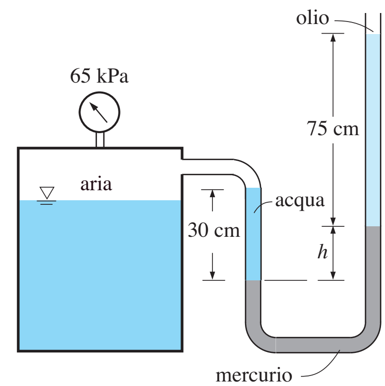
Discussione Essendo $\rho_g = 1{,}2$ kg/m^3, la colonna d'aria alta 70 cm dà luogo a una differenza di pressione di 8 Pa. Pertanto, la sua influenza sulla differenza di pressione calcolata è effettivamente trascurabile.



3.31 In una tubazione contenente gas naturale la pressione è misurata col manometro semplice a rami multipli di figura. Calcolare la pressione assoluta nella tubazione, essendo la densità relativa del mercurio pari a 13,6 e la pressione atmosferica locale di 100 kPa.

Analisi La pressione assoluta p del gas è uguale a quella in corrispondenza della sua interfaccia col liquido manometrico. Questa si ottiene percorrendo il manometro a partire dal menisco a contatto con l'atmosfera, sul quale vige la pressione atmosferica p_{atm}, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Pertanto, essendo $h = 65$ cm l'altezza della colonna d'acqua di densità ρ e $h_m = 15$ cm l'altezza della colonna di mercurio di densità ρ_m e trascurando la variazione di pressione all'interno dell'aria manometrica, si ha

$$\begin{aligned} p &= p_{\text{atm}} + \rho g h + \rho_m g h_m = \\ &= 100 + 9{,}81 \times (1\,000 \times 0{,}65 + 13\,600 \times 0{,}15) \times 10^{-3} = 126 \text{ kPa} \end{aligned}$$



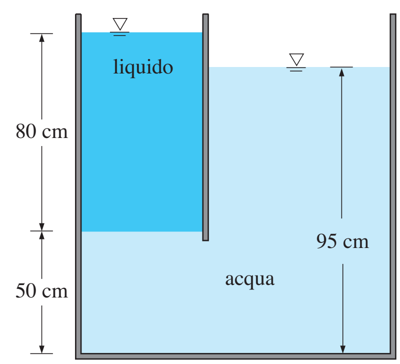
3.32 La pressione relativa dell'aria nel contenitore in figura è di 65 kPa. Determinare la differenza di quota h tra i menischi del mercurio nei due rami.

Proprietà Le densità relative dell'olio e del mercurio sono, rispettivamente, $\rho_{ro} = 0{,}72$ e $\rho_{rm} = 13{,}6$.
Analisi La pressione p dell'aria nel contenitore è costante perché, essendo l'aria un fluido di densità molto piccola, dà luogo a variazioni di pressione con la quota che sono apprezzabili solo per variazioni di quota molto grandi. Quindi, la pressione p è uguale a quella dell'interfaccia con l'acqua. Questa si ottiene percorrendo il manometro a partire dal menisco a contatto con l'atmosfera, sul quale vige la pressione atmosferica p_{atm}, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Pertanto, essendo $h_o = 75$ cm l'altezza della colonna di olio di densità $\rho_o = \rho_{ro}\rho_a = 0{,}72 \times 1\,000 = 720$ kg/m^3, h l'altezza incognita della colonna di mercurio di densità $\rho_m = \rho_{rm}\rho_a = 13{,}6 \times 1\,000 = 13\,600$ kg/m^3 e $h_a = 30$ cm l'altezza della colonna d'acqua di densità $\rho_a = 1\,000$ kg/m^3, si ha

$$p = p_{\text{atm}} + \rho_o g h_o + \rho_m g h - \rho_a g h_a$$

da cui, essendo nota la pressione relativa $p_r = p - p_{\text{atm}}$ dell'aria nel contenitore

$$h = \frac{p - p_{\text{atm}} - \rho_o g h_o + \rho_a g h_a}{\rho_m g} = \frac{p_r}{\rho_m g} - \frac{\rho_o h_o - \rho_a h_a}{\rho_m} =$$
$$= \frac{65\,000}{13\,600 \times 9{,}81} - \frac{720 \times 0{,}75 - 1\,000 \times 0{,}30}{13\,600} = 0{,}470 \text{ m}$$



3.33 Determinare la densità del liquido non miscibile con l'acqua contenuto nello scomparto di figura.

Analisi Sulla superficie di separazione tra i due liquidi la pressione relativa è la stessa sia per il liquido che per l'acqua. Pertanto, indicando con ρ_i la densità incognita, con ρ la densità dell'acqua, con $h_i = 80$ cm l'affondamento di tale superficie al di sotto della superficie libera del liquido e con $h = 95 - 50 = 45$ cm l'affondamento al di sotto delle superficie libera dell'acqua, si ha:

$$\rho_i g h_i = \rho g h$$

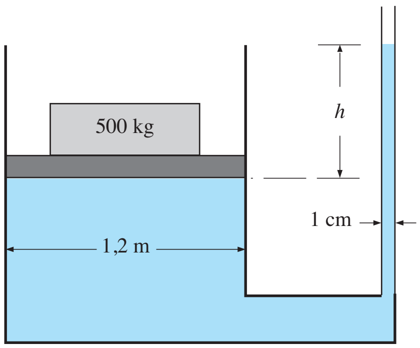
da cui

$$\rho_i = \rho \frac{h}{h_i} = 1\,000 \times \frac{0{,}45}{0{,}80} = 563 \text{ kg/m}^3$$

Discussione Il liquido risulta più leggero dell'acqua. Se così non fosse, affonderebbe, occupando la parte bassa del contenitore.

3.34 Con l'elevatore idraulico di figura si deve sollevare un carico di 500 kg versando olio ($\rho = 780$ kg/m^3) nel tubicino. Determinare il dislivello minimo h tra il menisco del tubicino e il piano di appoggio, superato il quale il carico comincia a sollevarsi.

Analisi Essendo la superficie del pistone orizzontale, la pressione del fluido a contatto col pistone è costante. Pertanto, la spinta che il fluido esercita su



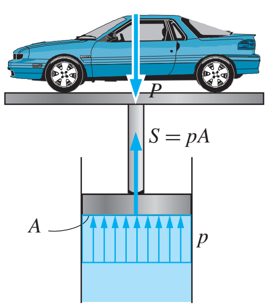
di esso è uguale al prodotto della pressione p del fluido per l'area A della superficie del pistone. Il peso che il pistone può sollevare è uguale alla spinta del fluido, che deve, perciò, avere una pressione relativa

$$p_r = \frac{P}{A} = \rho g h$$

da cui

$$h = \frac{P}{\rho g A} = \frac{500 \times 9{,}81}{780 \times 9{,}81 \times \pi \times 1{,}20^2/4} = 0{,}567 \text{ m}$$

Discussione Per sollevare un carico di 500 kg è sufficiente aumentare il livello dell'olio di 56,7 cm. Si noti come il diametro del tubicino sia ininfluente.



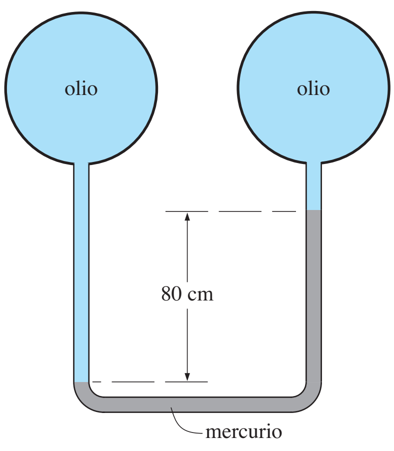
3.35 Il cilindro di un ponte idraulico in un'officina per automobili ha un diametro di 30 cm e può sollevare automobili fino a 2 000 kg. Calcolare la pressione relativa del fluido all'interno del serbatoio.

Ipotesi Il peso proprio del pistone è trascurabile.
Analisi La spinta che il fluido esercita sul pistone di diametro $D = 30$ cm deve essere uguale e contraria al peso P dell'auto. Essendo il pistone orizzontale, la pressione è la stessa in ogni punto della superficie di contatto col fluido. Pertanto, la spinta S del liquido sul pistone è pari al prodotto della pressione p per l'area A del pistone. Per cui, nel caso di un'auto di 2 000 kg, si ha

$$S = pA = P = mg$$

da cui

$$p = \frac{mg}{A} = \frac{mg}{\pi D^2/4} = \frac{2\,000 \times 9{,}81}{\pi \times 0{,}30^2/4} = 278 \text{ kPa}$$



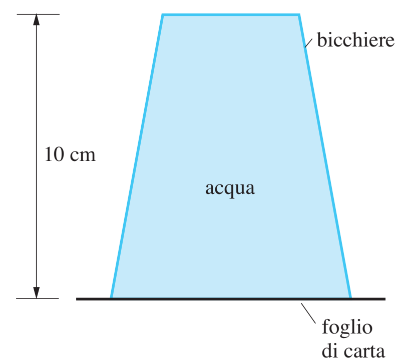
3.36 Due contenitori di olio sono collegati con un manometro differenziale. Determinare la differenza di pressione tra due punti alla stessa quota nei due recipienti quando la differenza di quota tra i menischi nei due rami è di 80 cm. Le densità dell'olio e del mercurio sono, rispettivamente, 720 kg/m^3 e 13 585 kg/m^3.

Analisi Per la 3.22, noto il dislivello Δ tra i menischi di un manometro differenziale con liquido manometrico di densità ρ_m collegato a due serbatoi contenenti liquido di densità ρ, la differenza di pressione tra due punti alla stessa quota nei due serbatoi vale

$$p_1 - p_2 = g\Delta(\rho_m - \rho) = 9{,}81 \times 0{,}8 \times (13\,585 - 720) = 101\,000 \text{ Pa}$$

essendo la pressione maggiore quella del punto posto nel serbatoio di sinistra, a contatto col ramo del manometro avente il menisco più basso.
Discussione Nel caso in cui si debbano misurare differenze di pressione notevoli, è necessario usare come fluido manometrico il mercurio. In questo caso, infatti, se il fluido manometrico fosse acqua, il dislivello tra i menischi sarebbe di circa 37 m.

3.37 Coprendo con un sottile foglio di carta un bicchiere pieno d'acqua fino all'orlo e capovolgendolo, come mostrato in figura, all'interno si forma una pressione negativa che impedisce all'acqua di fuoriuscire. Calcolare la pressione sul fondo del bicchiere e spiegare perché l'acqua non fuoriesce.



Analisi Sulla faccia esterna del foglio di carta agisce la pressione atmosferica $p_{atm} = 100$ kPa, sulla faccia interna la pressione del liquido di densità $\rho = 1\,000$ kg/m^3. Essendo il foglio di carta in equilibrio, la spinta dell'aria esterna e quella del liquido sono uguali e contrarie. Per cui anche le pressioni su ciascuna faccia sono uguali. Ne consegue che sulla faccia interna del foglio di carta la pressione è uguale a quella atmosferica e, quindi, l'acqua è a pressione relativa nulla. Per cui, sul fondo del bicchiere, di altezza $h = 10$ cm, la pressione relativa è

$$p_r = -\rho g h = -1\,000 \times 9{,}81 \times 0{,}10 = -981 \text{ Pa}$$

Essendo l'acqua in depressione, la spinta esercitata dall'atmosfera sulla superficie esterna del bicchiere è maggiore di quella che l'acqua esercita sulla superficie interna. La differenza fra le due spinte, cioè la spinta calcolata in termini di pressioni relative, è diretta, pertanto, verso il basso ed è pari al peso del volume di liquido compreso tra la superficie del bicchiere e il piano dei carichi idrostatici, che coincide col foglio di carta. Quindi, la spinta relativa dell'acqua sul bicchiere è esattamente il peso dell'acqua. Poiché il bicchiere esercita sull'acqua una spinta uguale e contraria, cioè pari al peso dell'acqua ma con direzione opposta, verso l'alto, l'acqua è soggetta ad un sistema di forze a risultante nullo. Pertanto, non cade.

3.38 L'*altezza piezometrica* è la pressione espressa in termini di colonna di liquido. Esprimere la pressione atmosferica standard in termini di colonna di (a) mercurio ($\rho_r = 13{,}6$), (b) acqua ($\rho_r = 1{,}0$) e (c) glicerina ($\rho_r = 1{,}26$).

Proprietà La pressione atmosferica standard è pari a 101 325 Pa.
Analisi Per la 3.23, si ha

$$p_{atm} = \rho g h$$

in cui h è l'altezza di una colonna di liquido di densità ρ, da cui

$$h = \frac{p_{atm}}{\rho g}$$

(a) Nel caso di mercurio, si ha

$$h = \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{101\,325}{13{,}6 \times 1\,000 \times 9{,}81} = 0{,}759 \text{ m}$$

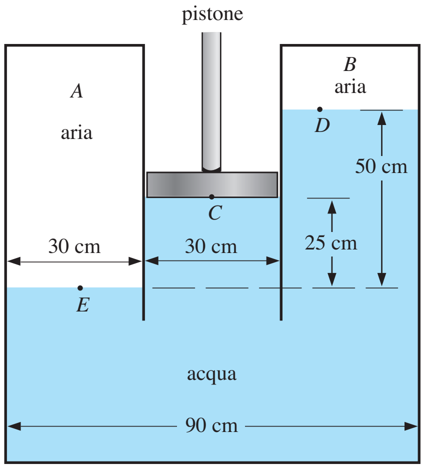
(b) Nel caso di acqua

$$h = \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{101\,325}{1{,}0 \times 1\,000 \times 9{,}81} = 10{,}3 \text{ m}$$

(c) Nel caso di glicerina

$$h = \frac{p_{atm}}{\rho g} = \frac{101\,325}{1{,}26 \times 1\,000 \times 9{,}81} = 8{,}20 \text{ m}$$

3.39 Due volumi d'aria, a contatto con lo stesso fluido, sono separati da un pistone del peso di 25 N, come mostrato in figura. Calcolare le pressioni relative nei volumi A e B.



Analisi La pressione relativa p_r del fluido a contatto col pistone, di area A e diametro $D = 30$ cm, deve dar luogo ad una spinta uguale al peso proprio P del pistone, per cui

$$p_{rC} = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi D^2/4} = \frac{25}{\pi \times 0{,}30^2/4} = 354 \text{ Pa}$$

Essendo il liquido acqua di densità $\rho = 1\,000$ kg/m^3, il piano dei carichi idrostatici del liquido si trova al di sopra del pistone di una altezza

$$h = \frac{p_{rC}}{\rho g} = \frac{354}{1\,000 \times 9{,}81} = 0{,}036 \text{ m} = 3{,}6 \text{ cm}$$

L'aria è un fluido di densità trascurabile. Pertanto, in ambedue i volumi di aria la pressione si può considerare costante e pari a quella che si ha in corrispondenza delle superfici di separazione col liquido. Rispetto alla quota del pistone, quella a sinistra è più in basso di un'altezza $h_s = 25$ cm, mentre quella a destra è più in alto di un'altezza $h_d = 25$ cm. Per cui, nel volume di sinistra

$$p_{rA} = p_{rE} = p_{rC} + \rho g h_s = 354 + 1\,000 \times 9{,}81 \times 0{,}25 = 2\,810 \text{ Pa}$$

e, nel volume di destra,

$$p_{rB} = p_{rD} = p_{rC} - \rho g h_d = 354 - 1\,000 \times 9{,}81 \times 0{,}25 = -2\,100 \text{ Pa}$$

Discussione L'aria contenuta nel volume di destra risulta in depressione. Ciò è denotato anche dal fatto che la superficie di separazione col liquido si trova più in alto del piano dei carichi idrostatici del liquido di una altezza $h_d - h = 21{,}4$ cm.

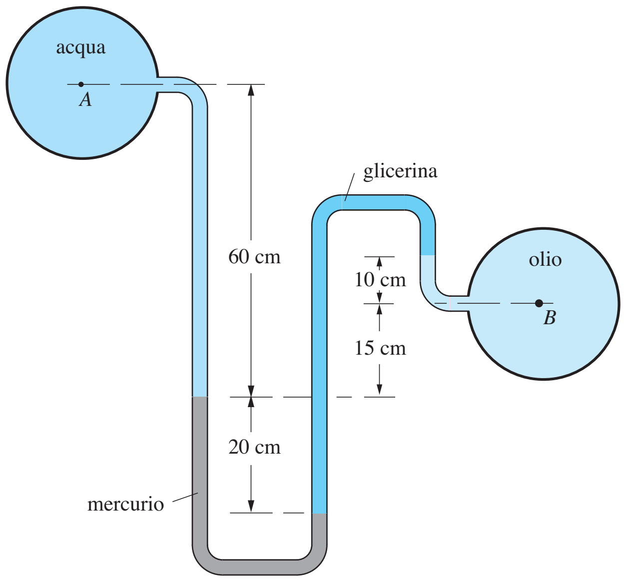
3.40 La differenza di pressione tra due tubazioni, l'una contenente olio, l'altra acqua, è misurata tramite un manometro differenziale a due fluidi, come mostrato in figura. Calcolare la differenza di pressione tra gli assi delle tubazioni, essendo 1,26 la densità relativa della glicerina, 13,5 quella del mercurio e 0,88 quella dell'olio.

Analisi La pressione p_A sull'asse della tubazione che convoglia acqua si ottiene percorrendo il manometro a partire dall'asse della tubazione che convoglia olio, dove vige la pressione p_B, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Per cui, indicando con $h_o = 10$ cm l'altezza della colonna di olio di densità ρ_o, con $h_g = 10 + 15 + 20 = 45$ cm l'altezza della colonna di glicerina di densità ρ_g, con $h_m = 20$ cm l'altezza della colonna di mercurio di densità ρ_m e con $h = 60$ cm l'altezza della colonna d'acqua, si ha

$$p_A = p_B - \rho_o g h_o + \rho_g g h_g - \rho_m g h_m - \rho g h$$

da cui

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= -\rho_o g h_o + \rho_g g h_g - \rho_m g h_m - \rho g h = 9{,}81 \times 1\,000 \times \\ &\times (-0{,}88 \times 0{,}10 + 1{,}26 \times 0{,}45 - 13{,}5 \times 0{,}20 - 1 \times 0{,}60) = \\ &= -27\,700 \text{ Pa} \end{aligned}$$

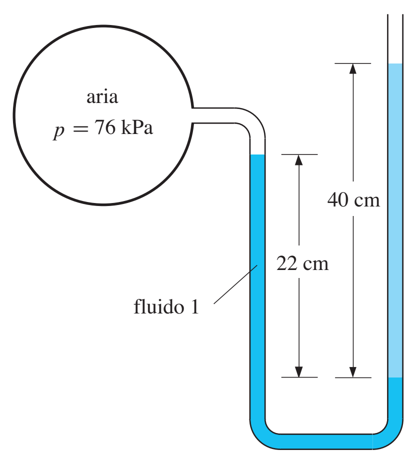


cioè

$$p_B > p_A$$

Discussione L'uso di un manometro differenziale tra due tubazioni non è raccomandabile, a meno che le pressioni all'interno delle tubazioni non si mantengano relativamente costanti. In caso contrario, infatti, un significativo aumento di pressione in una delle tubazioni può spingere il fluido manometrico all'interno dell'altra.

3.41 Nota la pressione all'interno della tubazione in figura, determinare la densità relativa del secondo fluido manometrico, essendo la densità relativa del fluido 1 pari a 13,55 e la pressione atmosferica di 100 kPa.



Analisi L'aria è un fluido di densità trascurabile. Pertanto, all'interno della tubazione, nella sezione alla quale è collegato il manometro, la pressione p si può considerare costante e pari a quella che si ha in corrispondenza del menisco. La pressione p si ottiene percorrendo il manometro a partire dal menisco a contatto con l'atmosfera, dove vige la pressione p_{atm}, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Per cui, indicando con $h_1 = 22$ cm l'altezza della colonna di fluido 1 di densità relativa $\rho_{r1} = 13{,}55$ e con $h_2 = 40$ cm l'altezza della colonna di fluido 2 di densità incognita ρ_{r2}, tenendo presente la 2.2, si ha

$$p = p_{\text{atm}} + \rho_{r2}\rho_a g h_2 - \rho_{r1}\rho_a g h_1$$

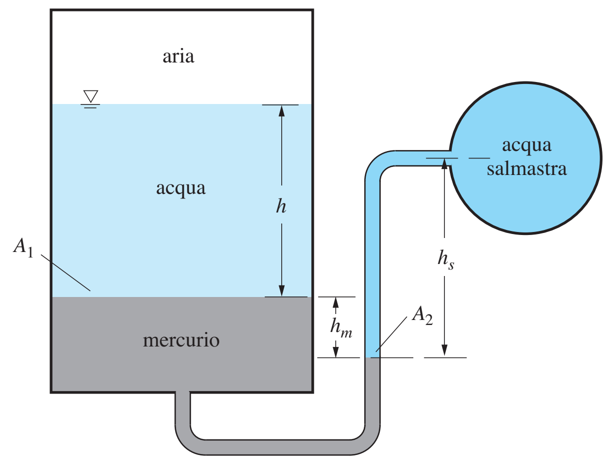
da cui, dividendo per $\rho_a g h_2$ e riordinando,

$$\rho_{r2} - \rho_{r1}\frac{h_1}{h_2} = \frac{p - p_{\text{atm}}}{\rho_a g h_2}$$

e, essendo $\rho_a = 1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$,

$$\rho_{r2} = \rho_{r1}\frac{h_1}{h_2} + \frac{p - p_{\mathrm{atm}}}{\rho_a g h_2} = 13{,}55 \times \frac{0{,}22}{0{,}40} + \frac{76\,000 - 100\,000}{1\,000 \times 9{,}81 \times 0{,}40} = 1{,}34$$

3.42 Determinare il rapporto A_2/A_1, sapendo che una variazione della pressione dell'aria di 0,7 kPa fa abbassare il livello dell'interfaccia acqua salmastra – mercurio nel ramo destro del manometro di 5 mm, mentre la pressione nella tubazione di acqua salmastra si mantiene costante. La densità relativa del mercurio è di 13,56 e quella dell'acqua salmastra è pari a 1,1.



Analisi Un abbassamento del menisco di destra può essere causato da un aumento della pressione nella tubazione che contiene acqua salmastra o da una diminuzione della pressione dell'aria contenuta nel serbatoio. Poiché, per ipotesi, la prima si mantiene costante, l'abbassamento del menisco è causato dalla diminuzione di pressione dell'aria. La pressione p dell'aria si ottiene percorrendo il manometro a partire dall'asse del tubo, dove vige la pressione p_s, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Per cui, essendo h_s l'altezza della colonna di acqua salmastra di densità ρ_s, h_m l'altezza della colonna di mercurio di densità ρ_m e h l'altezza della colonna d'acqua di densità ρ, si ha

$$p = p_s + \rho_s g h_s - \rho_m g h_m - \rho g h$$

Quando la pressione dell'aria diminuisce di Δp, il menisco di destra si abbassa di Δh_s e, di conseguenza, il piano di separazione tra acqua e mercurio si innalza della quantità incognita Δh_m e l'altezza della colonna di mercurio si incrementa della somma delle due variazioni. Pertanto, rimanendo invariata l'altezza della colonna d'acqua, la precedente relazione tra le pressioni diviene

$$p - \Delta p = p_s + \rho_s g(h_s + \Delta h_s) - \rho_m g(h_m + \Delta h_m + \Delta h_s) - \rho g h$$

Sottraendo da quest'ultima la prima, si ha

$$-\Delta p = \rho_s g \Delta h_s - \rho_m g(\Delta h_m + \Delta h_s)$$

da cui

$$\Delta h_m = \frac{\Delta p + g\Delta h_s(\rho_s - \rho_m)}{\rho_m g} = \\ = \frac{700 + 9{,}81 \times 0{,}005 \times (1{,}1 - 13{,}56) \times 1\,000}{13{,}56 \times 1\,000 \times 9{,}81} = 0{,}000668 \text{ m}$$

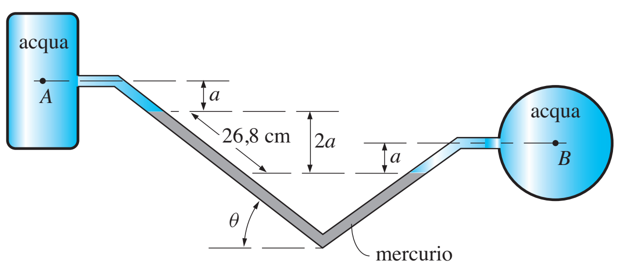
Per l'eguaglianza del volume di liquido spostato, deve inoltre essere

$$A_2 \Delta h_s = A_1 \Delta h_m$$

per cui

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\Delta h_m}{\Delta h_s} = \frac{0{,}000668}{0{,}005} = 0{,}134$$

3.43 Due contenitori di acqua sono collegati da un manometro differenziale a mercurio costituito da tubi inclinati, come mostrato in figura. Si calcolino a e θ, essendo la differenza di pressione tra i due serbatoi di 20 kPa e la densità relativa del mercurio pari a 13,6.



Analisi La pressione p_A nel punto A di attacco del manometro si ottiene percorrendo il manometro a partire dal punto B di attacco dell'altro ramo, dove vige la pressione p_B, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Per cui, indicando con ρ e ρ_m le densità, rispettivamente, dell'acqua e del mercurio, si ha

$$p_A = p_B + \rho g a - \rho_m g 2a - \rho g a = p_B - \rho_m g 2a$$

da cui

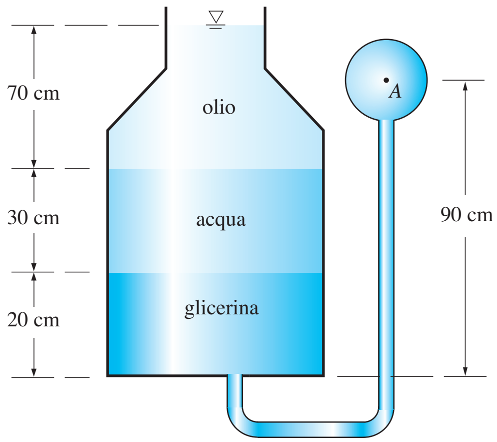
$$a = \frac{p_B - p_A}{2\rho_m g} = \frac{20\,000}{2 \times 13{,}6 \times 1\,000 \times 9{,}81} = 0{,}075 \text{ m}$$

e quindi

$$\theta = \text{arcsen}\,\frac{2a}{26{,}8} = \text{arcsen}\,\frac{2 \times 7{,}5}{26{,}8} = 34°$$

Discussione Nel calcolo delle differenze di pressione vanno usate le differenza di quota, cioè le distanze misurate lungo la verticale.

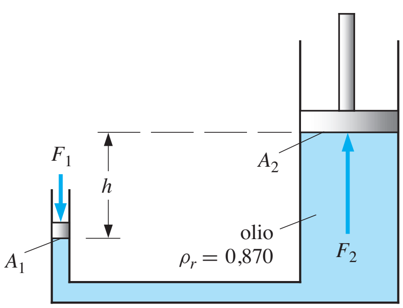
3.44 Un contenitore con più fluidi è collegato a un tubo a U, come mostrato in figura. Determinare la pressione relativa in A, essendo 0,90 la densità relativa dell'olio e 1,26 quella della glicerina.



Analisi La pressione relativa in A si ottiene percorrendo il contenitore e il tubo a partire dalla superficie libera, dove vige pressione relativa nulla, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Per cui, essendo $h_o = 70$ cm, $h = 30$ cm e $h_g = 90 - 20 = 70$ cm le altezze delle colonna di olio, acqua e glicerina ed indicando con ρ_o, ρ e ρ_g le rispettive densità, si ha

$$p_A = \rho_o g h_o + \rho g h - \rho_g g h_g = \\ = 9{,}81 \times 1\,000 \times (0{,}90 \times 0{,}70 + 0{,}30 - 1{,}26 \times 0{,}70) = 471 \text{ Pa}$$

3.45 I due pistoni di un sollevatore idraulico usato in un'officina hanno aree, rispettivamente, $A_1 = 1\ \text{cm}^2$ e $A_2 = 0{,}04\ \text{m}^2$. Il liquido usato è olio di densità relativa $\rho_r = 0{,}870$. Calcolare la forza F_1 necessaria per sostenere un'automobile che pesa 20 000 N quando i due pistoni sono alla stessa quota ($h = 0$) e dopo che l'automobile è stata sollevata di 2 m.



Analisi La spinta che il liquido esercita su ciascun pistone è pari al prodotto della pressione del liquido a contatto col pistone per la sua area. Tale spinta, trascurando il peso proprio del pistone, deve essere uguale alla forza esterna che agisce sul pistone. (a) Quando i due pistoni sono alla stessa quota la pressione del liquido a contatto con i due pistoni è la stessa. Pertanto, deve essere

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

da cui

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} = 20\,000 \times \frac{1 \times 10^{-4}}{0{,}04} = 50 \text{ N}$$

(*b*) Quando l'auto è sollevata di un'altezza h, tra i due pistoni vi è una differenza di pressione pari a $\rho g h$, per cui si ha

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = p_2 + \rho g h = \frac{F_2}{A_2} + \rho g h$$

da cui

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} + \rho g h A_1 = \\ = 50 + 0{,}870 \times 1\,000 \times 9{,}81 \times 2 \times 1 \times 10^{-4} = 51{,}7 \text{ N}$$

Spinte idrostatiche su superfici piane e curve

3.46 Definire la spinta idrostatica su una superficie piana e il centro di spinta.

Analisi La spinta idrostatica su una superficie immersa è la risultante delle spinte elementari derivanti dalla distribuzione della pressione sulla superficie. Il centro di spinta è il punto di applicazione di tale forza.

3.47 È possibile determinare il modulo della spinta idrostatica su una superficie piana immersa in acqua, conoscendo solamente l'affondamento del baricentro dalla superficie libera e l'area della superficie, ma non la forma della superficie e la sua inclinazione nello spazio? Perché?

Analisi Si. Perché il modulo della spinta su una superficie piana è pari al prodotto dell'area della superficie per la pressione nel baricentro. Questa, a sua volta, è uguale alla somma della pressione atmosferica vigente sulla superficie libera e del prodotto del peso specifico del liquido per l'affondamento del baricentro sotto la superficie libera.

3.48 Un piatto orizzontale completamente immerso in acqua è sospeso tramite una funicella attaccata al baricentro della faccia superiore. Come varia la spinta sulla faccia superiore quando il piatto ruota di 45° attorno a un asse baricentrico orizzontale, rimanendo comunque completamente immerso?

Analisi Essendo il modulo della spinta su una superficie piana pari al prodotto del peso specifico del liquido per l'affondamento del baricentro e per l'area della superficie, il modulo della spinta sulla faccia superiore del piatto non varia, poiché rimangono invariati sia l'area della superficie che l'affondamento del baricentro rispetto alla superficie libera.

3.49 La sezione trasversale delle dighe è più larga alla base. Perché?.

Analisi La sezione trasversale delle dighe è più larga alla base perché la spinta che la diga riceve dal liquido è crescente con la profondità. Ciò in quanto nei liquidi la pressione aumenta linearmente con la profondità.

3.50 Come si calcola la componente orizzontale della spinta idrostatica su una superficie curva?

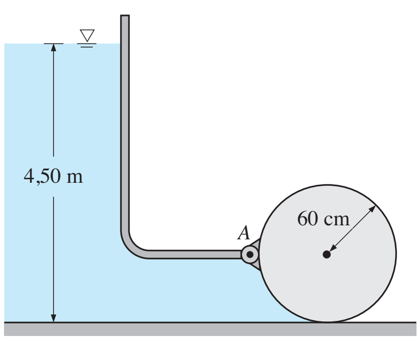
Analisi La componente orizzontale secondo una qualsiasi direzione della spinta idrostatica su una superficie curva è uguale (in modulo e retta d'azione) alla spinta idrostatica agente sulla superficie piana verticale che si ottiene proiettando la superficie curva su un piano verticale normale a quella direzione.

3.51 Come si calcola la componente verticale della spinta idrostatica su una superficie curva?

Analisi La componente verticale della spinta idrostatica su una superficie curva ha modulo uguale al peso del volume di liquido, reale o virtuale, compreso tra la superficie curva e il piano dei carichi idrostatici.

3.52 Come si può individuare la retta d'azione della spinta che un fluido a densità costante esercita su una calotta sferica, noti i valori della componente orizzontale e della componente verticale?

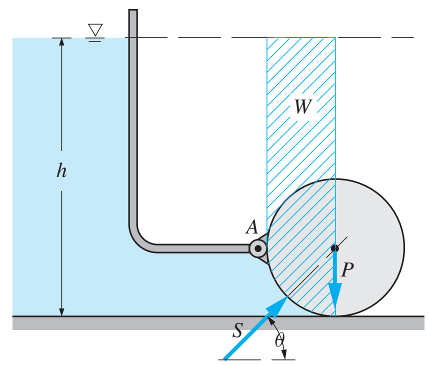
Analisi La retta d'azione della spinta che un fluido a densità costante esercita su una calotta sferica passa sempre per il centro della sfera perché la spinta è il risultante di un sistema di spinte elementari ciascuna delle quali, essendo ortogonale all'elemento di superficie su cui agisce, ha retta d'azione passante per il centro della sfera. Le rette d'azione dei vettori elementari passano tutte per lo stesso punto e, quindi, il vettore risultante passa anch'esso per quel punto. Noti i valori della componente orizzontale S_O e della componente verticale S_V, l'angolo che la retta d'azione della spinta forma con l'orizzontale è $\theta = \arctan(S_V/S_O)$.



3.53 Una paratoia cilindrica con raggio di 60 cm, incernierata in A, come indicato in figura, quando il livello dell'acqua raggiunge 4,50 m si apre ruotando attorno ad A. Determinare (a) modulo e retta d'azione della spinta sulla paratoia per unità di lunghezza, nel momento in cui essa si apre, e (b) il suo peso.

Analisi *(a)* Per la 3.42, la componente verticale S_V della spinta relativa S che il liquido esercita sulla paratoia è pari, in modulo, al peso del volume di liquido W, indicato in figura, compreso tra il piano dei carichi idrostatici relativi del liquido e la superficie curva. Per unità di lunghezza del cilindro, essendo $h =$ 4,50 m l'altezza della superficie libera sul fondo ed $R =$ 0,60 m il raggio del cilindro, è

$$W = R(h - R) + \frac{\pi R^2}{4} = 0{,}60 \times (4{,}50 - 0{,}60) + \frac{\pi \times 0{,}60^2}{4} = 2{,}62 \text{ m}^3$$



Per cui, essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, è

$$S_V = \rho g W = 1\,000 \times 9{,}81 \times 2{,}62 = 25\,700 \text{ N}$$

Essa è diretta verso l'alto in quanto così è diretta la componente verticale della generica spinta elementare. Per la 3.41, la componente orizzontale S_O della spinta S per unità di lunghezza è pari alla spinta che si esercita sulla superficie rettangolare di altezza R e lunghezza unitaria, che si ottiene proiettando la superficie curva sul piano verticale parallelo all'asse del cilindro. Per cui, essendo $h_G = h - R/2 = 4{,}50 - 0{,}30 = 4{,}20$ m l'affondamento del baricentro rispetto alla superficie libera ed $A = 1 \times R = 0{,}60$ m^2 l'area della superficie, si ha

$$S_O = \rho g h_g A = 1\,000 \times 9{,}81 \times 4{,}20 \times 0{,}60 = 24\,700 \text{ N}$$

Per la 3.45, il modulo della spinta idrostatica relativa che agisce sulla paratoia vale

$$S = \sqrt{S_O^2 + S_V^2} = \sqrt{24\,700^2 + 25\,700^2} = 35\,600 \text{ N} = 35{,}6 \text{ kN}$$

e la sua retta d'azione è inclinata sull'orizzontale di un angolo

$$\theta = \arctan \frac{S_V}{S_O} = \arctan \frac{25\,700}{24\,700} = 46{,}2°$$

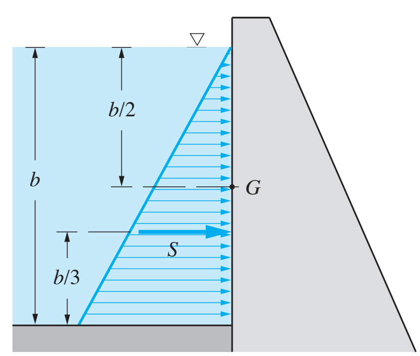
Quindi, la spinta idrostatica che agisce sulla paratoia ha modulo pari a 35,6 kN e la sua retta d'azione passa per il centro della sezione circolare del cilindro formando con l'orizzontale un angolo di 46,2°. Il verso è da sinistra verso destra e dal basso verso l'alto.
(b) Quando la paratoia si apre, la reazione di appoggio del fondo su di essa è nulla. In questa situazione, le forze che agiscono sulla paratoia, per unità di lunghezza, sono, oltre alla reazione della cerniera, il peso proprio P e la spinta idrostatica S. Per l'equilibrio dei momenti attorno alla cerniera, si ha

$$SR \operatorname{sen}\theta - PR = 0$$

da cui

$$P = S \operatorname{sen}\theta = 35{,}6 \times \operatorname{sen} 46{,}2° = 25{,}7 \text{ kN}$$

3.54 Una diga larga 360 m è piena per un'altezza di 60 m. Calcolare (*a*) la spinta sulla diga e (*b*) la pressione al piede.



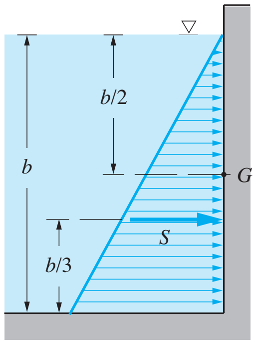
Analisi *(a)* La spinta S sulla diga, essendo nulla la pressione relativa esterna, è pari alla spinta relativa dell'acqua, il cui modulo, per la 3.26, è uguale al prodotto dell'area A della parete, di altezza $b = 60$ m e larghezza $a = 360$ m, per la pressione relativa nel suo baricentro. Per cui, essendo $h_G = b/2$ l'affondamento del baricentro rispetto alla superficie libera e $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, si ha

$$S = \rho g h_G A = \rho g h_G a b = \rho g a b^2/2 =$$
$$= 1\,000 \times 9{,}81 \times 360 \times 60^2/2 = 6{,}36 \times 10^6 \text{ kN}$$

La spinta è ortogonale alla parete. Se, come ipotizzato, la parete è verticale, la spinta è orizzontale ed è applicata ad una distanza dal fondo pari a 1/3 dell'altezza d'acqua.

(b) Al piede della diga, essendo l'affondamento $h = b = 60$ m, la pressione relativa p_r è

$$p_r = \rho g h = 1\,000 \times 9{,}81 \times 60 = 589 \text{ kPa}$$



3.55 Una piscina fuori terra, lunga 4 m, larga 4 m e alta 1,5 m, è piena d'acqua fino all'orlo. (*a*) Calcolare la spinta su una parete e la distanza della retta d'azione dal suolo. (*b*) Raddoppiando l'altezza delle pareti, a piscina completamente piena, la spinta si raddoppia o si quadruplica? Perché?

Analisi *(a)* La spinta S_1 su una parete, essendo nulla la pressione relativa esterna, è pari alla spinta relativa dell'acqua, il cui modulo, per la 3.26, è uguale al prodotto dell'area A della parete, di altezza $b = 1{,}5$ m e larghezza $a = 4$ m, per la pressione relativa nel suo baricentro. Per cui, essendo $h_G = b/2$ l'affondamento del baricentro rispetto alla superficie libera e $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, si ha

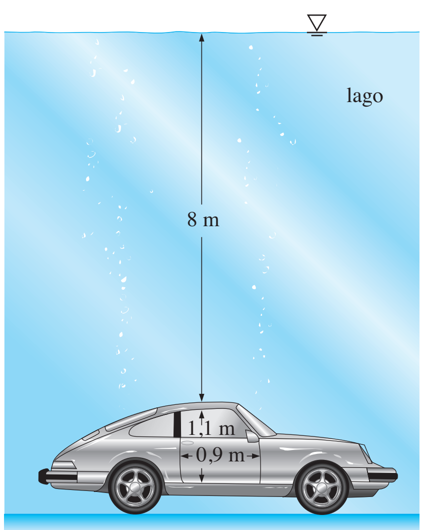
$$S_1 = \rho g h_G A = \rho g h_G a b = \rho g a b^2/2 =$$
$$= 1\,000 \times 9{,}81 \times 4 \times 1{,}5^2/2 = 44\,100 \text{ N}$$

Il centro di spinta si trova sulla verticale per il baricentro ad una distanza h_C dalla superficie libera che, per la 3.30, essendo I_0 il momento di inerzia della superficie premuta rispetto all'asse baricentrico parallelo alla *retta di sponda*, intersezione della superficie premuta con la superficie libera, ed M il suo momento statico rispetto alla retta di sponda, è

$$h_C = h_G + \frac{I_0}{M} = \frac{b}{2} + \frac{ab^3}{12}\frac{1}{ab^2/2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{6} = \frac{2}{3}b =$$
$$= \frac{2}{3} \times 1{,}5 = 1{,}0 \text{ m}$$

e dista, quindi, dal fondo di $b/3 = 0{,}5$ m.
(b) Su una parete di altezza $B = 2b$, sempre a piscina piena per l'intera altezza, la spinta relativa S_2, essendo proporzionale al quadrato dell'altezza si quadruplica. Infatti

$$S_2 = \rho g a B^2/2 = \rho g a (2b)^2/2 = 4\rho g a b^2/2 = 4S_1$$



3.56 Un'automobile è immersa in acqua in un lago a fondo piano. La portiera del lato guida è alta 1,1 m e larga 0,9 m e il suo lato superiore è affondato di 8 m sotto la superficie del lago. Determinare la spinta sulla portiera e la posizione del centro di spinta se (*a*) l'automobile è ben sigillata e contiene aria alla pressione atmosferica e (*b*) l'automobile è piena d'acqua.

Ipotesi **1** La portiera può essere considerata verticale e rettangolare piana. **2** Nell'ipotesi (*a*), all'interno dell'automobile la pressione si mantiene pari alla pressione atmosferica, perché l'automobile è ben sigillata; quindi, non ci sono infiltrazioni di acqua e l'aria non viene compressa.
Proprietà La densità dell'acqua del lago è $\rho = 1\,000$ kg/m^3.
Analisi *(a)* La spinta complessiva S sulla portiera, essendo nulla la pressione relativa interna, è pari alla spinta relativa esterna, il cui modulo, per la 3.26, è

uguale al prodotto dell'area A della portiera, di altezza $b = 1{,}1$ m e larghezza $a = 0{,}9$ m, per la pressione relativa nel suo baricentro. Per cui, essendo $h_G = h + b/2 = 8{,}55$ m l'affondamento del baricentro rispetto alla superficie libera, in cui $h = 8$ m è l'affondamento del lato superiore della portiera, si ha

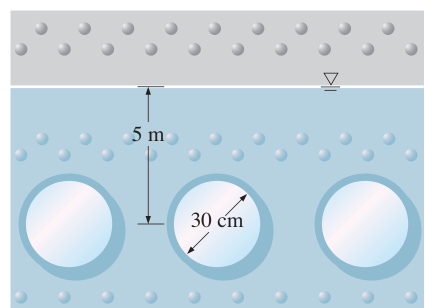
$$S = \rho g h_G A = \rho g h_G ab = 1\,000 \times 9{,}81 \times 8{,}55 \times 0{,}9 \times 1{,}1 = 83\,000 \text{ N}$$

Il centro di spinta si trova sulla verticale per il baricentro ad una distanza h_C dalla superficie libera che, per la 3.30, essendo I_0 il momento di inerzia della superficie premuta rispetto all'asse baricentrico parallelo alla *retta di sponda*, intersezione della superficie premuta con la superficie libera, ed M il suo momento statico rispetto alla retta di sponda, è

$$h_C = h_G + \frac{I_0}{M} = h_G + \frac{ab^3}{12}\frac{1}{abh_G} = h_G + \frac{b^2}{12 h_G} =$$
$$= 8{,}55 + \frac{1{,}1}{12 \times 8{,}55} = 8{,}56 \text{ m}$$

ed ha, quindi, un'eccentricità di appena 1 cm.
(b) Quando l'automobile è piena d'acqua, sulla portiera agisce una forza risultante nulla perché su entrambi i lati la distribuzione della pressione è la stessa.
Discussione Quando all'interno dell'automobile c'è aria alla pressione atmosferica, è impossibile per una persona aprire la portiera. Diventa invece molto facile farlo quando l'automobile è piena d'acqua.

3.57 In una nave da crociera, una cabina posta al livello più basso ha un oblò del diametro di 30 cm. Calcolare la spinta sull'oblò e l'eccentricità del centro di spinta, quando il suo baricentro è alla profondità di 5 m sotto la superficie del mare, essendo la densità relativa dell'acqua di mare pari a 1,025.



Analisi Essendo nulla la pressione relativa interna, la spinta S sull'oblò è pari alla spinta relativa del mare, il cui modulo, per la 3.26, è uguale al prodotto dell'area A dell'oblò, di diametro $D = 30$ cm, per la pressione relativa nel suo baricentro. Per cui, essendo $h_G = 5$ m l'affondamento del baricentro rispetto alla superficie libera e $\rho = 1\,025$ kg/m^3 la densità dell'acqua di mare, si ha

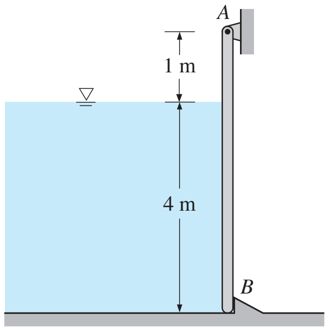
$$S = \rho g h_G A = \rho g h_G \pi D^2/4 = 1\,025 \times 9{,}81 \times 5 \times \pi \times 0{,}30^2/4 = 3\,550 \text{ N}$$

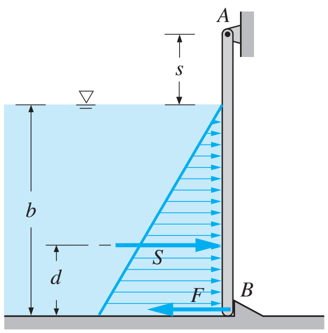
Per la 3.31, l'eccentricità e della spinta, essendo I_0 il momento di inerzia della superficie premuta rispetto all'asse baricentrico parallelo alla retta di sponda ed M il suo momento statico rispetto alla retta di sponda, è

$$e = \frac{I_0}{M} = \frac{\pi D^4}{64}\frac{1}{h_G \pi D^2/4} = \frac{D^2}{16\, h_G} = \frac{0{,}30^2}{16 \times 5} = 0{,}0011 \text{ m}$$

cioè il centro di spinta si trova sulla verticale passante per il baricentro, più in basso del baricentro stesso di poco più di 1 mm.

3.58 Una parete piana quadrata con lato di 5 m, che sbarra un canale pieno d'acqua per un'altezza di 4 m, è incernierata attorno al lato superiore e poggia





su un dentello in corrispondenza del lato inferiore. Determinare la forza che si scarica sull'appoggio.

Analisi Essendo nulla la pressione relativa esterna, la spinta S sulla parete è pari alla spinta relativa dell'acqua, il cui modulo, per la 3.26, è uguale al prodotto dell'area A della superficie bagnata, avente larghezza $a = 5$ m ed altezza $b = 4$ m, per la pressione relativa nel suo baricentro. Per cui, essendo $h_G = b/2$ l'affondamento del baricentro rispetto alla superficie libera e $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, si ha

$$S = \rho g h_G a b = \rho g a b^2/2 = 1\,000 \times 9{,}81 \times 5 \times 4^2/2 = 392 \text{ kN}$$

Il centro di spinta si trova sulla verticale per il baricentro ad una distanza d dal fondo

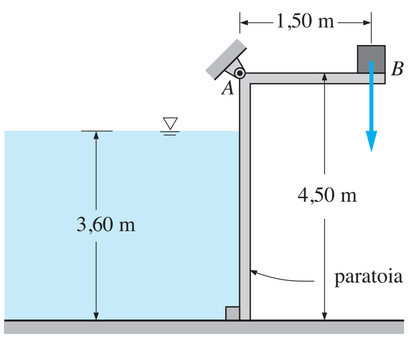
$$d = \frac{b}{3} = \frac{4}{3} = 1{,}33 \text{ m}$$

Per l'equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera i momenti della spinta S e della reazione d'appoggio F devono essere uguali, per cui, essendo $s = 1$ m la distanza della cerniera dalla superficie libera

$$S\,(b + s - d) = F\,(b + s)$$

da cui

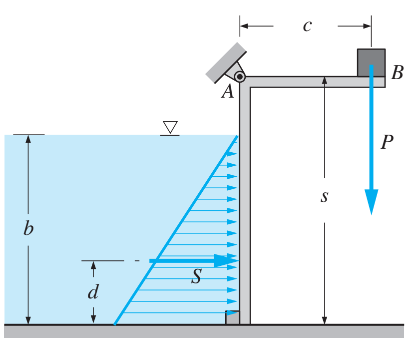
$$F = S\,\frac{b + s - d}{b + s} = 392 \times \frac{4 + 1 - 1{,}33}{4 + 1} = 288 \text{ kN}$$



3.59 Una paratoia a L, profonda 1,5 m, è incernierata come mostrato in figura. Determinare la massa del contrappeso, posizionato all'estremità esterna del lato orizzontale, in modo che la paratoia si apra quando l'altezza d'acqua raggiunge 3,6 m.

Analisi Essendo nulla la pressione relativa esterna, la spinta S sulla paratoia è pari alla spinta relativa dell'acqua, il cui modulo, per la 3.26, è uguale al prodotto dell'area A della superficie bagnata, avente larghezza $a = 1{,}50$ m ed altezza $b = 3{,}60$ m, per la pressione relativa nel suo baricentro. Essendo $h_G = b/2$ l'affondamento del baricentro rispetto alla superficie libera e $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, si ha

$$S = \rho g h_G a b = \rho g a b^2/2 = 1\,000 \times 9{,}81 \times 1{,}50 \times 3{,}60^2/2 = 95{,}4 \text{ kN}$$



Il centro di spinta si trova sulla verticale per il baricentro ad una distanza h_C dalla superficie libera che, per la 3.30, essendo I_0 il momento di inerzia della superficie premuta rispetto all'asse baricentrico parallelo alla retta di sponda ed M il suo momento statico rispetto alla retta di sponda, è

$$h_C = h_G + \frac{I_0}{M} = \frac{b}{2} + \frac{ab^3}{12}\frac{1}{ab^2/2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{6} = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3} \times 3{,}60 = 2{,}40 \text{ m}$$

Il centro di spinta dista, quindi, dal fondo di una quantità $d = b/3 = 1{,}20$ m. Quando la paratoia sta per aprirsi la reazione dell'appoggio alla base è nulla e per l'equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera i momenti della spinta S e del contrappeso P devono essere uguali. Per cui, essendo $s = 4{,}50$ m e $c = 1{,}50$ m la distanza della cerniera, rispettivamente, dal fondo e dal contrappeso, si ha

$$S\,(s - d) = P c$$

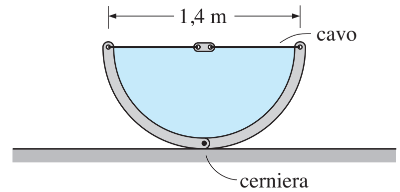
da cui

$$P = S\frac{s-d}{c} = 95{,}4 \times \frac{4{,}50-1{,}20}{1{,}50} = 210 \text{ kN}$$

e

$$m = \frac{P}{g} = \frac{210\,000}{9{,}81} = 21\,400 \text{ kg}$$

3.60 Una grondaia a sezione semicircolare con raggio di 0,7 m è costituita da due porzioni simmetriche incernierate al piede. Le due parti sono collegate tramite cavi posizionati ogni 3 m lungo la grondaia. Calcolare la tensione su ciascun cavo, quando la grondaia è piena fino all'orlo.

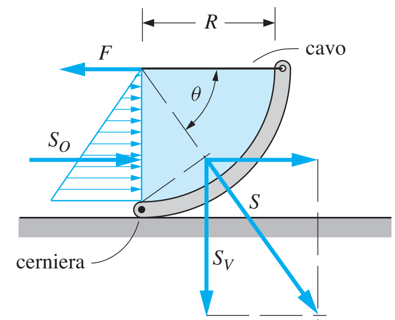


Analisi Si consideri l'equilibrio di una porzione di grondaia, avente lunghezza $L = 3$ m e raggio $R = 0{,}7$ m, sottoposta alla spinta S del liquido ed alla tensione F del cavo. Per la 3.41, essendo la densità dell'acqua $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$, la spinta S ha componente orizzontale

$$S_O = \frac{1}{2}\rho g R^2 L = \frac{1}{2} \times 1\,000 \times 9{,}81 \times 0{,}70^2 \times 3 = 7\,210 \text{ N}$$

e componente verticale pari al peso di liquido compreso tra la superficie curva e la superficie libera

$$S_V = \rho g \frac{\pi R^2}{4} L = 1\,000 \times 9{,}81 \times \frac{\pi \times 0{,}70^2}{4} \times 3 = 11\,300 \text{ N}$$



Per cui, la spinta S ha modulo

$$S = \sqrt{S_O^2 + S_V^2} = \sqrt{7\,210^2 + 11\,300^2} = 13\,400 \text{ N}$$

passa per il centro del cerchio ed è inclinata rispetto all'orizzontale dell'angolo

$$\theta = \arctan\frac{S_V}{S_O} = \arctan\frac{11\,300}{7\,210} = 57{,}5°$$

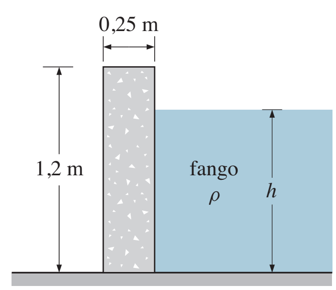
Per l'equilibrio alla rotazione rispetto alla cerniera deve essere

$$FR = SR\,\text{sen}(90° - \theta)$$

da cui

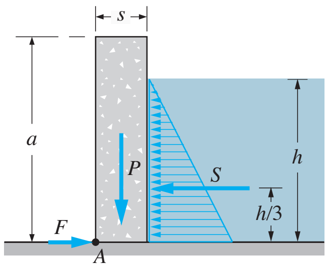
$$F = S\cos\theta = 13\,400 \times 0{,}70 \times \cos 57{,}5° = 5\,040 \text{ N}$$

3.61 Per arginare una colata di fango ($\rho = 1\,800 \text{ kg/m}^3$), si costruisce un muro a gravità, costituito da blocchi di calcestruzzo ($\rho_c = 2\,700 \text{ kg/m}^3$) affiancati, ciascuno alto 1,2 m e largo 0,25 m. Essendo il coefficiente di attrito tra calcestruzzo e terreno pari a 0,3, calcolare la massima altezza che la colata può raggiungere senza che (a) il muro slitti o (b) si ribalti attorno al piede esterno.



Analisi Le forze agenti, per unità di lunghezza ($L = 1$ m), sul muro di calcestruzzo, di altezza $a = 1{,}2$ m e spessore $s = 0{,}25$ m, sono il peso proprio

$$P = \rho_c g L a s = 2\,700 \times 9{,}81 \times 1 \times 1{,}2 \times 0{,}25 = 7\,950 \text{ N}$$



la forza di reazione del terreno F e la spinta S del fango. Essendo $c_a = 0{,}3$ il coefficiente di attrito tra calcestruzzo e terreno, si ha

$$F = c_a P = 0{,}3 \times 7\,950 = 2\,380\,\mathrm{N}$$

Per la 3.39, uno strato di fango di altezza h esercita sul muro una spinta

$$S = \frac{1}{2}\rho g L h^2 = \frac{1}{2} \times 1\,800 \times 9{,}81 \times 1 \times h^2 = 8\,830\,h^2\ \mathrm{N}$$

che agisce orizzontalmente ad $h/3$ dal fondo.
(a) Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale, deve essere $F = S$, da cui

$$h = \sqrt{\frac{2\,380}{8\,830}} = 0{,}52\,\mathrm{m}$$

(b) Per l'equilibrio alla rotazione attorno al punto A, posto alla base del muro dal lato opposto a quello su cui agisce la spinta, si ha

$$P\,\frac{s}{2} = S\,\frac{h}{3} = 8\,830\,h^2\,\frac{h}{3} = 2\,940\,h^3$$

da cui

$$h = \left(\frac{Ps}{2 \times 2\,940}\right)^{1/3} = \left(\frac{7\,950 \times 0{,}25}{2 \times 2\,940}\right)^{1/3} = 0{,}70\ \mathrm{m}$$

Discussione La condizione più critica è quella dell'equilibrio alla traslazione, che viene meno per un'altezza minore di quella limite di equilibrio alla rotazione.

Galleggiamento

3.62 Cos'è la spinta di galleggiamento? Da cosa è causata? Quanto vale la spinta di galleggiamento su un corpo immerso di volume W? Qual è la direzione e qual è la retta d'azione della spinta di galleggiamento?

Analisi La *spinta di galleggiamento* è la forza verticale, diretta verso l'alto, che un fluido esercita su un corpo immerso a causa della differenza di pressione che si crea tra la superficie inferiore del corpo e quella superiore. Tale differenza deriva dal fatto che, in un fluido in quiete, la pressione aumenta linearmente al diminuire della quota, cioè all'aumentare della profondità rispetto alla superficie libera. Il modulo della spinta di galleggiamento su un corpo immerso di volume W vale $\rho g W$, essendo ρ la densità del fluido, cioè è pari al peso del volume di liquido spostato. La retta d'azione di tale forza è la retta verticale che passa per il baricentro del volume.

3.63 Le spinte di galleggiamento su due sfere identiche immerse a profondità diversa sono uguali o diverse? Perché?

Analisi Sono uguali. Infatti, il modulo della spinta di galleggiamento su un corpo immerso di volume W vale $\rho g W$, essendo ρ la densità del fluido. Quindi, è indipendente dalla profondità a cui il corpo è immerso. Ciò perché la spinta di galleggiamento è il risultante delle differenze di pressione che agiscono sulla superficie del corpo, differenze che sono indipendenti dalla quota.

3.64 Le spinte di galleggiamento su due sfere dello stesso diametro, una di alluminio, l'altra di ferro, sono uguali o diverse? Perché?

Analisi Sono uguali. Infatti, il modulo della spinta di galleggiamento su un corpo immerso di volume W vale $\rho g W$, essendo ρ la densità del fluido. Quindi, è indipendente dalla densità del corpo. Ciò perché la spinta di galleggiamento è il risultante delle differenze di pressione che agiscono sulla superficie del corpo, differenze che sono indipendenti da tutto ciò che è interno alla superficie di contorno del corpo.

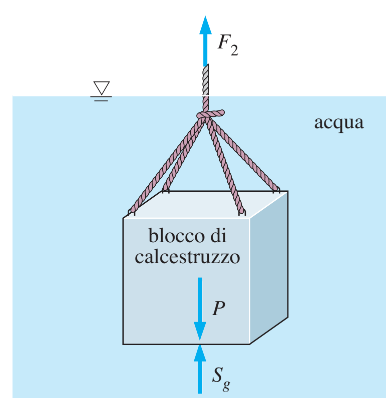
3.65 Le spinte di galleggiamento su un cubo di rame di 3 kg e su una sfera di rame di 3 kg sono uguali o diverse? Perché?

Analisi Sono uguali. Infatti, il modulo della spinta di galleggiamento su un corpo immerso di volume W vale $\rho g W$, essendo ρ la densità del fluido. Quindi, è indipendente dalla forma del corpo. Un cubo e una sfera dello stesso materiale e aventi la stessa massa debbono avere lo stesso volume. Pertanto, ricevono la stessa spinta di galleggiamento.

3.66 Discutere la stabilità di un corpo (a) immerso e (b) galleggiante, il cui baricentro sia a quota superiore rispetto al centro di galleggiamento.

Analisi Il centro di galleggiamento è il punto di applicazione della spinta di galleggiamento ed è, quindi, il baricentro del volume spostato. Un corpo immerso il cui baricentro sia a quota superiore rispetto al centro di galleggiamento è in equilibrio instabile, perché un piccolo disturbo causa comunque un momento ribaltante. Un corpo galleggiante, invece, può trovarsi in condizioni di equilibrio stabile. Ciò accade se, in conseguenza di un piccolo disturbo, il centro di galleggiamento si sposta in un punto sufficientemente lontano dal baricentro (la cui posizione rimane invariata), tale che il peso proprio del corpo e la nuova spinta di galleggiamento creino un momento stabilizzante.

3.67 Per calare dei blocchi di calcestruzzo in un lago per una costruzione sott'acqua, viene usata una gru. Essendo la densità del calcestruzzo di 2 400 kg/m^3, determinare la forza che si scarica sulla gru quando un blocco cubico di 1 m di lato è (a) sospeso in aria e (b) immerso in acqua.



Analisi (a) Quando il blocco è sospeso in aria, la forza F_1 che si scarica sulla gru è pari al peso proprio P del blocco, che, essendo ρ_c la densità del calcestruzzo e W il volume del blocco cubico di lato $a = 1$ m, vale

$$F_1 = P = \rho_c g W = \rho_c g a^3 = 2\,400 \times 9{,}81 \times 1^3 = 23\,500 \text{ N}$$

(b) Quando il blocco è immerso in acqua, la forza che si scarica sulla gru è pari alla differenza tra il peso proprio P del blocco e la spinta di galleggiamento

$S_g = \rho g W$, in cui $\rho = 1\,000$ kg/m^3 è la densità dell'acqua. Per cui, si ha

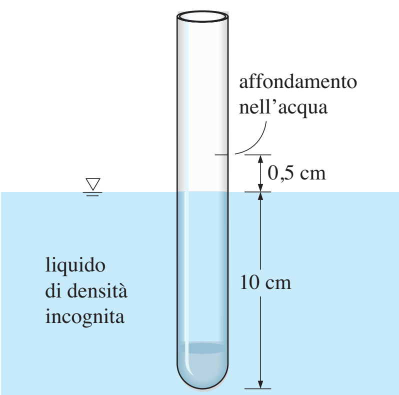
$$F_2 = P - S_g = \rho_c g W - \rho g W = (\rho_c - \rho) g a^3 =$$
$$= (2\,400 - 1\,000) \times 9{,}81 \times 1^3 = 13\,700 \text{ N}$$

Quindi, quando il blocco è immerso in acqua, è come se il suo peso diminuisse di circa il 42%.

3.68 Sul fondo di un lago giace un masso di granito ($\rho = 2\,700$ kg/m^3) da 170 kg. Determinare la forza necessaria per sollevarlo.

Analisi La forza F necessaria per sollevare il masso immerso in acqua è pari alla differenza tra il peso proprio $P = mg$ del masso, di massa $m = 170$ kg, e la spinta di galleggiamento $S_g = \rho_a g W$, essendo $\rho_a = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua e $W = m/\rho$ il volume del masso. Per cui

$$F = P - S_g = mg - \rho_a g W = mg - \rho_a g \frac{m}{\rho} = mg \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) =$$
$$= 170 \times 9{,}81 \times \left(1 - \frac{1\,000}{2\,700}\right) = 1\,050 \text{ N}$$



3.69 Per determinare la densità di un liquido viene usato un densimetro del diametro di 1 cm, la cui graduazione è divenuta illeggibile. Immergendo il densimetro in acqua, si segna il punto di contatto con la superficie libera e si rileva che l'affondamento è di 10,5 cm. Determinare la densità del liquido, sapendo che, immergendo il densimetro nel liquido, tale segno si innalza al di sopra della superficie libera di 0,5 cm.

Analisi Un densimetro che galleggia in un liquido è in equilibrio stabile, per cui la spinta di galleggiamento deve essere uguale al suo peso, qualunque sia il liquido in cui esso è immerso. Quando è immerso in acqua, la spinta S_g vale

$$S_g = \rho g W = \rho g h A$$

in cui $h = 10{,}5$ cm è l'altezza della parte immersa e A è l'area, costante, della sezione trasversale del densimetro. Quando è immerso nel liquido di densità ρ_i incognita, varia solo l'altezza della parte immersa che diviene $h_i = 10$ cm. Dovendo essere ambedue le spinte di galleggiamento uguali al peso del densimetro, si ha

$$\rho g h A = \rho_i g h_i A$$

da cui

$$\rho_i = \rho \frac{h}{h_i} = 1\,000 \times \frac{10{,}5}{10} = 1\,050 \text{ kg/m}^3$$

Discussione Per un dato densimetro cilindrico, il prodotto della densità del fluido per l'altezza della porzione immersa è costante per qualunque fluido.

3.70 Un corpo pesa 7 200 N in aria e 4 790 N in acqua. Calcolarne il volume e la densità, specificando le ipotesi.

Analisi La differenza tra il peso in aria P e il peso in acqua P_a è dovuta alla differenza tra le spinte di galleggiamento dei due fluidi. Poiché quella dell'aria è trascurabile, si ha $P - P_a = S_g = \rho g W$, essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua e W il volume incognito, da cui

$$W = \frac{S_g}{\rho g} = \frac{P - P_a}{\rho g} = \frac{7\,200 - 4\,790}{1\,000 \times 9{,}81} = 0{,}246 \text{ m}^3$$

La densità ρ_c del corpo è

$$\rho_c = \frac{m}{W} = \frac{P}{gW} = \frac{7\,200}{9{,}81 \times 0{,}246} = 2\,980 \text{ kg/m}^3$$

3.71 Si dice che Archimede scoprì il principio che porta il suo nome mentre, immerso in una vasca da bagno, pensava a un modo per capire se la corona di re Gerone fosse davvero d'oro puro. Concepì, così, l'idea che avrebbe potuto determinare la densità media di un oggetto di forma irregolare pesandolo in aria e in acqua. Essendo la densità dell'oro di 19 300 kg/m^3, se un oggetto d'oro pesa 3,20 kgf in aria e 2,95 kgf in acqua, è d'oro puro? È possibile risolvere questo problema senza pesare l'oggetto in acqua, usando un normale secchio?

Analisi Essendo la spinta di galleggiamento dell'aria trascurabile, la differenza ΔP tra il peso $P = \rho_i g W$ di un oggetto, di volume W e densità ρ_i incognita, misurato quando è immerso in aria, ed il peso dello stesso oggetto, misurato quando è completamente immerso in acqua, è pari alla spinta di galleggiamento $S_g = \rho g W$ esercitata su di esso dall'acqua, di densità $\rho = 1\,000$ kg/m^3. La differenza rilevata tra le due pesate consente, pertanto, di determinare facilmente il volume dell'oggetto mediante la relazione

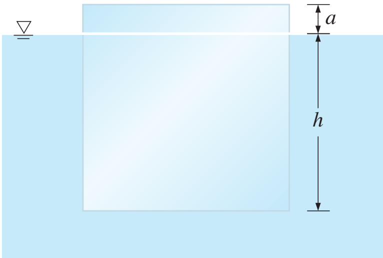
$$W = \frac{S_g}{\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

Essendo nota anche la sua massa $m = P/g$, la densità incognita è

$$\rho_i = \frac{m}{W} = \frac{P}{g}\frac{\rho g}{\Delta P} = \rho \frac{P}{\Delta P} = 1\,000 \times \frac{3{,}20}{3{,}20 - 2{,}95} = 12\,800 \text{ kg/m}^3$$

decisamente inferiore alla densità dell'oro. L'oggetto non è, quindi, d'oro puro. Alternativamente, il problema può essere risolto procedendo come segue. Si pesa un secchio parzialmente riempito d'acqua. Si immerge poi l'oggetto nell'acqua, segnando il livello raggiunto dalla superficie libera. Quindi, tolto l'oggetto, si aggiunge acqua fino al livello marcato in precedenza e si pesa nuovamente il secchio. Avendo aggiunto un volume d'acqua esattamente pari al volume W dell'oggetto, la differenza tra le due pesate è $\Delta P = \rho g W$, da cui, essendo nota la densità ρ dell'acqua, si ottiene il volume dell'oggetto. Il rapporto tra la massa dell'oggetto e il suo volume fornisce la densità cercata.

3.72 Un blocco cubico di ghiaccio galleggia in mare, emergendo dalla superficie per un'altezza di 10 cm. Essendo le densità relative del ghiaccio e dell'acqua di mare rispettivamente 0,92 e 1,025, calcolare l'altezza della parte immersa.



Analisi Il peso $P = \rho_g g W$ del blocco galleggiante, di volume W e densità $\rho_g = 0{,}92 \times 1\,000 = 920\,\text{kg/m}^3$, è pari alla spinta di galleggiamento $S_g = \rho g W_i$ che agisce su di esso, essendo W_i il volume immerso e $\rho = 1{,}025 \times 1\,000 = 1\,025\ \text{kg/m}^3$ la densità dell'acqua di mare. Pertanto, deve essere

$$\rho_g g W = \rho g W_i$$

da cui

$$\frac{W_i}{W} = \frac{\rho_g}{\rho}$$

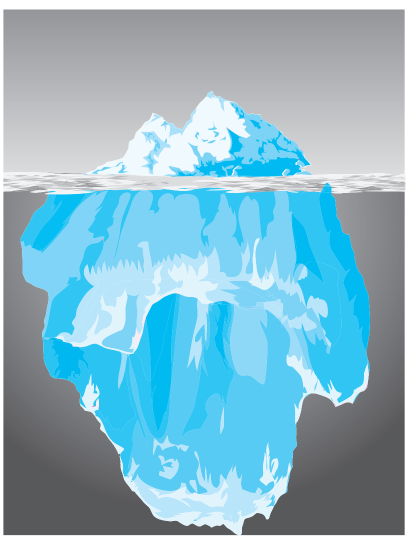
Essendo l'area della sezione trasversale del blocco costante, il rapporto tra i volumi è pari al rapporto tra le altezze, per cui

$$\frac{W_i}{W} = \frac{h}{h+a}$$

Eguagliando alla precedente e ricavando h, si ha

$$h = a\,\frac{\rho_g/\rho}{1-\rho_g/\rho} = a\,\frac{\rho_g}{\rho-\rho_g} = 0{,}10 \times \frac{920}{1\,025-920} = 0{,}876\ \text{m}$$

Discussione La frazione di volume di un blocco di ghiaccio che rimane immersa in mare è pari al 90%. Infatti, il rapporto tra le densità del ghiaccio e dell'acqua di mare è $920/1\,025 = 0{,}90$.



3.73 La porzione emersa di un iceberg è circa il 10% del suo volume. Stimare la sua densità, essendo la densità del mare pari a $1\,025\ \text{kg/m}^3$.

Ipotesi La variazione di densità dell'acqua di mare con la profondità è trascurabile.

Analisi Per l'equilibrio alla traslazione verticale, il peso $P = \rho_g g W$ di un corpo, di volume W e densità ρ_g, immerso in un liquido, deve eguagliare la spinta di galleggiamento $S_g = \rho g W_i$ che agisce su di esso, essendo ρ la densità del liquido e W_i il volume immerso. Se il corpo è completamente immerso, si ha $W = W_i$ e, pertanto, deve essere anche $\rho_g = \rho$, cioè la densità media del corpo immerso deve essere uguale a quella del liquido. Nel caso di un corpo parzialmente immerso, si ha

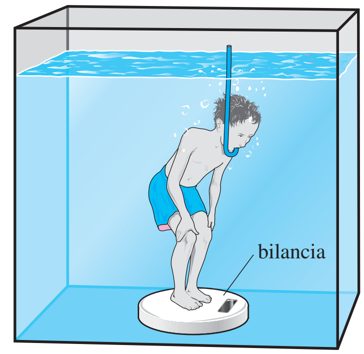
$$\rho_g g W = \rho g W_i$$

da cui, indicando con W_e il volume emerso,

$$\rho_g = \rho\,\frac{W_i}{W} = \rho\,\frac{W-W_e}{W} = 1\,025 \times (1-0,10) = 922\ \text{kg/m}^3$$

Discussione A causa della modesta differenza di densità tra acqua di mare e ghiaccio, la maggior parte del volume di un iceberg è immersa. Ciò spiega perché, di una cosa (o di un fatto) di cui si vede (o si sa) molto poco, si usa dire che quello che si vede (o si sa) è solo "la punta dell'iceberg".

3.74 Una procedura comune nei programmi di fitness è quella di determinare il rapporto tra la massa grassa e la massa muscolare del corpo. Essa si basa sul principio che il tessuto muscolare ha densità ρ_{musc} maggiore rispetto alla densità ρ_{gr} del tessuto grasso. Quindi, più è alta la densità media ρ_m del corpo, maggiore è la frazione muscolare. La densità media del corpo può essere determinata pesando la persona in aria e poi immersa totalmente in acqua. Supponendo che le ossa e tutti i tessuti diversi dal grasso abbiano la stessa densità dei muscoli, determinare la relazione che fornisce la frazione in volume x_{gr} del grasso corporeo.



Analisi La differenza ΔP tra il peso $P = \rho_m g W$ di una persona, di volume W e densità media ρ_m, in aria e in acqua, è pari alla spinta di galleggiamento $S_g = \rho g W$ che riceve dall'acqua. La differenza tra le due pesate consente, pertanto, di determinare facilmente il volume corporeo

$$W = \frac{S_g}{\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

ed, essendo nota la sua massa $m = P/g$, anche la densità media ρ_m del corpo

$$\rho_m = \frac{m}{W} = \frac{P}{g}\frac{\rho g}{\Delta P} = \rho \frac{P}{\Delta P}$$

Essendo il volume corporeo W del corpo pari alla somma della frazione grassa $x_{\text{gr}} W$ e della frazione muscolare $x_{\text{musc}} W$ e la massa totale m pari alla somma della massa grassa m_{gr} e della massa muscolare m_{musc}, si ha

$$m = \rho_m W = m_{\text{gr}} + m_{\text{musc}} = \rho_{\text{gr}} W_{\text{gr}} + \rho_{\text{musc}} W_{\text{musc}} = \\ = \rho_{\text{gr}} x_{\text{gr}} W + \rho_{\text{musc}} x_{\text{musc}} W$$

da cui

$$\rho_m W = \rho_{\text{gr}} x_{\text{gr}} W + \rho_{\text{musc}} (1 - x_{\text{gr}}) W$$

e, semplificando e riordinando,

$$x_{\text{gr}} = \frac{\rho_{\text{musc}} - \rho_m}{\rho_{\text{musc}} - \rho_{\text{gr}}}$$

3.75 La massa totale di una barca vuota, il cui scafo ha un volume di 150 m^3, è di 8 560 kg. Calcolare il carico che la barca può portare senza affondare (a) in un lago e (b) in mare, avente densità relativa di 1,03.

Analisi In ogni condizione di carico, la somma del peso proprio P della barca e del carico C è uguale alla spinta di galleggiamento S_g. Pertanto, il carico massimo $C_{\max}$ che la barca può portare è pari alla differenza tra la spinta di galleggiamento massima $S_{g,\max}$, corrispondente alla condizione di scafo completamente immerso, ed il peso proprio P. Conseguentemente, essendo W il volume della barca, m la sua massa e $\rho = 1\,000$ kg/m^3 e $\rho_m = 1\,030$ kg/m^3 la densità, rispettivamente, dell'acqua dolce e dell'acqua di mare, si ha, nel caso del lago

$$C_{\max} = S_{g,\max} - P = \rho g W - mg = \\ = 9{,}81 \times (1\,000 \times 150 - 8\,560) = 1\,390 \text{ kN}$$

e, nel caso del mare

$$C_{\max,m} = S_{g,\max,m} - P = \rho_m g W - mg =$$
$$= 9{,}81 \times (1\,030 \times 150 - 8\,560) = 1\,430 \text{ kN}$$

Discussione Questa barca, quando naviga in mare, può trasportare un carico di 40 kN in più rispetto a quando naviga in acqua dolce. Navi a pieno carico che viaggiano in mare devono tener conto del fatto che, quando solcano acque dolci (per esempio, se devono raggiungere porti all'interno di fiumi), affondano di più.

Moto rigido dei fluidi

3.76 In quali condizioni il fluido contenuto in un recipiente in moto può essere trattato come un corpo rigido?

Analisi Se all'interno della massa fluida non insorgono sforzi tangenziali, non esiste scorrimento relativo tra strati contigui di fluido. Pertanto, il fluido è in condizione di *equilibrio relativo*, cioè è in moto rigido assieme al suo contenitore rispetto ad un osservatore esterno, ma è in quiete rispetto alle pareti del contenitore.

3.77 Confrontare le pressioni che l'acqua assume al fondo di un bicchiere (*a*) in quiete o in moto a velocità costante (*b*) verso l'alto, (*c*) verso il basso e (*d*) in direzione orizzontale.

Analisi Per le 3.64, la pressione dell'acqua al fondo di un bicchiere in quiete o in moto a velocità costante verso l'alto, verso il basso o in direzione orizzontale ha lo stesso valore in tutti e quattro i casi perché in tutti e quattro i casi l'accelerazione è nulla.

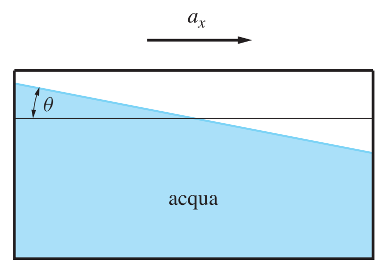
3.78 Due bicchieri d'acqua identici sono uno in quiete e l'altro in moto su un piano orizzontale ad accelerazione costante. Supponendo che non si versi, al fondo di quale bicchiere l'acqua avrà una pressione maggiore sulla parte (*a*) anteriore, (*b*) centrale e (*c*) posteriore?

Analisi Nel bicchiere in quiete, la pressione sul fondo è ovunque costante. In quello in moto, la superficie libera si innalza nella parte posteriore e si abbassa in quella anteriore: allora la pressione al fondo, rispetto al bicchiere fermo, sarà inferiore nella parte anteriore, superiore nella parte posteriore e uguale al centro, dove il livello è uguale in entrambi i bicchieri. In entrambi i casi, la distribuzione delle pressioni è idrostatica, cioè la pressione è direttamente proporzionale all'affondamento rispetto alla superficie libera.

3.79 Un contenitore cilindrico verticale parzialmente riempito di acqua viene posto in rotazione attorno al suo asse con velocità angolare costante. A regime, qual è l'effetto della rotazione sui valori che la pressione al fondo assume al centro e sui bordi?

Analisi Quando un contenitore cilindrico verticale parzialmente riempito di acqua viene posto in rotazione attorno al suo asse con velocità angolare costante, la superficie libera, rispetto al livello in condizioni di quiete, si deprime nella parte centrale e si innalza sui bordi. Poiché la pressione è proporzionale all'affondamento rispetto alla superficie libera, a regime la pressione al fondo – rispetto alle condizioni di quiete – sarà minore al centro e maggiore sui bordi.

3.80 All'interno di un'autocisterna in moto su una strada orizzontale la superficie libera dell'acqua forma con l'orizzontale un angolo di 15°. Calcolare l'accelerazione dell'autocisterna.

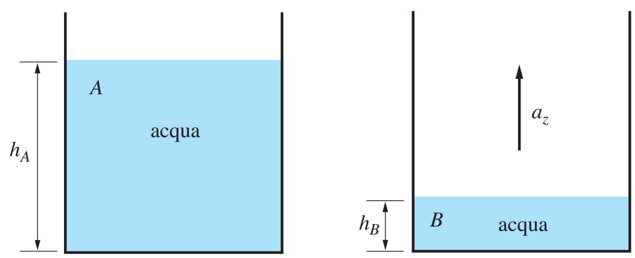


Ipotesi **1** La strada è orizzontale per cui l'accelerazione non ha componente verticale. **2** L'accelerazione è costante.
Analisi Assumendo come asse x quello coincidente con la direzione del moto e come asse z l'asse verticale diretto verso l'alto ed indicando con a_x e con a_z le componenti dell'accelerazione nelle due direzioni e con θ l'angolo che la superficie forma con l'orizzontale, per la 3.73, è

$$a_x = (g + a_z)\tan\theta = (9{,}81 + 0)\tan 15° = 2{,}63 \text{ m/s}^2$$

Discussione L'analisi è valida per qualunque fluido di densità costante, in quanto non vi appare alcuna proprietà fisica del fluido.

3.81 Due serbatoi sono riempiti d'acqua rispettivamente per un'altezza di 8 m e di 2 m. Se il primo è in quiete e il secondo si muove verso l'alto con un'accelerazione di 2 m/s^2, in quale dei due la pressione al fondo sarà maggiore?



Analisi In un liquido di densità ρ, in quiete in un contenitore sottoposto ad accelerazione costante verticale a_z, per la 3.69, essendo $a_x = 0$, la differenza di pressione tra due punti 1 e 2, tra i quali vi sia un dislivello $h = z_1 - z_2$, è

$$p_2 - p_1 = -\rho(g + a_z)(z_2 - z_1) = \rho(g + a_z)h$$

Se il punto 1 è sulla superficie libera e il punto 2 sul fondo, al fondo la pressione relativa vale

$$p_r = \rho(g + a_z)h$$

per cui, nel serbatoio A in quiete, essendo $a_z = 0$ e $h = h_A = 8$ m, si ha la pressione relativa

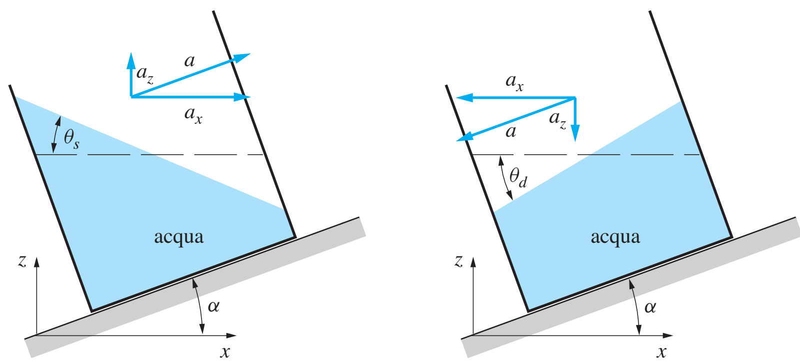
$$p_{rA} = \rho g h_A = 1\,000 \times 9{,}81 \times 8 = 78{,}5 \text{ kN}$$

mentre nel serbatoio B in moto, essendo $a_z = +2\ \mathrm{m/s^2}$ e $h = h_B = 2$ m, è

$$p_{rB} = \rho(g + a_z)h_B = 1\,000 \times (9{,}81 + 2) \times 2 = 23{,}6\ \mathrm{kN}$$

Quindi, la pressione al fondo è maggiore nel primo contenitore.

3.82 Un'autocisterna si muove su una strada inclinata di 20° rispetto all'orizzontale, con un'accelerazione costante di 5 $\mathrm{m/s^2}$ nella direzione del moto. Determinare gli angoli che la superficie libera del liquido forma con l'orizzontale quando la strada è in discesa e quando è in salita.



Analisi Indicando con α l'angolo che la strada forma con l'orizzontale e assumendo come asse x un asse orizzontale e come asse z un asse verticale diretto verso l'alto, quando il moto è in salita le componenti orizzontale e verticale dell'accelerazione a sono, rispettivamente $a_x = a\cos\alpha$ e $a_z = a\,\mathrm{sen}\,\alpha$. Pertanto, per la 3.73, l'angolo θ_s che la superficie libera forma con l'orizzontale è

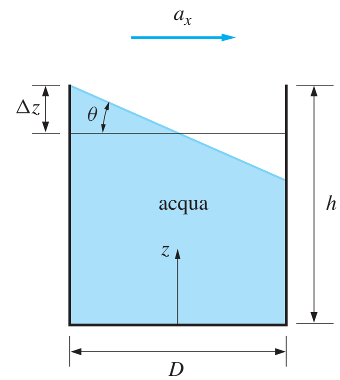
$$\theta_s = \arctan\frac{a_x}{g + a_z} = \arctan\frac{a\cos\alpha}{g + a\,\mathrm{sen}\,\alpha} =$$
$$= \arctan\frac{5 \times \cos 20°}{9{,}81 + 5 \times \mathrm{sen}\,20°} = \arctan 0{,}408 = 22{,}2°$$

Quando il moto è in discesa, entrambe le componenti dell'accelerazione sono negative e si ha

$$\theta_d = \arctan\frac{a_x}{g + a_z} = \arctan\frac{-a\cos\alpha}{g - a\,\mathrm{sen}\,\alpha} =$$
$$= \arctan\frac{-5 \times \cos 20°}{9{,}81 - 5 \times \mathrm{sen}\,20°} = \arctan -0{,}526 = -30{,}1°$$

Discussione L'analisi è valida per qualunque fluido di densità costante, in quanto non vi appare alcuna proprietà fisica del fluido.

3.83 Un contenitore cilindrico del diametro di 40 cm e altezza di 60 cm deve essere usato per trasportare acqua su una strada orizzontale con un'accelerazione massima di 4 $\mathrm{m/s^2}$. Determinare fino a quale altezza può essere riempito affinché non si versi acqua durante il trasporto.



Analisi Assumendo come asse x quello coincidente con la direzione del moto, come asse z l'asse verticale diretto verso l'alto e come origine il centro del fondo del contenitore, l'angolo θ che la superficie forma con l'orizzontale, per la 3.73, essendo $a_z = 0$, è

$$\theta = \arctan \frac{a_x}{g + a_z} = \arctan \frac{4}{9{,}81 + 0} = \arctan 0{,}4077 = 22{,}2°$$

Il massimo sopralzo della superficie libera si ha nella parte posteriore, mentre sull'asse l'altezza rimane immutata. L'innalzamento massimo è

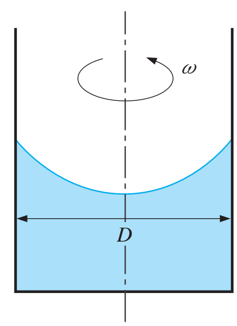
$$\Delta z_{\max} = \frac{D}{2} \tan\theta = \frac{40}{2} \times \tan 22{,}2° = 8{,}16 \text{ cm}$$

per cui, essendo $h = 60$ cm l'altezza del contenitore, la massima altezza d'acqua iniziale deve essere pari a

$$h_{\max} = h - \Delta z_{\max} = 60 - 8{,}16 = 51{,}8 \text{ cm}$$

Discussione L'analisi è valida per qualunque fluido di densità costante, in quanto non vi appare alcuna proprietà fisica del fluido.

3.84 Un contenitore cilindrico verticale del diametro di 60 cm, contenente acqua per un'altezza di 30 cm, è posto in rotazione attorno al suo asse, per cui il livello si abbassa nella parte centrale e si innalza al bordo. Determinare per quale valore della velocità angolare l'altezza d'acqua al centro si annulla al fondo e quale valore di altezza d'acqua si ha al bordo, in tale condizione.



Analisi Assumendo come origine del sistema di riferimento il centro del fondo del contenitore ($r = 0, z = 0$) ed essendo $h_0 = 30$ cm l'altezza d'acqua quando il contenitore è in quiete, $R = D/2 = 30$ cm il raggio del contenitore ed ω la velocità angolare, l'equazione della superficie libera è la 3.81

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

In corrispondenza dell'asse, cioè per $r = 0$, l'altezza d'acqua al fondo si annulla, cioè si ha $z_s = 0$, per

$$\omega = \sqrt{\frac{4gh_0}{R^2}} = \sqrt{\frac{4 \times 9{,}81 \times 0{,}30}{0{,}30^2}} = 11{,}44 \text{ rad/s}$$

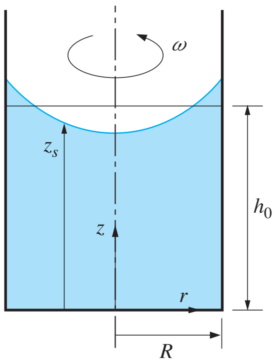
equivalente ad un numero di giri al minuto

$$n = 60\frac{\omega}{2\pi} = 60 \times \frac{11{,}44}{2 \times \pi} = 109 \text{ gpm}$$

Per la 3.82, a tale velocità corrisponde un'altezza d'acqua massima al bordo, cioè per $r = R$

$$z_{s,\max} = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} = 0{,}3 + \frac{11{,}44^2 \times 0{,}3^2}{4 \times 9{,}81} = 0{,}600 \text{ m}$$

Discussione L'analisi è valida per qualunque fluido di densità costante, in quanto non vi appare alcuna proprietà fisica del fluido.



3.85 Un contenitore cilindrico verticale, del diametro di 40 cm e altezza di 90 cm, contenente acqua per un'altezza di 60 cm, è posto in rotazione attorno al suo asse con velocità angolare costante di 120 gpm. Calcolare l'abbassamento di livello al centro.

Analisi Assumendo come origine del sistema di riferimento il centro del fondo del contenitore ($r = 0, z = 0$) ed essendo $h_0 = 60$ cm l'altezza d'acqua quando il contenitore è in quiete, $R = 20$ cm il raggio del contenitore ed ω la velocità angolare, l'equazione della superficie libera è la 3.81

$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

Essendo n il numero di giri al minuto, la velocità angolare è

$$\omega = \frac{2\pi}{60}n = \frac{2 \times \pi \times 120}{60} = 12{,}6 \text{ rad/s}$$

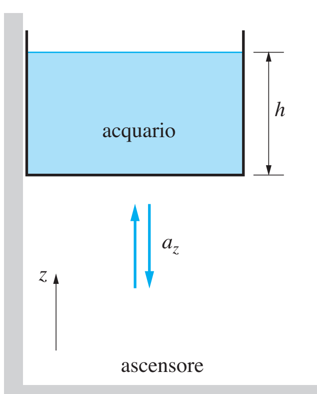
In corrispondenza dell'asse del contenitore, cioè per $r = 0$, l'altezza d'acqua è

$$z_{s,0} = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} = 0{,}6 - \frac{12{,}6^2 \times 0{,}2^2}{4 \times 9{,}81} = 0{,}438 \text{ m}$$

Quindi, rispetto alla condizione di quiete si ha un abbassamento di livello

$$\Delta h = h_0 - z_{s,0} = 0{,}6 - 0{,}438 = 0{,}162 \text{ m}$$

Discussione L'analisi è valida per qualunque fluido di densità costante, in quanto non vi appare alcuna proprietà fisica del fluido.



3.86 Un acquario collocato nella cabina di un ascensore contiene acqua per un'altezza di 40 cm. Calcolare la pressione al fondo della vasca quando l'ascensore è (a) fermo o in movimento con un'accelerazione di 3 m/s^2 (b) verso l'alto e (c) verso il basso.

Analisi In un liquido di densità ρ, in quiete in un contenitore sottoposto ad accelerazione costante verticale a_z, per la 3.69, essendo $a_x = 0$, la differenza di pressione tra due punti 1 e 2, tra i quali vi sia un dislivello $h = z_1 - z_2$, è

$$p_2 - p_1 = -\rho(g + a_z)(z_2 - z_1) = \rho(g + a_z)h$$

Se il punto 1 è sulla superficie libera e il punto 2 sul fondo, al fondo la pressione relativa è

$$p_r = \rho(g + a_z)h$$

che, essendo $h = 40$ cm,
(a) ad ascensore fermo, essendo $a_z = 0$, diviene

$$p_r = \rho g h = 1\,000 \times 9{,}81 \times 0{,}40 = 3\,920 \text{ N}$$

(b) ad ascensore in moto verso l'alto, essendo $a_z = +3$ m/s^2, è

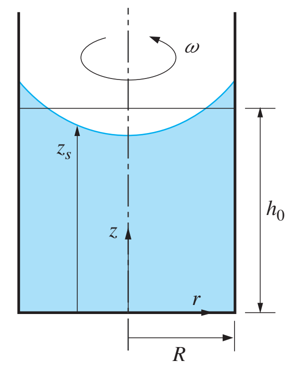
$$p_r = \rho(g + a_z)h = 1\,000 \times (9{,}81 + 3) \times 0{,}40 = 5\,120 \text{ N}$$

(c) ad ascensore in moto verso il basso, essendo $a_z = -3$ m/s^2, è

$$p_r = \rho(g + a_z)h = 1\,000 \times (9{,}81 - 3) \times 0{,}40 = 2\,720 \text{ N}$$

Discussione Quando l'ascensore è in moto verso l'alto, la pressione al fondo è quasi doppia rispetto a quando si muove verso il basso.

3.87 Un serbatoio cilindrico verticale del diametro di 3 m, contenente latte di densità 1030 kg/m^3, ruota con velocità angolare costante di 12 gpm. Calcolare il valore che assume la pressione al fondo in corrispondenza del bordo se al centro è di 130 kPa.



Analisi Assumendo come origine del sistema di riferimento il centro del fondo del contenitore ($r = 0$, $z = 0$) ed essendo ρ la densità del fluido, R il raggio del contenitore ed ω la velocità angolare, la legge di distribuzione della pressione nel fluido è data dalla 3.85

$$p = p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}r^2 - \rho g z$$

nella quale p_0 è la pressione in corrispondenza dell'origine. Pertanto, essendo la velocità angolare

$$\omega = \frac{2\pi}{60}n = \frac{2 \times \pi \times 12}{60} = 1{,}26 \text{ rad/s}$$

in cui n è il numero di giri al minuto, il valore che la pressione assume al fondo ($z = 0$), in corrispondenza del bordo del contenitore ($r = R$), è

$$p_R = p_0 + \frac{\rho\omega^2}{2}R^2 = 130\,000 + \frac{1\,030 \times 1{,}26^2}{2} \times 1{,}50^2 = 131\,800 \text{ Pa}$$

Poiché lungo la verticale ($r =$ costante) la pressione, per la 3.85, varia linearmente con la quota, l'incremento di pressione al bordo rispetto al valore che si ha al centro deve corrispondere ad un dislivello del pelo libero Δh tale che

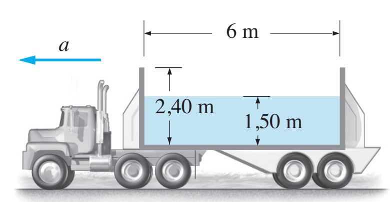
$$p_R - p_0 = \rho g(h_R - h_0) = \rho g \Delta h$$

cioè deve essere

$$\Delta h = \frac{p_R - p_0}{\rho g} = \frac{\rho\omega^2}{2}R^2\frac{1}{\rho g} = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{(1{,}26 \times 1{,}50)^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}182 \text{ m}$$

Per la 3.80 e la 3.82, tale dislivello è costituito per metà da un abbassamento al centro e per l'altra metà da un innalzamento al bordo.
Discussione Quando si progettano contenitori che devono essere posti in rotazione, bisogna tener conto dell'innalzamento della superficie libera sul bordo, che in questo caso è pari a 9,1 cm.

3.88 Un contenitore rettangolare aperto, lungo 6 m e alto 2,40 m, contenente acqua per un'altezza di 1,50 m, è rimorchiato da un camion su una strada orizzontale. Calcolare l'accelerazione o decelerazione massima affinché l'acqua non si versi.



Analisi Assumendo come asse x quello coincidente con la direzione del moto e come asse z l'asse verticale diretto verso l'alto ed indicando con a_x e a_z le componenti, rispettivamente, orizzontale e verticale dell'accelerazione a incognita, l'angolo θ che la superficie libera forma con l'orizzontale è dato dalla 3.73

$$\theta = \arctan \frac{a_x}{g + a_z}$$

da cui, essendo $a_z = 0$,

$$a_x = g \tan\theta$$

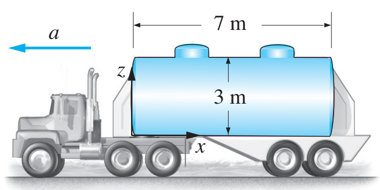
Indicando con Δh il massimo sopralzo rispetto al livello di quiete e con L la lunghezza del contenitore, si ha

$$\tan\theta = \frac{\Delta h}{L/2}$$

per cui, in definitiva, l'accelerazione massima è

$$a_x = g\tan\theta = g\frac{\Delta h}{L/2} = 9{,}81 \times \frac{0{,}90}{6/2} = 2{,}94\ \mathrm{m/s^2}$$

La decelerazione massima è $a_x = -2{,}94\ \mathrm{m/s^2}$.



3.89 Un contenitore cilindrico orizzontale, del diametro di 3 m e lunghezza di 7 m, completamente riempito di acqua, è trainato da un camion su una strada orizzontale. Calcolare la differenza di pressione tra due punti alla stessa quota giacenti, rispettivamente, sulle superfici anteriore e posteriore del contenitore quando il camion (a) accelera a 3 $\mathrm{m/s^2}$ e (b) decelera a 4 $\mathrm{m/s^2}$.

Analisi Assumendo come asse x quello coincidente con la direzione del moto ma con verso opposto, come asse z l'asse verticale diretto verso l'alto e come origine il punto sul fondo del contenitore più vicino alla motrice, la componente orizzontale a_x dell'accelerazione risulta negativa, mentre quella verticale a_z è nulla. La differenza di pressione tra due punti qualsiasi, in generale, è data dalla 3.69

$$p_2 - p_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1)$$

e, tra due punti alla stessa quota,

$$p_2 - p_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1)$$

(a) Quando il camion accelera, la differenza di pressione tra due punti alla stessa quota giacenti, rispettivamente, sulle superfici anteriore (punto 1) e posteriore (punto 2) del contenitore è dovuta al fatto che l'accelerazione orizzontale spinge il fluido verso la parte posteriore della cisterna. Tale differenza, essendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 7$ m, vale

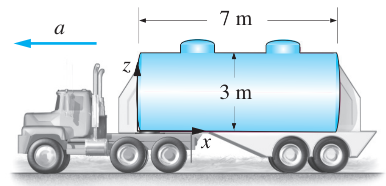
$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) = -1\,000 \times (-3) \times (7 - 0) = 21\ \mathrm{kPa}$$

(b) Quando il camion decelera, la differenza di pressione è dovuta al fatto che la decelerazione orizzontale spinge il fluido verso la parte anteriore della cisterna. Tale differenza vale

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) = -1\,000 \times 4 \times (7 - 0) = -28\ \mathrm{kPa}$$

Discusssione La pressione è maggiore sulla parte posteriore quando il camion accelera e sulla parte anteriore quando decelera.

3.90 Un'autocisterna cilindrica del diametro di 3 m e lunghezza di 7 m, completamente piena di latte di densità 1 020 kg/m^3, avanza su una strada orizzontale con accelerazione di 2,5 m/s^2. Essendo la pressione minima pari a 100 kPa, determinare in quale punto la pressione è massima e calcolarne il valore.



Analisi Assumendo come asse x quello coincidente con la direzione del moto ma con verso opposto, come asse z l'asse verticale diretto verso l'alto e come origine il punto sul fondo del contenitore più vicino alla motrice, la componente orizzontale a_x dell'accelerazione risulta negativa, mentre quella verticale a_z è nulla. La differenza di pressione tra due punti qualsiasi, in generale, è data dalla 3.69

$$p_2 - p_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho(g + a_z)(z_2 - z_1)$$

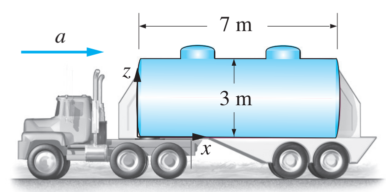
e, se la componente verticale dell'accelerazione è nulla,

$$p_2 - p_1 = -\rho a_x(x_2 - x_1) - \rho g(z_2 - z_1)$$

Il primo addendo del secondo membro è la differenza di pressione dovuta alla componente orizzontale dell'accelerazione che spinge il fluido in direzione opposta a quella dell'accelerazione, cioè verso la parte posteriore della cisterna, mentre il secondo è semplicemente la componente idrostatica. Pertanto, la pressione diminuisce verso l'alto e, a parità di quota, aumenta verso destra. Quindi, il punto in cui la pressione è minima (punto 1) è il punto più alto sulla parete anteriore, di coordinate (0,3); quello in cui la pressione è massima (punto 2) è il punto più basso sulla parete posteriore, di coordinate (7,0). Conseguentemente, la massima differenza di pressione risulta

$$\begin{aligned}\Delta p_{\max} &= p_2 - p_1 = -\rho[a_x(x_2 - x_1) + g(z_2 - z_1)] = \\ &= -1\,020 \times [-2{,}5 \times (7 - 0) + 9{,}81 \times (0 - 3)] = 47{,}9 \text{ kPa}\end{aligned}$$

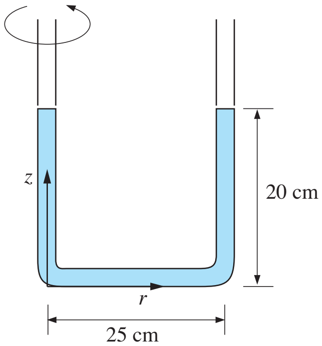
3.91 Risolvere il problema precedente per il caso di una decelerazione di 2,5 m/s^2.



Analisi Diversamente che nel problema precedente, la componente orizzontale a_x dell'accelerazione è positiva e la decelerazione orizzontale spinge il fluido verso la parte anteriore della cisterna. Pertanto, la pressione diminuisce verso l'alto e, a parità di quota, aumenta verso sinistra. Quindi, il punto in cui la pressione è minima (punto 1) è il punto più alto sulla parete posteriore, di coordinate (7,3); quello in cui la pressione è massima (punto 2) è il punto più basso sulla parete anteriore, di coordinate (0,0). Conseguentemente, la massima differenza di pressione risulta

$$\begin{aligned}\Delta p_{\max} &= p_2 - p_1 = -\rho[a_x(x_2 - x_1) + g(z_2 - z_1)] = \\ &= -1\,020 \times [2{,}5 \times (0 - 7) + 9{,}81 \times (0 - 3)] = 47{,}9 \text{ kPa}\end{aligned}$$

Discussione La variazione di pressione lungo la direzione orizzontale è dovuta alla componente orizzontale dell'accelerazione, mentre la variazione di pressione lungo la verticale è dovuta alla gravità e alla componente verticale dell'accelerazione (che in questo caso è nulla).



3.92 Un tubo a U con interasse di 25 cm, contenente alcool per un'altezza di 20 cm, viene posto in rotazione attorno al ramo di sinistra a 4,2 rad/s. Calcolare la differenza di quota che si stabilisce tra i due menischi.

Analisi Assumendo come origine del sistema di riferimento il fondo del ramo di sinistra ($r = 0$, $z = 0$), l'equazione della superficie libera, essendo $h_0 =$ 20 cm l'altezza in quiete, $R = 25$ cm la distanza del ramo esterno dall'asse di rotazione e $\omega = 4{,}2$ rad/s la velocità angolare, è la 3.81

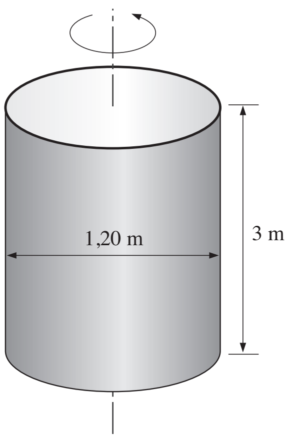
$$z_s = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2)$$

Pertanto, la differenza di quota tra i due menischi è

$$\Delta h = z_{sR} - z_{s0} = \left(h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) - \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) = \frac{\omega^2 R^2}{2g} =$$

$$= \frac{4{,}2^2 \times 0{,}25^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}056 \text{ m}$$

Discussione L'analisi è valida per qualunque fluido di densità costante, in quanto non vi appare alcuna proprietà fisica del fluido.



3.93 Un cilindro verticale chiuso, del diametro di 1,2 m e altezza di 3 m, completamente riempito di benzina di densità 740 kg/m^3, è posto in rotazione attorno al suo asse con velocità angolare costante di 70 gpm. Calcolare (a) la differenza tra le pressioni sull'asse nel punto più alto e in quello più basso e (b) la differenza tra le pressioni al fondo nel centro e al bordo.

Analisi Assumendo come origine del sistema di riferimento il centro del fondo del contenitore ($r = 0$, $z = 0$), la differenza di pressione tra due punti qualsiasi è data dalla 3.84

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g(z_2 - z_1)$$

in cui ρ è la densità del liquido e ω la velocità angolare

$$\omega = \frac{2\pi}{60}n = \frac{2 \times \pi \times 70}{60} = 7{,}33 \text{ rad/s}$$

(a) Se il punto 2 è sull'asse in superficie e il punto 1 sull'asse al fondo, essendo $r_1 = r_2 = 0$ e $z_2 - z_1 = h = 3$ m, si ha

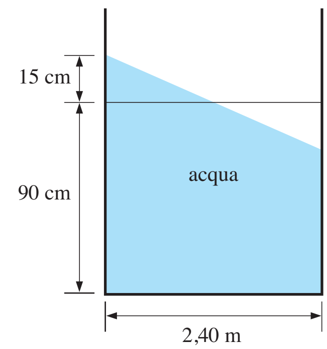
$$p_2 - p_1 = -\rho g h = -740 \times 9{,}81 \times 3 = -21{,}8 \text{ kPa}$$

(b) Se il punto 2 è al fondo sul bordo e il punto 1 al fondo in corrispondenza del centro, essendo $r_1 = 0$, $r_2 = R$ e $z_2 = z_1 = 0$, è

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho\omega^2 R^2}{2} = \frac{740 \times 7{,}33^2 \times 0{,}6^2}{2} = 7{,}16 \text{ kPa}$$

Discussione Lungo la verticale, la legge di distribuzione delle pressioni è lineare (idrostatica) e non è influenzata dalla rotazione del contenitore; lungo la direzione orizzontale, invece, esiste una variazione della pressione interamente dovuta alla rotazione.

3.94 Un contenitore rettangolare aperto, lungo 2,40 m, contenente acqua per un'altezza iniziale di 90 cm, è rimorchiato da un camion su una strada orizzontale. Calcolare la decelerazione del camion dovuta a una frenata per la quale il livello dell'acqua nella parte anteriore risale di 15 cm rispetto al livello iniziale.



Analisi Assumendo come asse x quello coincidente con la direzione del moto e come asse z l'asse verticale diretto verso l'alto ed indicando con a_x e a_z le componenti, rispettivamente, orizzontale e verticale dell'accelerazione a, l'angolo θ che la superficie libera forma con l'orizzontale, per la 3.73, è

$$\theta = \arctan \frac{-a_x}{g + a_z}$$

da cui, essendo $a_z = 0$,

$$a_x = -g \tan \theta$$

Indicando con Δh il sopralzo rispetto al livello di quiete e con L la lunghezza del contenitore, si ha

$$\tan \theta = \frac{\Delta h}{L/2}$$

per cui la decelerazione del camion durante la frenata è

$$a_x = -g \tan \theta = -g \frac{\Delta h}{L/2} = -9{,}81 \times \frac{0{,}15}{2{,}4/2} = -1{,}23 \text{ m/s}^2$$

Riepilogo

3.95 In una caldaia a vapore la pressione è di 75 kgf/cm^2. Esprimere questa pressione in kPa e in bar.

Analisi Essendo

$$1 \text{ kgf} = 9{,}81 \text{ N}$$

$$1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$$

si ha

$$1 \text{ kgf/cm}^2 = 9{,}81 \times 10^4 \text{ N/m}^2 = 9{,}81 \times 10^4 \text{ Pa} = 98{,}1 \text{ kPa} = 0{,}981 \text{ bar}$$

Per cui

$$75 \text{ kgf/cm}^2 = 75 \times 98{,}1 \text{ kPa} = 7\,360 \text{ kPa} = 73{,}6 \text{ bar}$$

3.96 In una condotta posata sott'acqua, avente diametro di 15 cm e lunghezza di 20 m, circola aria di densità 1,3 kg/m^3. Essendo la densità dell'acqua pari a 1 000 kg/m^3, calcolare la spinta di galleggiamento sulla condotta.

Analisi La spinta di galleggiamento S_g sulla condotta è una forza verticale diretta verso l'alto il cui modulo è pari al peso del volume di acqua spostato. Essendo D il diametro esterno della condotta ed L la sua lunghezza, il volume è

$$W = AL = \frac{\pi D^2}{4} L = \frac{\pi \times 0{,}15^2}{4} \times 20 = 0{,}353 \text{ m}^3$$

per cui, essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, la spinta di galleggiamento è

$$S_g = \rho g W = 1\,000 \times 9{,}81 \times 0{,}353 = 3{,}46 \text{ kN}$$

3.97 Il barometro può essere usato come strumento per la misura dell'altitudine. Il pilota di un aereo legge al barometro 690 mmHg mentre il controllo a terra riferisce una lettura barometrica di 753 mmHg. Essendo la densità media dell'aria di 1,20 kg/m^3, qual è la quota dell'aeroplano rispetto al suolo?

Analisi Essendo $\rho_m = 13\,600$ kg/m^3 la densità del mercurio e h_a e h_s le letture barometriche sull'aereo e al suolo, i valori della pressione atmosferica alla quota dell'aereo e al suolo sono, rispettivamente,

$$p_a = \rho_m g h_a$$

e

$$p_s = \rho_m g h_s$$

Trascurando la variazione di densità dell'aria con la quota, vale la legge di Stevin 3.10, secondo la quale la pressione aumenta linearmente al diminuire della quota. Per cui, indicando con ρ la densità media dell'aria e con h la quota dell'aereo rispetto al suolo, deve essere

$$p_s = p_a + \rho g h$$

da cui

$$h = \frac{p_s - p_a}{\rho g} = \frac{\rho_m g (h_s - h_a)}{\rho g} = \frac{13\,600 \times (0{,}753 - 0{,}690)}{1{,}20} = 714 \text{ m}$$

3.98 Un pistone del diametro di 62 mm può scorrere senza attrito in un cilindro verticale contenente un gas alla pressione di 500 kPa. Essendo la pressione atmosferica di 100 kPa, calcolare la massa del pistone.

Analisi Sul pistone di massa incognita m agiscono il peso proprio P, la spinta S_{atm} dell'atmosfera a pressione $p_{\text{atm}} = 100$ kPa e la spinta S del gas a pressione $p = 500$ kPa. Le prime due agiscono verticalmente verso il basso, la terza verso l'alto. Per l'equilibrio, deve essere

$$P + S_{\text{atm}} = S$$

e, essendo A l'area del pistone,

$$mg + p_{\text{atm}} A = pA$$

da cui

$$m = \frac{(p - p_{\text{atm}})A}{g} = \frac{(500 - 100) \times 1\,000 \times \pi \times 0{,}062^2/4}{9{,}81} = 123 \text{ kg}$$

3.99 L'elio viene spesso usato per riempire le mongolfiere perché, a parità di condizioni, esso pesa circa un settimo dell'aria. Essendo la densità dell'aria di 1,16 kg/m^3, calcolare l'accelerazione allo sgancio di una mongolfiera di 500 m^3, riempita di elio, che trasporta due persone di 70 kg ciascuno.

Analisi Per la seconda legge di Newton, l'accelerazione della mongolfiera allo sgancio è pari al rapporto tra la forza F ad essa applicata e la sua massa m. La prima è pari alla differenza tra la spinta di galleggiamento S_g che riceve dall'aria e il peso P della mongolfiera. La seconda è la somma della massa della mongolfiera e della massa caricata m_c. Essendo ρ_e la densità dell'elio e W il volume della mongolfiera, si ha

$$m = \rho_e W + m_c = \frac{1{,}16}{7} \times 500 + 2 \times 70 = 223\,\text{kg}$$

Essendo ρ la densità dell'aria, si ha, in definitiva

$$a = \frac{F}{m} = \frac{S_g - P}{m} = \frac{\rho g W - g m}{m} =$$
$$= 9{,}81 \times \frac{1{,}16 \times 500 - 223}{223} = 15{,}7 \text{ m/s}^2$$

3.100 Determinare il carico massimo, in kg, che può trasportare la mongolfiera del problema precedente.

Analisi Nella situazione di equilibrio limite, la forza F che agisce sulla mongolfiera è nulla, cioè il peso P_{max} a pieno carico della mongolfiera e la spinta di galleggiamento S_g sono uguali in modulo e opposti in verso. Pertanto, indicando con m_{max} la massa totale della mongolfiera a pieno carico, deve essere

$$P_{\text{max}} = m_{\text{max}} g = S_g$$

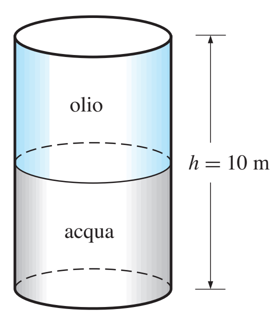
da cui, essendo ρ la densità dell'aria,

$$m_{\text{max}} = \frac{S_g}{g} = \frac{\rho g W}{g} = \rho W$$

Sottraendo la massa della mongolfiera, si ha il carico massimo che la mongolfiera può trasportare

$$m_{c,\text{max}} = m_{\text{max}} - \rho_e W = \rho W - \rho_e W = W(\rho - \rho_e) =$$
$$= \rho W\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{6}{7}\rho W = \frac{6}{7} \times 1{,}16 \times 500 = 497 \text{ kg}$$

3.101 La metà inferiore di un contenitore cilindrico alto 10 m è riempita di acqua e la metà superiore di olio di densità relativa 0,85. Calcolare la differenza di pressione tra base e tetto del contenitore.

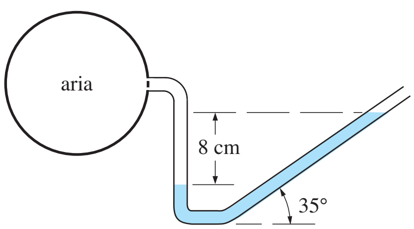


Analisi Essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 e $\rho_o = 850$ kg/m^3 le densità, rispettivamente, dell'acqua e dell'olio, la pressione p_b alla base del contenitore si ottiene aggiungendo alla pressione p_t al tetto le pressioni dovute alle colonne di olio e di acqua

$$p_b = p_t + \rho_o gh/2 + \rho gh/2$$

per cui la differenza di pressione Δp tra base e tetto del contenitore è

$$\Delta p = \rho_o gh/2 + \rho gh/2 = (\rho_o + \rho)gh/2 = \\ = (850 + 1\,000) \times 9{,}81 \times 5 = 90{,}7 \text{ kPa}$$



3.102 Per migliorare l'accuratezza della lettura del dislivello di un manometro semplice, si può inclinare il braccio a contatto con l'atmosfera. Essendo la densità del fluido manometrico di 810 kg/m^3, se il ramo aperto è inclinato di 35° sull'orizzontale, come mostrato in figura, e il dislivello tra i menischi è di 8 cm, qual è la pressione relativa dell'aria nella tubazione?

Analisi La pressione p dell'aria nella tubazione è uguale a quella in corrispondenza del menisco inferiore, che, a sua volta, si ottiene aggiungendo alla pressione p_{atm} sul menisco a contatto con l'atmosfera il termine della variazione di pressione dovuta alla colonna di liquido di densità ρ e altezza h. Quindi

$$p = p_{\text{atm}} + \rho gh$$

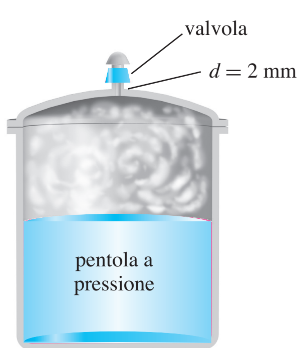
per cui la pressione relativa è

$$p_r = p - p_{\text{atm}} = \rho gh = 819 \times 9{,}81 \times 0{,}080636 \text{ Pa}$$

Essendo il tubo inclinato di $\theta = 35°$, la lunghezza effettiva L della colonna di liquido manometrico è

$$L = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{8}{0{,}574} = 13{,}9 \text{ cm}$$

per cui l'accuratezza della lettura è migliore di quella che si avrebbe se il tubo fosse verticale.

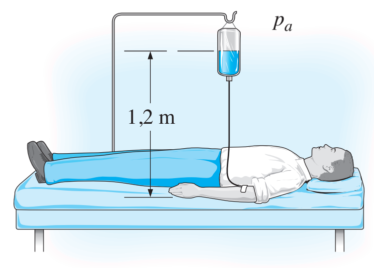


3.103 In una pentola a pressione la cottura dei cibi avviene molto più velocemente che in una pentola normale perché, mantenendo al suo interno una pressione maggiore, è maggiore la temperatura di ebollizione. Per evitare che all'interno si possano raggiungere pressioni troppo elevate, il coperchio delle pentole a pressione è dotato di una valvola costituita da un cilindretto metallico che ostruisce il foro di uscita del vapore finché la spinta del vapore è minore del peso del cilindretto. Calcolare la massa del cilindretto della valvola, del diametro di 2 mm, di una pentola a pressione che deve funzionare a pressione relativa di 100 kPa.

Analisi Per l'equilibrio, il peso P del cilindretto della valvola, di massa m ed area A, deve essere uguale alla spinta relativa $S = pA$ esercitata dal vapore a pressione relativa p. Per cui

$$m = \frac{pA}{g} = \frac{100 \times 1\,000 \times \pi \times 0{,}002^2/4}{9{,}81} = 0{,}0320 \text{ kg} = 32{,}0 \text{ g}$$

3.104 Per fare un'infusione endovenosa si appende il flacone a una altezza sufficiente a controbilanciare la pressione del sangue e a spingere il fluido all'interno della vena. Più in alto è posto il flacone, maggiore è la portata. Calcolare (*a*) la pressione relativa del sangue, sapendo che le pressioni del fluido, di densità pari a 1 020 kg/m^3, e del sangue si bilanciano quando il flacone è posto all'altezza di 1,2 m al di sopra del braccio e (*b*) a quale altezza deve essere posto il flacone perché la pressione sia di 20 kPa.



Analisi *(a)* La pressione del sangue è uguale a quella del fluido quando il flacone è posto ad altezza h al di sopra del braccio. Quindi, la pressione relativa p_r del sangue è pari a quella del fluido di densità $\rho = 1\,020$ kg/m^3 alla profondità $h = 1{,}2$ m, per cui

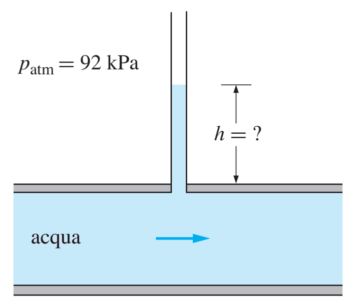
$$p_r = \rho g h = 1\,020 \times 9{,}81 \times 1{,}2 = 12{,}0 \text{ kPa}$$

(b) Viceversa, se la pressione relativa deve essere $p_{r1} = 20$ kPa, la superficie libera del flacone deve stare ad una altezza h_1 dal braccio pari a

$$h_1 = \frac{p_{r1}}{\rho g} = \frac{20 \times 1\,000}{1\,020 \times 9{,}81} = 2{,}0 \text{ m}$$

Discussione Il valore così calcolato si riferisce alla condizione di quiete. Quando il fluido si muove, per effetto delle perdite di energia lungo il tubicino, l'altezza dovrà essere un po' maggiore.

3.105 Calcolare l'altezza alla quale si porta l'acqua nel tubicino, collegato a una tubazione come mostrato in figura, quando la pressione al fondo della tubazione è di 115 kPa, essendo la pressione atmosferica locale pari a 92 kPa e $g = 9{,}8$ m/s^2.



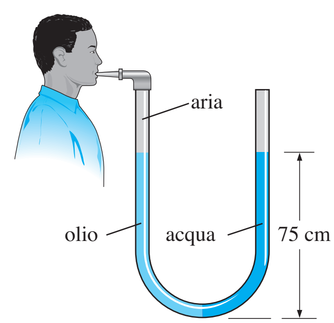
Analisi Essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, D il diametro della tubazione e p_{atm} la pressione atmosferica locale, la pressione al fondo della tubazione è

$$p = p_{atm} + \rho g (h + D)$$

da cui, trascurando D rispetto ad h,

$$h = \frac{p - p_{atm}}{\rho g} = \frac{(115 - 92) \times 100}{1\,000 \times 9{,}8} = 2{,}35 \text{ m}$$

3.106 Un tubo a U contiene due volumi uguali di acqua e olio di densità 790 kg/m^3. Calcolare la pressione relativa esercitata da una persona che soffia sul ramo contenente olio in modo che i due menischi si portino alla stessa altezza di 75 cm dal fondo.



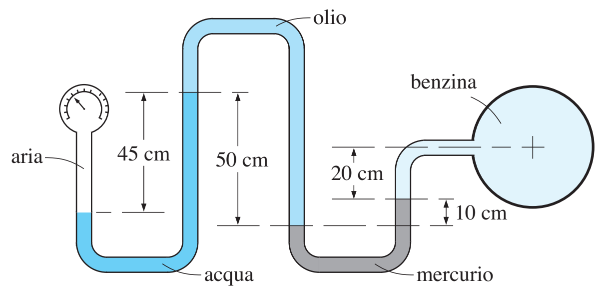
Analisi Indicando con p_r la pressione relativa incognita ed essendo nulla la pressione relativa sul menisco a contatto con l'atmosfera, all'interfaccia acqua-olio deve essere

$$p_r + \rho_o g h = \rho g h$$

in cui $\rho = 1\,000$ kg/m^3 e ρ_o sono le densità, rispettivamente, dell'acqua e dell'olio ed $h = 75$ cm è l'altezza delle due colonne di fluido dal fondo. Pertanto,

$$p_r = (\rho - \rho_o) g h = (1\,000 - 790) \times 9{,}81 \times 0{,}75 = 1\,550 \text{ Pa}$$

3.107 Una tubazione che convoglia benzina di densità relativa 0,70 è collegata a un manometro metallico tramite il manometro a rami multipli indicato in figura. Essendo l'indicazione manometrica di 370 kPa e le densità relative dell'olio e del mercurio pari, rispettivamente, a 0,79 e a 13,6, calcolare la pressione relativa in corrispondenza dell'asse della tubazione.



Analisi La pressione relativa p_r sull'asse della tubazione si ottiene percorrendo il manometro a rami multipli a partire dal manometro metallico, dove vige la pressione relativa $p_m = 370$ kPa, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, $\rho_o = 790$ kg/m^3 la densità dell'olio, $\rho_m = 13\,600$ kg/m^3 la densità del mercurio, $\rho_b = 700$ kg/m^3 la densità della benzina, $h = 45$ cm l'altezza della colonna d'acqua, $h_o = 50$ cm l'altezza della colonna di olio, $h_m = 10$ cm l'altezza della colonna di mercurio e $h_b = 20$ cm quella della colonna di benzina, si ha

$$p_r = p_m - \rho g h + \rho_o g h_o - \rho_m g h_m - \rho_b g h_b = 370\,000 - 9{,}81 \times$$
$$\times (1\,000 \times 0{,}45 - 790 \times 0{,}50 + 13\,600 \times 0{,}10 + 700 \times 0{,}20) =$$
$$= 355 \text{ kPa}$$

3.108 La densità di un corpo galleggiante di peso noto può essere determinata aggiungendo al corpo dei pesi in modo che l'insieme risulti completamente immerso. Determinare la densità media di un tronco di legno del peso di 1 540 N, sapendo che per fare immergere il tutto in acqua bisogna aggiungere 34 kg di piombo di densità 11 300 kg/m^3.

Analisi Il corpo completamente immerso è costituito da un tronco di legno di peso $P_l = 1\,540$ N, massa m_l, densità media ρ_l incognita e volume W_l e da una massa $m_p = 34$ kg di piombo, di densità $\rho_p = 11\,300$ kg/m^3 e volume W_p. Il corpo, di volume complessivo W, è in equilibrio sotto l'azione del suo peso P e della spinta di galleggiamento S_g. Per cui, essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, si ha

$$P = \rho_l g W_l + \rho_p g W_p = S_g = \rho g W$$

da cui

$$W = \frac{\rho_l W_l + \rho_p W_p}{\rho} = \frac{m_l + m_p}{\rho}$$

e, quindi, essendo

$$m_l = \frac{P_l}{g} = \frac{1\,540}{9{,}81} = 157 \text{ kg}$$

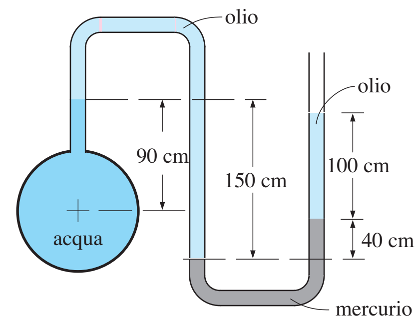
e $W = W_l + W_p$, si ha

$$W_l = W - W_p = \frac{m_l + m_p}{\rho} - \frac{m_p}{\rho_p} = \frac{157 + 34}{1\,000} - \frac{34}{11\,300} = 0{,}188 \text{ m}^3$$

per cui

$$\rho_l = \frac{m_l}{W_l} = \frac{157}{0{,}188} = 835 \text{ kg/m}^3$$

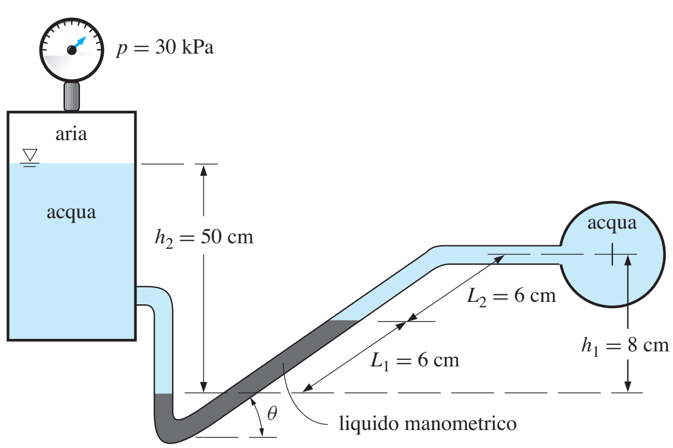
3.109 Una tubazione che convoglia acqua è collegata a un manometro a doppia U come indicato in figura. Essendo le densità relative dell'olio e del mercurio pari, rispettivamente, a 0,80 e a 13,6, calcolare la pressione relativa in corrispondenza dell'asse della tubazione.



Analisi La pressione relativa p_r in corrispondenza dell'asse della tubazione si ottiene percorrendo il manometro a partire dal menisco a contatto con l'atmosfera, dove vige pressione relativa nulla, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, $\rho_o = 800$ kg/m^3 la densità dell'olio, $\rho_m = 13\,600$ kg/m^3 la densità del mercurio, $h_{o1} = 100$ cm l'altezza della prima colonna di olio, $h_m = 40$ cm l'altezza della colonna di mercurio, $h_{o2} = 150$ cm l'altezza della seconda colonna di olio e $h = 90$ cm quella della colonna d'acqua, si ha

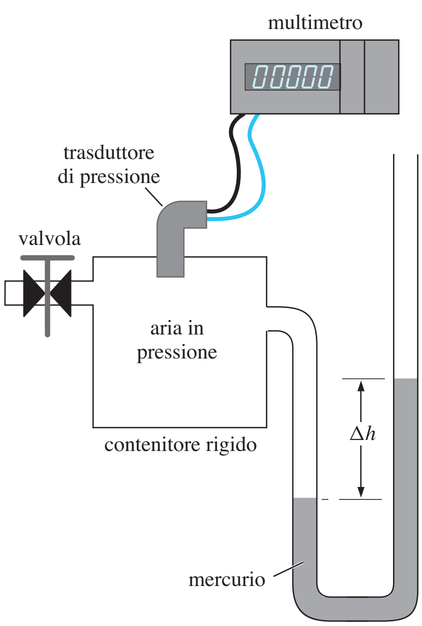
$$\begin{aligned} p_r &= \rho_o g h_{o1} + \rho_m g h_m - \rho_o g h_{o2} + \rho g h = \\ &= 9{,}81 \times (800 \times 1{,}00 + 13\,600 \times 0{,}40 - 800 \times 1{,}50 + 1\,000 \times 0{,}90) = \\ &= 58{,}3 \text{ kPa} \end{aligned}$$

3.110 La pressione dell'acqua che si muove in una tubazione è misurata tramite il dispositivo mostrato in figura. Essendo pari a 2,4 la densità relativa del liquido manometrico, calcolare la pressione nella tubazione.



Analisi La pressione relativa p_r in corrispondenza dell'asse della tubazione si ottiene percorrendo il manometro a partire dalla superficie di separazione con l'aria, dove vige la pressione relativa $p = 30$ kPa, e aggiungendo (quando ci si sposta verso il basso) e sottraendo (quando ci si sposta verso l'alto) i termini delle corrispondenti variazioni di pressione. Essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, $\rho_m = 2\,400$ kg/m^3 la densità del liquido manometrico, $h_2 = 50$ cm l'altezza della prima colonna di acqua, $h_m = h_1/2 = 4$ cm l'altezza della colonna di liquido manometrico e $h_1/2 = 4$ cm l'altezza della seconda colonna d'acqua, si ha

$$p_r = p + \rho g h_2 - \rho_m g h_1/2 - \rho g h_1/2 =$$
$$= 30\,000 + 9{,}81 \times (1\,000 \times 0{,}50 - 2\,400 \times 0{,}04 - 1\,000 \times 0{,}04) =$$
$$= 33{,}6 \text{ kPa}$$



3.111 In funzione delle pressioni da misurare i trasduttori di pressione generano segnali analogici, normalmente tra 4 mA e 20 mA oppure tra 0 V e 10 V. Per la loro taratura, si può usare un sistema come quello schematizzato in figura, costituito da un contenitore rigido di aria in pressione, al quale è collegato un manometro semplice. Facendo variare la pressione nel contenitore mediante una valvola, se ne misura il valore col manometro e contemporaneamente si misura il segnale elettrico. Date le coppie di valori Δh e I riportati nella tabella, ricavare le costanti a e b della curva di taratura $p = aI + b$ e calcolare la pressione corrispondente al segnale di 10 mA.

Δh (mm)	28,0	181,5	297,8	413,1	765,9
I (mA)	4,21	5,78	6,97	8,15	11,76

Δh (mm)	1 027	1 149	1 362	1 458	1 536
I (mA)	14,43	15,68	17,86	18,84	19,64

Proprietà La densità del mercurio è $\rho_m = 13\,560$ kg/m^3.
Analisi In corrispondenza del generico dislivello Δh, la pressione relativa p_r nell'aria è

$$p_r = \rho_m g \Delta h$$

per cui, per i valori di Δh rilevati, si ha

Δh (mm)	28,0	181,5	297,8	413,1	765,9
p_r (kPa)	3,724	24,14	39,61	54,95	101,9
I (mA)	4,21	5,78	6,97	8,15	11,76

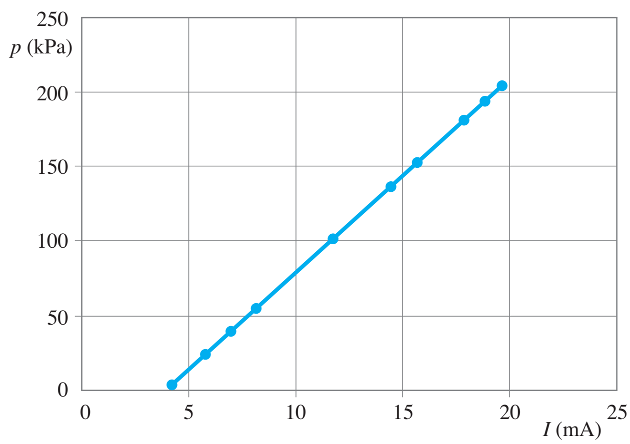
Δh (mm)	1 027	1 149	1 362	1 458	1 536
p_r (kPa)	136,6	152,8	181,2	193,9	204,3
I (mA)	14,43	15,68	17,86	18,84	19,64

Riportando su grafico la pressione in funzione dell'intensità di corrente, si osserva che l'andamento del legame funzionale è lineare. Interpolando i valori con una legge lineare, si ottiene

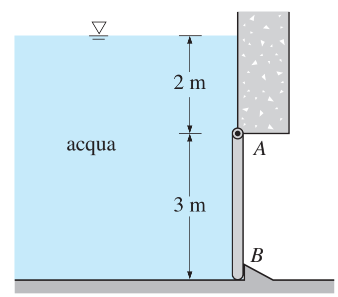
$$p_r = 13{,}0\, I - 51{,}0$$

in cui la pressione è espressa in kPa e l'intensità di corrente in mA. Per $I = 10$ mA, si ha $p_r = 79$ kPa.

Discussione La legge di taratura è valida solo all'interno del campo di valori rilevati, cioè per 4,21 mA$\leq I \leq$ 9,64 mA.



3.112 La paratoia rettangolare di figura, alta 3 m e larga 6 m, è incernierata in A e trattenuta da una sporgenza in B. Essendo l'altezza d'acqua a monte della paratoia pari a 5 m, calcolare la spinta e determinare la posizione del centro di spinta.

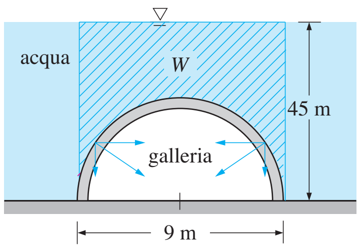


Analisi Su entrambe le facce della paratoia, di altezza $b = 3$ m e larghezza $a = 6$ m, agisce la pressione atmosferica. Pertanto, si può fare riferimento alla spinta relativa S, il cui modulo, per la 3.26, è pari al prodotto dell'area A della superficie bagnata per la pressione relativa p_G nel suo baricentro. Pertanto, essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua e $d = 2$ m l'affondamento del punto più alto della paratoia rispetto alla superficie libera, l'affondamento del baricentro della paratoia è $h_G = d + b/2 = 3{,}5$ m, per cui

$$S = p_G A = \rho g h_G a b = 1\,000 \times 9{,}81 \times 3{,}5 \times 3 \times 6 = 618 \text{ kN}$$

Il centro di spinta si trova sulla verticale per il baricentro ad una distanza h_C dalla superficie libera che, per la 3.30, essendo I_0 il momento di inerzia della superficie premuta rispetto all'asse baricentrico orizzontale parallelo alla retta di sponda ed M il suo momento statico rispetto alla retta di sponda, è

$$h_C = h_G + \frac{I_0}{M} = h_G + \frac{ab^3}{12}\frac{1}{abh_G} = h_G + \frac{b^2}{12\, h_G} =$$
$$= 3{,}5 + \frac{3^2}{12 \times 3{,}5} = 3{,}71 \text{ m}$$



3.113 Calcolare la spinta che agisce su una galleria sottomarina, lunga 240 m, che poggia su un fondale alla profondità di 45 m e ha sezione semicircolare del diametro di 9 m.

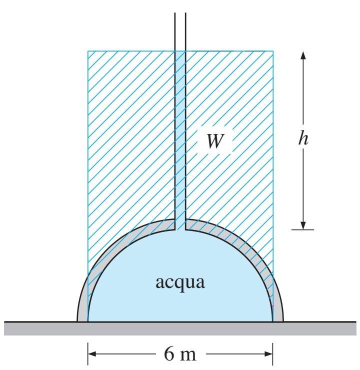
Analisi La pressione atmosferica agisce sia all'interno che all'esterno della galleria. Pertanto, si può fare riferimento alla spinta relativa. La spinta ammette solo componente verticale, in quanto la componente orizzontale della spinta che agisce sulla metà di sinistra della galleria ha modulo uguale e verso opposto a quello della componente orizzontale della spinta che agisce sulla parte di destra. La componente verticale è pari al peso del volume W di liquido indicato in figura, compreso tra la superficie curva e il piano dei carichi idrostatici relativi del liquido, coincidente con la superficie libera. Essendo $L = 240$ m la lunghezza della galleria, $D = 9$ m il suo diametro ed $h = 45$ m la profondità del fondale, si ha

$$W = LDh - L\frac{1}{2}\frac{\pi D^2}{4} = LD\left(h - \frac{\pi D}{8}\right) =$$
$$= 240 \times 9 \times \left(45 - \frac{\pi \times 9}{8}\right) = 89\,600 \text{ m}^3$$

e, quindi,

$$S = \rho g W = 1\,000 \times 9{,}81 \times 89\,600 = 879\,000 \text{ kN}$$

La spinta S è diretta verso il basso, perché così è diretta la componente verticale della generica spinta elementare.



3.114 Una cupola semisferica, del diametro di 6 m e del peso di 490 kN, piena d'acqua, poggia su una superficie orizzontale, come mostrato in figura. Collegando un tubo all'interno della cupola e riempendolo d'acqua, la spinta che il liquido esercita sulla cupola aumenta. Trascurando il peso del tubo e dell'acqua in esso contenuta, calcolare l'altezza fino alla quale bisogna riempire il tubo perché la cupola si sollevi.

Analisi La pressione atmosferica agisce sia all'interno che all'esterno della cupola. Pertanto, si può fare riferimento alla spinta relativa. Quando la cupola è sul punto di sollevarsi, la reazione del terreno su di essa è nulla. Quindi, per l'equilibrio della cupola stessa, la spinta relativa deve essere uguale e opposta al peso proprio della cupola. Tale spinta ha componente orizzontale nulla perché la componente orizzontale della spinta elementare su un generico elementino di superficie è uguale e di verso opposto a quella della spinta che agisce sull'elementino di superficie diametralmente opposto. Ciò equivale a dire che la superficie semisferica ha proiezione nulla su qualunque piano verticale. La componente verticale è pari al peso del volume di liquido virtuale W, indicato in figura, compreso tra la superficie e il piano dei carichi idrostatici. Indicando con h l'altezza d'acqua nel tubo rispetto alla sommità della cupola e con $R = 3$ m il raggio della cupola, il volume W risulta pari al volume del cilindro di raggio R e altezza $h + R$ meno il volume della cupola. Pertanto, è

$$W = \pi R^2(h + R) - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2(h + R - \frac{2}{3}R) = \pi R^2(h + \frac{R}{3})$$

e, quindi, essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua,

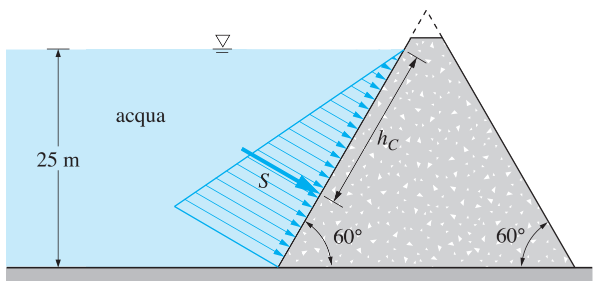
$$S = \rho g W = \rho g \pi R^2(h + \frac{R}{3})$$

Imponendo che sia $S = P$, si ha

$$h = \frac{P}{\rho g \pi R^2} - \frac{R}{3} = \frac{490\,000}{1\,000 \times 9{,}81 \times \pi \times 3^2} - \frac{3}{3} = 0{,}767 \text{ m}$$

cioè la cupola può essere sollevata collegando ad essa un tubicino verticale nel quale l'acqua raggiunga un'altezza di 77 cm.

3.115 La sezione trasversale di una piccola diga a gravità è assimilabile a un triangolo equilatero. La diga è lunga 150 m e ha un'altezza di massima ritenuta di 25 m. Calcolare la spinta sul paramento interno della diga, la posizione del centro di spinta e il modulo della componente orizzontale.



Analisi La pressione atmosferica agisce su ambedue i paramenti della diga. Pertanto, si può fare riferimento alla spinta relativa. Essendo $h = 25$ m l'altezza di massima ritenuta e $\theta = 60°$ l'angolo di inclinazione del paramento rispetto all'orizzontale, il paramento di monte è una superficie piana rettangolare di altezza $b = h/\operatorname{sen}\theta$ e larghezza $a = 150$ m, il cui baricentro ha un affondamento $h_G = h/2$ rispetto alla superficie libera. La spinta su tale superficie è un vettore ortogonale alla superficie stessa, di modulo pari al prodotto dell'area A della superficie per la pressione p_G nel suo baricentro, per cui, essendo la densità dell'acqua $\rho = 1\,000$ kg/m^3, si ha

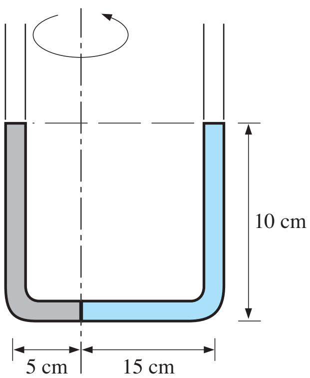
$$S = p_G A = \rho g \frac{h}{2} ab = \rho g \frac{h^2}{2 \operatorname{sen}\theta} a =$$
$$= 1\,000 \times 9{,}81 \times \frac{25^2}{2 \times \operatorname{sen} 60°} \times 150 = 531\,000 \text{ kN}$$

Il centro di spinta si trova sulla retta di massima pendenza baricentrica ad una distanza h_C dalla superficie libera, misurata lungo tale retta, che, per la 3.30, essendo I_0 il momento di inerzia della superficie premuta rispetto all'asse baricentrico parallelo alla retta di sponda ed M il suo momento statico rispetto alla retta di sponda, è

$$h_C = \frac{b}{2} + \frac{I_0}{M} = \frac{b}{2} + \frac{ab^3}{12}\frac{1}{ab^2/2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{6} = \frac{2}{3} b =$$
$$= \frac{2}{3}\frac{h}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{2}{3}\frac{25}{\operatorname{sen} 60°} = 19{,}3 \text{ m}$$

come poteva dedursi dal fatto che il diagramma delle pressioni è triangolare, dovendo la spinta passare per il baricentro di tale diagramma. La componente orizzontale S_O della spinta vale

$$S_O = S \operatorname{sen}\theta = 531\,000 \times \operatorname{sen} 60° = 460\,000 \text{ kN}$$



3.116 Un tubo a U contiene acqua nel ramo destro e un altro liquido nel ramo sinistro. Determinare la densità del fluido nel ramo sinistro, sapendo che i menischi nei due rami si portano alla stessa quota e che i due fluidi sono a contatto tra loro in corrispondenza dell'asse di rotazione quando il tubo a U ruota a 30 gpm attorno a un asse distante 15 cm dal ramo destro e 5 cm dal ramo sinistro.

Ipotesi Il menisco di separazione tra i due liquidi si trova in corrispondenza dell'asse di rotazione.
Analisi Essendo n il numero di giri al minuto, la velocità angolare ω è

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = \frac{2 \times \pi \times 30}{60} = 3{,}14 \text{ rad/s}$$

In un fluido incomprimibile in rotazione rigida, di densità ρ, assumendo come origine del sistema di riferimento un punto sull'asse di rotazione ($r = 0$, $z = 0$), la differenza di pressione tra due punti 1 e 2 qualsiasi è data dalla 3.84

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g\,(z_2 - z_1)$$

Sul menisco di separazione tra i due liquidi la pressione assume lo stesso valore per entrambi i fluidi, così come sui menischi a contatto con l'atmosfera. Pertanto, assumendo il punto 2 sul menisco di separazione e il punto 1 sul menisco a contatto con l'atmosfera, dove vige la pressione p_{atm}, la differenza di pressione tra i due punti per ciascuno dei due liquidi deve essere uguale. Essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, ρ_i la densità incognita, $h = z_1 - z_2 = 10$ cm il dislivello tra i due punti, $R = 15$ cm la distanza dall'asse del braccio contenente acqua e $R_i = 5$ cm la distanza del braccio contenente l'altro liquido, si ha, rispettivamente, per l'acqua

$$p_2 - p_{atm} = \frac{\rho\omega^2}{2}(0 - R^2) - \rho g\,(-h) = \rho\left(-\frac{\omega^2 R^2}{2} + gh\right)$$

e, per l'altro liquido,

$$p_2 - p_{atm} = \frac{\rho_i\omega^2}{2}(0 - R_i^2) - \rho_i g\,(-h) = \rho_i\left(-\frac{\omega^2 R_i^2}{2} + gh\right)$$

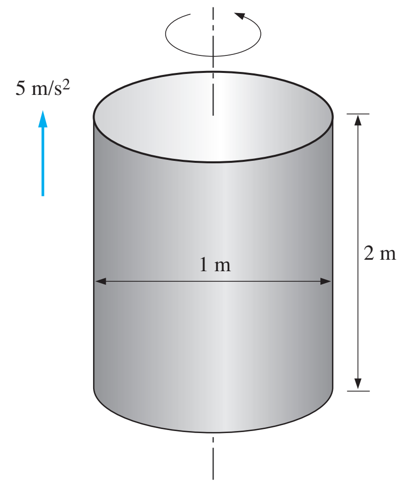
Eguagliando, si ottiene

$$\rho_i = \rho\,\frac{-\omega^2 R^2/2 + gh}{-\omega_i^2 R_i^2/2 + gh} =$$

$$= 1\,000 \times \frac{-3{,}14^2 \times 0{,}15^2/2 + 9{,}81 \times 0{,}10}{-3{,}14^2 \times 0{,}05^2/2 + 9{,}81 \times 0{,}10} = 898 \text{ kg/m}^3$$

Discussione Questo dispositivo, anche se poco pratico, potrebbe essere usato per determinare la densità di un fluido.

3.117 Un cilindro verticale chiuso, del diametro di 1 m e altezza di 2 m, completamente pieno di benzina di densità 740 kg/m^3, viene posto in rotazione attorno al suo asse verticale a 90 gpm e contemporaneamente accelerato verso l'alto con accelerazione di 5 m/s^2. Determinare la differenza tra le pressioni (a) sull'asse al fondo e sulla faccia superiore e (b) al fondo nel centro e al bordo.



Analisi In un fluido incomprimibile in rotazione rigida, di densità ρ, assumendo come origine del sistema di riferimento il centro del fondo del contenitore ($r = 0$, $z = 0$), la differenza di pressione tra due punti 1 e 2 qualsiasi è data dalla 3.84

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho g\,(z_2 - z_1)$$

Considerato che il contenitore è sottoposto anche all'accelerazione verticale $a_z = 5$ m/s^2, è necessario sostituire all'accelerazione di gravità g la somma $g + a_z$. Si ottiene così

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) - \rho(g + a_z)\,(z_2 - z_1)$$

Essendo n il numero di giri al minuto, la velocità angolare ω è

$$\omega = \frac{2\pi}{60}\,n = \frac{2 \times \pi \times 90}{60} = 9{,}42 \text{ rad/s}$$

(a) I punti 1 e 2 stanno sull'asse, rispettivamente, al fondo e sulla faccia superiore. Per cui, essendo $r_1 = r_2 = 0$ e $z_2 - z_1 = h = 2$ m, la differenza di pressione $\Delta p = p_2 - p_1$ è

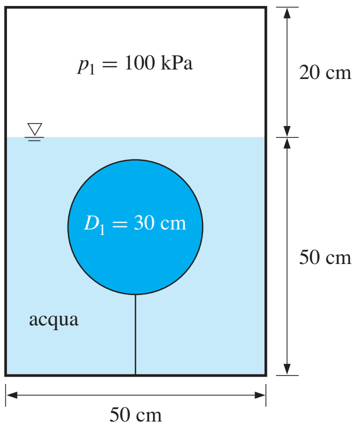
$$\Delta p_a = -\rho(g + a_z)h = -740 \times (9{,}81 + 5) \times 2 = -21{,}9 \text{ kPa}$$

(b) I punti 1 e 2 stanno al fondo, rispettivamente, nel centro e al bordo. Per cui, essendo $R = 0{,}5$ m il raggio del contenitore, si ha $r_1 = 0$, $r_2 = R$ e $z_2 = z_1 = 0$. Quindi, risulta,

$$\Delta p_f = \frac{\rho\omega^2}{2}R^2 = \frac{740 \times 9{,}42^2}{2} \times 0{,}5^2 = 8{,}21 \text{ kPa}$$

Discussione La rotazione del contenitore non influenza la distribuzione della pressione sull'asse. Analogamente, l'accelerazione verticale non influenza la distribuzione della pressione sul fondo del contenitore, né su qualunque piano orizzontale.

3.118 Un palloncino elastico del diametro di 30 cm, contenente aria, è attaccato alla base di un contenitore chiuso, parzialmente riempito di acqua, come mostrato in figura. Trascurando il peso del palloncino e dell'aria in esso contenuta, sul filo a cui è vincolato il palloncino agisce solo la spinta di galleggiamento. Il diametro del palloncino è legato alla pressione sul piano di



separazione tra acqua e aria dalla relazione $p = CD^{-2}$, in cui C è una costante. Aumentando la pressione dell'aria all'interno del contenitore da 100 kPa a 1,6 MPa, qual è la variazione percentuale della forza che agisce sul filo?

Analisi Per l'equilibrio del palloncino, essendo il suo peso proprio e quello dell'aria in esso contenuta trascurabili, la forza F che agisce sul filo a cui è vincolato ha modulo pari alla spinta di galleggiamento S_g che, essendo $D_1 =$ 30 cm il diametro del palloncino e $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ la densità dell'acqua, vale

$$S_{g1} = \rho g W_1 = \rho g \frac{\pi D_1^3}{6} = 1\,000 \times 9{,}81 \times \frac{\pi \times 0{,}3^3}{6} = 139 \text{ N}$$

L'aumento di pressione, dal valore $p_1 = 100$ kPa al valore $p_2 = 1\,600$ kPa, fa sì che il diametro del palloncino, dal valore D_1, si riduca al valore D_2 secondo il legame $p = CD^{-2}$ esistente tra pressione p dell'aria e diametro D. Pertanto, si ha

$$p_1 D_1^2 = p_2 D_2^2$$

da cui

$$D_2 = D_1 \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = 0{,}30 \times \sqrt{\frac{100}{1\,600}} = 0{,}075 \text{ m}$$

A questo valore del diametro corrisponde una spinta di galleggiamento

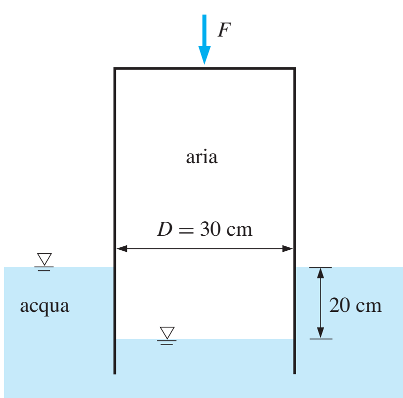
$$S_{g2} = \rho g W_2 = \rho g \frac{\pi D_2^3}{6} = 1\,000 \times 9{,}81 \times \frac{\pi \times 0{,}075^3}{6} = 2{,}17 \text{ N}$$

La variazione percentuale della forza che agisce sul filo è, quindi,

$$\frac{S_{g1} - S_{g2}}{S_{g1}} = \frac{139 - 2{,}17}{139} = 0{,}984 = 98{,}4\%$$

cioè l'aumento di pressione dell'aria fa ridurre la tensione del filo del 98,4%. A tale risultato si poteva pervenire direttamente scrivendo

$$\frac{S_{g1} - S_{g2}}{S_{g1}} = \frac{\rho g W_1 - \rho g W_2}{\rho g W_1} = \frac{\pi D_1^3/6 - \pi D_2^3/6}{\pi D_1^3/6} = \frac{D_1^3 - D_2^3}{D_1^3} =$$
$$= 1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{3/2} = 1 - \left(\frac{100}{1\,600}\right)^{3/2} = 0{,}984$$



3.119 Calcolare la forza necessaria per mantenere nella posizione indicata in figura un contenitore cilindrico capovolto del peso di 80 N.

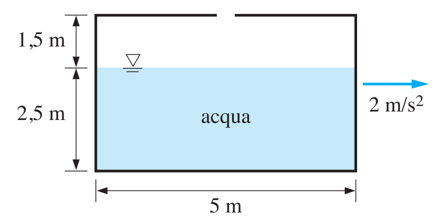
Analisi La pressione atmosferica agisce su tutte le superfici. Pertanto, si può fare riferimento alla spinta relativa. Per l'equilibrio alla traslazione verticale, la forza F necessaria per mantenere il contenitore nella posizione richiesta deve bilanciare il peso proprio P del contenitore e la spinta relativa S che l'aria al suo interno esercita su di esso. Tale spinta ammette solo componente verticale in quanto tutte le spinte elementari che agiscono sulla superficie cilindrica sono orizzontali e hanno, comunque, risultante nulla. La spinta S è, pertanto, pari alla spinta sulla superficie piana che costituisce il tetto del contenitore ed è uguale al prodotto dell'aria A della superficie per la pressione relativa p_r dell'aria all'interno del contenitore. Tale pressione è uguale a quella che vige sulla superficie di separazione con il liquido. Pertanto, essendo $h = 20$ cm l'affondamento di tale superficie rispetto alla superficie libera e $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, si ha

$$S = p_r A = \rho g h \frac{\pi D^2}{4} = 1\,000 \times 9{,}81 \times 0{,}20 \times \frac{\pi \times 0{,}230^2}{4} = 139 \text{ N}$$

La spinta è diretta verso l'alto in quanto, essendo $p_r > 0$, così è diretta la spinta elementare che agisce sul generico elementino di superficie sul tetto del contenitore. Essendo $S > P$, la forza F deve essere diretta verso il basso, come indicato in figura, ed avere modulo

$$F = S - P = 139 - 80 = 59 \text{ N}$$

3.120 Un contenitore, lungo 5 m e alto 4 m, contenente acqua per una profondità di 2,5 m e aperto superiormente, si muove su una superficie orizzontale con accelerazione di 2 m/s^2. Determinare la pressione relativa massima all'interno del contenitore.



Analisi Assumendo come asse x quello coincidente con la direzione del moto e come asse z l'asse verticale diretto verso l'alto, l'angolo che la superficie libera forma con l'orizzontale, essendo $a_x = 2$ m/s^2 e $a_z = 0$, è, per la 3.73,

$$\theta = \arctan \frac{a_x}{g + a_z} = \arctan \frac{2}{9{,}81} = 11{,}5°$$

Il massimo sopralzo della superficie libera si ha nella parte posteriore, mentre sulla superficie verticale a metà lunghezza l'altezza rimane immutata. Essendo $L = 5$ m la lunghezza del contenitore, l'innalzamento massimo vale

$$\Delta z_{\max} = \frac{L}{2} \tan\theta = \frac{L}{2} \frac{a_x}{g} = \frac{5}{2} \frac{2}{9{,}81} = 0{,}510 \text{ m}$$

valore che risulta inferiore al franco di 1,5 m. Sulla superficie libera vige, quindi, ovunque la pressione atmosferica. Pertanto, l'altezza d'acqua massima è in corrispondenza della parete posteriore e vale

$$h_{\max} = h_0 + \Delta z_{\max} = 2{,}5 + 0{,}510 = 3{,}01 \text{ m}$$

La pressione relativa p_r è massima al fondo di tale parete e vale

$$p_r = \rho g h_{\max} = 1\,000 \times 9{,}81 \times 3{,}01 = 29{,}5 \text{ kPa}$$

Discussione Sul fondo del contenitore la pressione relativa varia linearmente da 29,5 kPa, sulla parete posteriore, a 24,5 kPa, sulla verticale a metà larghezza (in cui l'altezza d'acqua è uguale a quella del fluido quando questo è in quiete), a 19,5 kPa sulla parete anteriore (dove si ha un abbassamento della superficie libera uguale, in valore assoluto, all'innalzamento sulla parte posteriore).

3.121 Essendo la densità media di un iceberg di circa 917 kg/m^3, determinare la percentuale del volume totale di un iceberg immerso in acqua di mare con densità di 1 042 kg/m^3.

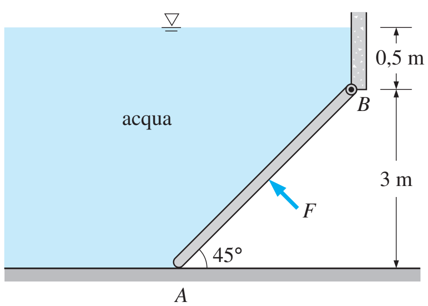
Analisi Per l'equilibrio, il peso proprio P dell'iceberg deve uguagliare la spinta di galleggiamento S_g che l'acqua di mare, di densità ρ, esercita sulla parte immersa di esso, di volume W_i. Per cui, essendo ρ_g la densità dell'iceberg, si ha

$$P = \rho_g g W = S_g = \rho g W_i$$

da cui

$$\frac{W_i}{W} = \frac{\rho_g}{\rho} = \frac{917}{1\,042} = 0{,}880 = 88\%$$

Discussione La percentuale di volume immerso dipende dalla densità dell'acqua di mare, per cui tale percentuale può risultare diversa in mari diversi. A causa degli scambi di calore tra l'acqua di mare e il ghiaccio, l'iceberg si scioglie a volte in maniera non uniforme e il conseguente spostamento del baricentro può causarne il capovolgimento.



3.122 Una paratoia rettangolare, profonda 6 m e del peso di 280 kg, è incernierata in B e appoggiata in A, formando un angolo di 45° con l'orizzontale. Calcolare la forza F minima necessaria per aprirla.

Analisi Indicando con $s = 0{,}5$ m l'affondamento della cerniera B e con $h = 3$ m la proiezione verticale della paratoia, di profondità $L = 6$ m e inclinata dell'angolo $\theta = 45°$ rispetto all'orizzontale, essa ha un'altezza

$$a = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{3}{\operatorname{sen} 45°} = 4{,}24 \text{ m}$$

Essendo $\rho = 1\,000$ kg/m^3 la densità dell'acqua, per la 3.26, la spinta sulla paratoia è uguale al prodotto della pressione nel suo baricentro

$$p_G = \rho g \left(s + \frac{h}{2}\right)$$

per l'area $A = La$. La spinta ha, pertanto, modulo

$$S = \rho g \left(s + \frac{h}{2}\right) La = 1\,000 \times 9{,}81 \times \left(0{,}5 + \frac{3}{2}\right) \times 6 \times 4{,}24 = 499 \text{ kN}$$

è ortogonale alla paratoia e, per la 3.31, è applicata ad una distanza dal baricentro

$$e = \frac{I_0}{M} = \frac{1}{12} La^3 \frac{1}{Ay_G}$$

in cui I_0 è il momento di inerzia della superficie premuta rispetto all'asse baricentrico parallelo alla retta di sponda, M è il momento statico della superficie rispetto alla retta di sponda ed

$$y_G = \frac{a}{2} + \frac{s}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{4{,}24}{2} + \frac{0{,}5}{\operatorname{sen} 45°} = 2{,}83 \text{ m}$$

la distanza del baricentro dalla retta di sponda. Pertanto, essendo

$$e = \frac{1}{12} \frac{a^2}{y_G} = \frac{1}{12} \frac{4{,}24^2}{2{,}83} = 0{,}53 \text{ m}$$

il braccio b della spinta rispetto alla cerniera è

$$b = e + \frac{a}{2} = 0{,}53 + \frac{4{,}24}{2} = 2{,}65 \text{ m}$$

Per l'equilibrio alla rotazione rispetto alla cerniera, trascurando il peso proprio della paratoia, deve essere

$$F\,\frac{a}{2} = Sb$$

da cui

$$F = S\,\frac{2b}{a} = 499 \times \frac{2 \times 2{,}65}{4{,}24} = 624 \text{ kN}$$

maggio 2011