

## RAPPRESENTAZIONI

Importanti in QFT. Spesso si sente allusioni:

"I campi trasformano sotto il gruppo  $G$ "

→ significa che il campo vive in una RAPPRESENTAZ.

del gruppo di Lie  $G$  ← gruppo di simmetria (globale o gauge)

Una RAPP. dell'alg. di Lie  $G$  è un insieme

di MATRICI  $d_R \times d_R$   $t_R^a$   $a=1, \dots, d = \dim G$

che soddisfano le stesse regole di commutazione dei

generatori  $T^a$  di  $G$ , cioè

$$[t_R^a, t_R^b] = i f^{abc} t_R^c$$

↑  
commutazione  $t_R^a t_R^b - t_R^b t_R^a$

Le matrici  $t_R^a$  agiscono su uno SPAZIO VETT.  $V_R$

$d_R$ -dimensionale.  $d_R$  è detto la DIMENSIONE

della RAPP.  $R$ .

Una RAPP arbitraria può essere messa nella forma diagonale a blocchi (con una scelta opportuna delle basi di  $V_R$ ),

cioè tutti i generatori sono simultaneamente block-diagonal.

$$T^1 = \begin{pmatrix} \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } \end{pmatrix}_{\substack{\{d_R - m\} \\ \{m\}}}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} \text{ } & \text{ } \\ \text{ } & \text{ } \end{pmatrix}_{\substack{\{d_R - m\} \\ \{m\} \dots}}$$

- Una rapp. di  $\mathfrak{so}(n)$  è detta RIDUCIBILE.

I blocchi corrispondono a RAPP. IRRIDUCIBILI.

- Se  $G$  è SETTENZIALE, allora  $\forall R$   $t_R^a$  sono traceless

- Fissiamo la normalizzazione di  $t_R^a$ .

•  $\text{tr } t_R^a$ ? ma  $\text{tr } t_R^a = 0$

•  $\text{tr } t_R^a t_R^b = D^{ab}$  in un'algebra semplice

$D^{ab}$  è diagonale e def. positiva  $\Rightarrow$

$\Rightarrow D^{ab}$  può essere portata nella forma

$$\text{tr}(t_R^a t_R^b) = C(R) \delta^{ab} \quad (*)$$

Fissato  $C(R)$  in una particolare rapp.  $R$ ,  $C(R)$  è dato in tutte le altre rapp.

Per  $SU(N)$  c'è una rapp. molto particolare, detta **RAPP. FONDAMENTALE** di  $\dim = N$

$$R = N$$

Normalizzazione tipica scelta è  $C(N) = 1/2$

Data rapp. dell'ALGEBRA, ho rapp. del gruppo

$\rho_R: G \rightarrow$  matrici  $d_R \times d_R$   $\leftarrow$  t.c.  $\rho_R(g_1 g_2) = \rho_R(g_1) \rho_R(g_2)$   
 $g \mapsto \rho_R(g)$

Siccome  $g = e^{i\alpha^a T^a} \longrightarrow \rho_R(e^{i\alpha^a T^a}) = e^{i\alpha^a t_R^a}$

Dimostriamo che  $f^{abc}$  è totalm. antisim., cioè  
 cambia segno quando due indici vengono scambiati  
 (o più propriamente, facciamo permutazione di'speri  
 degli indici  $abc$ ).

[Qui sottointendiamo che  
 l'alg. è semisemplice.

↓  
 $\text{tr}(t^a t^b)$   
 è non-dg.]

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c \Rightarrow f^{abc} = -f^{bac}$$

$$\text{tr}([t^a, t^b] t^d) = i f^{abc} \text{tr}(t^c t^d) = i c(R) f^{abd}$$

||

$$\text{tr}(t^a t^b t^d - t^b t^a t^d) = \text{tr}(t^d t^a t^b - t^a t^d t^b) = \text{tr}([t^d, t^a] t^b)$$

||  
 $i c(R) f^{dab}$

$$\Rightarrow f^{abd} = f^{dab} \Rightarrow f^{abd} = f^{dab} = f^{bda}$$

$\Rightarrow f^{abc}$  è inv. per permutazioni cicliche di  $abc$

Sappiamo che  $f^{abc}$  è antisim. in scambio dei primi due indici:

$$\Rightarrow f^{abc} = f^{bca} = -f^{cba} = -f^{acb} \quad \text{etc.}$$

Qto dimostra che  $f^{abc}$  è antisim. sotto odd permutazioni.

# RAPPRESENTAZIONE CONIUGATA

$$v \in V_{\mathbb{R}} \quad v \mapsto e^{id^a t_{\mathbb{R}}^a} v \quad \leftarrow \text{Trasf. sotto il gruppo}$$

↑  
sp. vett. sul  
campo  $\mathbb{C}$

$$v^* \mapsto \underbrace{e^{-id^a t_{\mathbb{R}}^{a*}}}_{\text{forniscono una RAPP. di } G} v^* \rightarrow v^* \in \bar{R} \quad t_{\bar{R}}^a = -t_{\mathbb{R}}^{a*}$$

← importante in Mecc. Quant. → preserve probab.

Se consideriamo RAPP. UNITARIE di  $G$  (HERM. di  $G$ )

$$t_{\bar{R}}^a = -t_{\mathbb{R}}^{a*} = -t_{\mathbb{R}}^{aT}$$

$$\begin{aligned} [-t_{\mathbb{R}}^{aT}, -t_{\mathbb{R}}^{bT}] &= t_{\mathbb{R}}^{aT} t_{\mathbb{R}}^{bT} - t_{\mathbb{R}}^{bT} t_{\mathbb{R}}^{aT} = -([t_{\mathbb{R}}^a, t_{\mathbb{R}}^b])^T = \\ &= - (if^{abc} t_{\mathbb{R}}^c)^T = if^{abc} (-t_{\mathbb{R}}^c)^T. \end{aligned}$$

Diciamo che una rep.  $R$  è equivalente alla sua coniugata  $\bar{R}$  se  $\exists$  matrice  $S$  t.c.

$$t_{\bar{R}}^a = S t_{\mathbb{R}}^a S^{-1} \quad (*)$$

• Per rep. UNITARIE,  $S$  può essere scelta unitaria

$$\text{Dim. } \rho_{\mathbb{R}}(g)^* = e^{-id^a t_{\mathbb{R}}^{a*}} = e^{id^a t_{\mathbb{R}}^a} = S \rho_{\mathbb{R}}(g) S^{-1} \Rightarrow$$

rep unitaria

$$\Rightarrow S \rho_{\mathbb{R}}(g) = \rho_{\mathbb{R}}(g)^* S \stackrel{\downarrow}{=} \rho_{\mathbb{R}}(g^{-1})^T S \Rightarrow S = \rho_{\mathbb{R}}(g)^T S \rho_{\mathbb{R}}(g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^T S = \rho_{\mathbb{R}}(g)^T S^T \rho_{\mathbb{R}}(g)^* \rho_{\mathbb{R}}(g)^T S \rho_{\mathbb{R}}(g) = \rho_{\mathbb{R}}(g)^{-1} S^T S \rho_{\mathbb{R}}(g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{\mathbb{R}}(g) S S^T = S S^T \rho_{\mathbb{R}}(g) \quad \forall g \Rightarrow S S^T = \lambda \mathbb{1}$$

Normalizzazione di  $S$  non mod. (\*) → posso scegliere  $S$  t.c.  $\lambda=1$ . //

• (\*)  $\Rightarrow S$  è SIMMETRICA o ANTISIMMETRICA

Dim. Dimostriamolo per rep. unitarie:

$$-t_R^e{}^T = S t_R^e S^{-1} \Rightarrow t_R^e = -S^{-T} t_R^e{}^T S^T = S^{-T} S t_R^e S^{-1} S^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (S^{-1} S^T) t_R^e = t_R^e (S^{-1} S^T) \quad \forall a \Rightarrow \text{Lemma di Schur}$$

$$\Rightarrow S^{-1} S^T = \lambda \mathbb{1}, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow S^T = \lambda S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = (S^T)^T = (\lambda S)^T = \lambda^2 S \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow S^T = \pm S //$$

Se  $S$  è SIMMETRICA la rep. è detta REALE

Se  $S$  è ANTISIMMETRICA la rep. è detta PSEUDO-REALE

Se una rep. ha  $t_R^e$  con entrate  $\in i\mathbb{R}$  ( $P_R(g)$  matrici reali)

$$\Rightarrow -t_R^e{}^* = t_R^e \Rightarrow \exists S \text{ che soddisfa (*) e tale}$$

$$S^e = \mathbb{1} \text{ (simmetrica).}$$

Viceversa si può dim. che data rep. REALE, possiamo trovare  $t_R^e$  con entrate  $\in i\mathbb{R}$ .

Dati  $v, w \in V_R$  e  $R$  rep. reale o pseudoreale

$$\Rightarrow v^T S w \text{ è invariante sotto } G$$

Dim.  $v^T S w \mapsto v^T \rho(g)^T S \rho(g) w = v^T \rho(\bar{g}^{-1})^* S \rho(g) w =$   
 $= v^T \rho(\bar{g}^{-1})^* \rho(g)^* S w = v^T S w. //$

ES.  $SU(2)$

$$R = \underline{2} \quad t_R^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad a=1,2,3$$

$$t_R^a = -\left(\frac{\sigma^a}{2}\right)^T = (i\sigma^2) \frac{\sigma^a}{2} (-i\sigma^2) \quad S = i\sigma^2 = \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ PSEUDO-REALE

↔ antisimm.

↪  $\epsilon_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta$  è INVARIANTE

$$R = \underline{3} \quad t_R^a \text{ sono matrici immaginarie} \quad S_{ij} = \delta_{ij}$$

→ REALE

↔ simmetrica

↪  $\delta_{ij} V^i W^j$  è INVARIANTE

↑  
Prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$  è inv. sotto rotazioni.

## RAPPRESENTAZ. AGGIUNTA (Ad)

$V_R = \mathfrak{g}$  Il prodotto di Lie  $[\cdot, \cdot]$  fornisce un'azione lineare di  $\mathfrak{g}$  su se stesso

Prendiamo  $X \in \mathfrak{g}$ , allora  $[X, \cdot]$  è una mappa lineare su  $\mathfrak{g}$

→ può essere rep. da matrici, una volta che scegliamo una base  $T^a$

$$\underbrace{t_{Ad}^a}_{\text{matrice}} \cdot T^b = [T^a, T^b] = i f^{abc} \underbrace{T^c}_{\text{cons. lin. dirett.}}$$

$$A \cdot \underline{e}_m = a_{im} \underline{e}_i$$

↑  
elem. della matrice  
di rep. A

$$v = v_i \underline{e}_i$$
$$(A \cdot v)_j = a_{ji} v_i$$

$$(t_{Ad}^a)^{cb} = i f^{abc}$$

$f^{abc}$  sono REALI e ANTISIMM  $\Rightarrow -(t_{Ad}^a)^T = t_{Ad}^a$   
→ REALE

$$\dim \text{Adj} = \begin{cases} N^2 - 1 & \text{SU}(N) \\ N(N-1)/2 & \text{SO}(N) \\ N(N+1)/2 & \text{Sp}(N) \end{cases}$$

Nota:  $\dim SU(2) = \dim SO(3)$

→ non è un caso: le alg. di Lie sono ISOTORFE

l'alg. dei MOMENTI ANGOLARI  
(generatori delle rotazioni)

Rappresente? studiate in corso M.Q.

$$R = 1$$

$$\text{spin} = 0$$

$$R = 2$$

$$\text{spin} = 1/2$$

$$R = 3$$

$$\text{spin} = 1$$

⋮

⋮

}  $s$   
↑  
numero cost.  
in una data rep.

↳  $M_x, M_y, M_z$  hanno  
regole di comm. di  $SU(2)$   
(PB in mec. class.  
com. in " quant.)

questo numero dà il valore di  $\vec{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$

In una IRREP  $\vec{S}^2 = s(s+1)\hbar^2 \mathbb{1}_R \rightarrow$  caso CONTINUA con

ogni elem. dell'alg., e in  
partic comm con tutti i generatori

## CASIMIR OPERATOR

Per ogni rapp.  $R$  di  $\mathfrak{g}$ , la matrice

$$T^2 \equiv t_R^a t_R^a \quad (\text{somma su } a)$$

commuta con tutti i  $t \in \mathfrak{g}$ .

$$\begin{aligned} [t_R^b, t_R^a t_R^a] &= t_R^a [t_R^b, t_R^a] + [t_R^b, t_R^a] t_R^a = \\ &= t_R^a i f^{bac} t^c + i f^{bca} t^c t_R^a = \\ &= i t_R^a t^c (f^{bac} + f^{bca}) = 0 \end{aligned}$$

$T^2$  si dà un INVARIANTE dell'alg., prende un valore  
fisso in ogni IRREP

$$\Rightarrow \text{tr}_R t_R^a t_R^a = C_2(R) \mathbb{1}_R \quad C_2(R) \text{ è chiamato}$$

QUADRATIC CASIMIR OPERATOR

↑  
appare in  
osservabili di  
teorie di campo  
non abeliane

$$1_4 \quad R = \text{Adj}$$

$$i f^{abc} i f^{acd} = C_2(G) \delta^{bd}$$

$$\rightarrow f^{bac} f^{dac} = C_2(G) \delta^{bd}$$

(l'invariante  $C(R)$ , legato alle normalizzazioni, può essere derivato se conosciamo  $C_2(R)$ ):

$$\text{tr}_R t_R^a t_R^a = C_2(R) \text{tr}_R \mathbb{1}_R =$$

$$C_2(R) \dim(R)$$

||

||

$$\delta^{ab} \text{tr}_R t_R^a t_R^b = C(R) \delta^{ab} \delta^{ab} =$$

$$C(R) \dim(G)$$

$$\text{ES. } \text{SU}(N) \quad C(N) = 1/2$$

$$\rightarrow C_2(N) = C(N) \frac{\dim(\text{SU}(N))}{\dim(N)} = C(N) \frac{N^2 - 1}{N}$$

$$= \frac{N^2 - 1}{2N}$$

PRODOTTO TENSORE DI RAPP.

Consideriamo lo sp. vett.  $V_{R_1} \otimes V_{R_2}$  dove  $R_1, R_2$  sono IRREP

Qto è lo sp. vett. di una RAPP. che  
diciamo  $R_1 \otimes R_2 \rightarrow \dim(R_1 \otimes R_2) = \dim R_1 \cdot \dim R_2$

1 generatore sono:

$$t_{R_1 \otimes R_2}^a = t_{R_1}^a \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes t_{R_2}^a \quad (*)$$

In generale  $R_1 \otimes R_2$  è RIDUCIBILE :

$$R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_i R_i \quad (**)$$

Calcolerò  $op$  :

$$\begin{aligned} (t_{R_1 \otimes R_2}^a)^2 &= (t_{R_1}^a)^2 \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes (t_{R_2}^a)^2 + \\ &+ 2 t_{R_1}^a \otimes t_{R_2}^a \end{aligned}$$

Facciamo la traccia  $(\text{Tr}(A \otimes B) = (\text{tr} A) (\text{tr} B) \text{ prop. distrib.})$

$$\begin{aligned} \text{Ar} (t_{R_1 \otimes R_2}^a)^2 &= \dim R_2 \text{tr} (t_{R_1}^a)^2 + \dim R_1 \text{tr} (t_{R_2}^a)^2 = \\ &= [c_2(R_1) + c_2(R_2)] \dim R_1 \cdot \dim R_2 \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\text{Ar} (t_{R_1 \otimes R_2}^a)^2 = \sum_i \text{Ar} (t_{R_i}^a)^2 = \sum_i c_2(R_i) \dim R_i$$

$$(c_2(R_1) + c_2(R_2)) \dim R_1 \dim R_2 = \sum_i c_2(R_i) \dim R_i \quad (**)$$

Es:  $SU(N) \quad R_1 = N \quad R_2 = \bar{N}$

$N \otimes \bar{N} \rightarrow$  elem. di  $V_{N \otimes \bar{N}}$  sono matrici  $N \times N$

e tali matrici possono essere scritte

come  $\alpha \delta^{ij} + M^{\ddot{u}}$

$\uparrow$   $\uparrow$   $\nwarrow$   
 $1$   $\text{traceless}$   $N^2 - 1$

$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus \text{Ad}$

$\frac{N^2 - 1}{2N}$

$t_1^a t_1^a = c_2(1) \mathbb{1}_1$

Applicando (\*)

$2 c_2(N) N^2 = \overset{0}{c_2(1)} \dim(1) + c_2(G) \dim G$

$\Rightarrow c_2(G) = N \Rightarrow c(N) = N$