Forme differenziali

Partiamo definendo il DIFFERENZIALE df di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Esso è una 1-FORMA (cioè un funzionale lineare che agisce su $V = \mathbb{R}^n$) def. nel seguente modo:

$$df[\bar{v}] \equiv \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \bar{v} \in \mathbb{R}^n$$

Siccome è un funz. lin., esso appartiene a uno sp. vett., detto spazio duale V^* di V. $\exists$ una base di V^*:

- prendiamo le funz. coord. $x_i : \bar{x} \in \mathbb{R}^n \to x_i$ (es. $f(x) = x$ in $\mathbb{R}$)
- i diff. di tali funz. dx_i agiscono nel seguente modo:

$$dx_i[\bar{v}] = \sum_j v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = v_i$$

$$\Rightarrow df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \qquad (*)$$

$\rightsquigarrow$ $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ sono base di V^*; in particolare essa è la base duale di $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

Per una generica manifold M, df è una sezione del FIBRATO COTANGENTE (la cui fibra sul pto p è lo sp. vett. duale dello sp. tangente in p).

$$df \in T^*M \quad \text{con} \quad f : M \to \mathbb{R}$$

cioè $\quad df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$

curva su M che passa per p a $t=0$

Vediamo come agisce su $v \in T_pM \leftarrow v = \frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0}$

$$\hookrightarrow \quad df(p)[v] \equiv \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$$ $\leftarrow$ coincide con $(*)$

In una carta locale la curva γ è data dalle funzioni $x^\mu(t)$ $\mu = 1, \dots, d$, con $v^\mu = \dot{x}^\mu = dx^\mu[v]$

$$df(p)[v] \equiv \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \partial_\mu f \, \dot{x}^\mu = v^\mu \partial_\mu f$$

$$= \partial_\mu f \, dx^\mu[v]$$

$$\rightarrow \quad df = \partial_\mu f \, dx^\mu$$

Il differenziale di una funzione è un esempio di 1-FORMA DIFFERENZIALE.

In generale $\qquad \omega \in T^*M \qquad \omega(p) = \omega_\mu(p)\, dx^\mu$

Un esempio di 1-forma(*) in fisica: CAMPO DI GAUGE

$$A(x) = A_\mu(x)\, dx^\mu$$

(*) In realtà A è una connessione con regole di incollamento tra diverse carte che sono modificate rispetto a quelle di una 1-forma propriamente detta.

df vs $\overline{\nabla} f$

Dato il differenziale $df \in T^*M$, si può definire un vettore $\overline{\nabla} f \in TM$ associato dalla metrica su M nel seguente modo

$$\overline{\nabla} f \text{ t.c. } \quad g(\overline{\nabla} f, \bar{v}) = df[\bar{v}] \quad \forall \bar{v} \in TM$$

In componenti rispetto base $\underline{\partial_i}$: $(\nabla f)^i = g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^j}$ $\quad g_{ki}\, g^{ij} \partial_j f\, v^k = \partial_k f \cdot v^k$

Esempio : coord. polari

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/r^2 & \\ & & 1/r^2\operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\| \partial_r \|^2 = g_{ij}\, \delta^i_r \delta^j_r = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{e}_r = \underline{\partial_r}$$

$$\| \partial_\theta \|^2 = g_{ij}\, \delta^i_\theta \delta^j_\theta = r^2 \quad \rightarrow \quad \hat{e}_\theta = \frac{1}{r} \underline{\partial_\theta}$$

$$\| \partial_\varphi \|^2 = g_{ij}\, \delta^i_\varphi \delta^j_\varphi = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad \rightarrow \quad \hat{e}_\varphi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \underline{\partial_\varphi}$$

$$\nabla f = g^{rr} \frac{\partial f}{\partial r} \underline{\partial_r} + g^{\theta\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{\partial_\theta} + g^{\varphi\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \underline{\partial_\varphi} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \underline{\partial_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{\frac{1}{r} \partial_\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \underline{\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \partial_\varphi} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \, .$$

TENSORI e p-FORME

Dati due spazi vettoriali V e W di dim n e m, posso definire un nuovo spazio vett., detto prodotto tensore $V \otimes W$, nel seguente modo:

- prendo una base $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ di V e una base $\{w_k\}_{k=1,\dots,m}$ di W;
- introduco un set astratto di $n \cdot m$ vettori
  $e_{ij} \equiv v_i \otimes w_j \qquad i=1,\dots,n \qquad j=1,\dots,m$
- def. $V \otimes W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{ij} \, v_i \otimes w_j \;\middle|\; \Lambda_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$

  cioè def. $V \otimes W$ come l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori e_{ij}.

Un caso particolare è quando $W = V$: $e_{ij} = v_i \otimes v_j$

Posso anche def. $\underbrace{V \otimes V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{N \text{ fattori}}$:

- in qto caso la base di qto sp. vett. è
  $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_N} \qquad i_k = 1,\dots,n$
  e i coeff. delle combinazioni lineari sono degli oggetti $\Lambda_{i_1 \dots i_N}$ con N indici.
- la dim. dello sp. è n^N.

$\Lambda_{i_1 \dots i_N}$ sono detti TENSORI.

Come da uno sp. vett. posso costruire un FIBRATO VETT.
così posso fare pr FIBRATI VETT. la cui fibre
sono PRODOTTI TENSORI di SP. VETT. che sono fibre
di altri fibrati vett. su M.

L'esempio più comune è prendere come fibre
$$\underbrace{T_p^*(M) \otimes T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{m\text{-volte}}$$
Un elemento di tale fibrato è un TENSORE
le cui componenti hanno m-indici.

In questo modo si costruiscono le p-FORME differenziali:

Vediamo una 2-FORMA

- dx^μ base per T^*M
- $dx^\mu \otimes dx^\nu$ base per $T^*M \otimes T^*M$
- possiamo costruire un sottosp. prendendo un sottoinsieme di elem. di base, in particolare
$$\underbrace{dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu}$$ ← COMBINAZ. ANTISIMM.
$$\equiv dx^\mu \wedge dx^\nu \qquad (= - dx^\nu \wedge dx^\mu)$$
- una comb. lineare
$$\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$ ← Prenderemo $\omega_{\mu\nu}$ TENSORE ANTISIMMETRICO a due indici

è detta 2-forma

In gen. $\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu})$

solo qto sopravvive in comb.

In generale una p-forma è una comb. lin.

$$\frac{1}{p!}\,\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\,\underbrace{dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}}_{\text{prodotto compl. antisimm.}} \in \Lambda^p T^* M$$

Tensore compl. antisimm.

somma è su tutti μ_i: ma così overconto elem. di base
$1/p!$ fa sì che $\omega_{\mu\ldots}$ sono coeff. rispetto alla base.

- Il simbolo $\wedge$ può essere esteso a due generiche forme

$$\underset{\text{p-forma}}{\alpha_p} \wedge \underset{\text{q-forma}}{\beta_q} = \frac{1}{p!q!}(\alpha_p)_{\mu_1\cdots\mu_p}(\beta_q)_{\nu_1\cdots\nu_q}\, dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}\wedge dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_q}$$

DETTO WEDGE PRODUCT

$$\rightarrow \quad \alpha_p\wedge\beta_q = (-1)^{pq}\,\beta_q\wedge\alpha_p$$

In componenti

$$(\alpha_p\wedge\beta_q)_{\mu_1\cdots\mu_{p+q}} = \frac{1}{p!q!}\left(\alpha_{\mu_1\cdots\mu_p}\beta_{\mu_{p+1}\cdots\mu_{p+q}} \pm \text{permutations}\right)$$

NOTA: Il wedge prod. di due 1-forme è una 2-forma, ma <u>non</u> tutte le 2-forme possono essere scritte come wedge prod. di due 1-forme.

Esempi:

- $\beta\in T^*M \quad \omega\in\Lambda^2T^*M \qquad \beta=\beta_i dx^i \quad \omega=\frac{1}{2}\omega_{k\ell}\,dx^k\wedge dx^\ell$

$$(\beta\wedge\omega)_{ijk} = (\beta_i\omega_{jk} - \beta_j\omega_{ik} + \beta_k\omega_{ij})$$

$$\beta\wedge\omega = \frac{1}{3!}(\beta_i\omega_{jk} - \beta_j\omega_{ik} + \beta_k\omega_{ij})\,dx^i dx^j dx^k =$$

$$= \frac{1}{3!}(\beta_i\omega_{jk}\,dx^{ijk} + \beta_j\omega_{ik}\,dx^{jik} + \beta_k\omega_{ij}\,dx^{kij}) = \frac{1}{2}\beta_i\omega_{jk}\,dx^i dx^j dx^k$$

$$\text{in } d=3 \quad \beta\wedge\omega = (\beta_1\omega_{23} - \beta_2\omega_{13} + \beta_3\omega_{12})\,d^3x$$

- $\alpha, \beta \in \Lambda^2 T^* M \qquad d=4$

$$(\alpha\wedge\beta)_{\mu_1\cdots\mu_4} = \frac{1}{4}\cdot 4\big(\alpha_{\mu_1\mu_2}\beta_{\mu_3\mu_4} - \alpha_{\mu_1\mu_3}\beta_{\mu_2\mu_4} + \alpha_{\mu_1\mu_4}\beta_{\mu_2\mu_3} + \alpha_{\mu_2\mu_3}\beta_{\mu_1\mu_4} - \alpha_{\mu_2\mu_4}\beta_{\mu_1\mu_3} + \alpha_{\mu_3\mu_4}\beta_{\mu_1\mu_2}\big)$$

- $\alpha \in \Lambda^2 T^* M \qquad d=4$

$$(\alpha\wedge\alpha)_{\mu_1\cdots\mu_4} = 2\big(\alpha_{\mu_1\mu_2}\alpha_{\mu_3\mu_4} - \alpha_{\mu_1\mu_3}\alpha_{\mu_2\mu_4} + \alpha_{\mu_1\mu_4}\alpha_{\mu_2\mu_3}\big)$$

Differenziale d

d è un operatore che mappa p forme in $p+1$-forme

$$d : \Lambda^p T^* M \longrightarrow \Lambda^{p+1} T^* M$$

Vediamo come agisce su $\omega \in \Lambda^p T^* M \quad \omega = \underset{\text{funzioni su } M}{\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}}\, dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}$

$$d : \omega \longmapsto \frac{1}{p!}\underbrace{\underbrace{d(\omega_{\mu_1\cdots\mu_p})}_{1-\text{forme}}\wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_p}}_{p+1-\text{forma}}$$

In componenti:

$$(d\omega)_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!}\Big[\partial_{\mu_1}\omega_{\mu_2\cdots\mu_p} - (-1)^{p+1}\partial_{\mu_2}\omega_{\mu_3\cdots\mu_{p+1}\mu_1} \pm \text{cyclic permutation} \Big]$$

Relazione utile:

$$d(\alpha_k \wedge \beta_e) = d\alpha_k \wedge \beta_e + (-1)^k \alpha_k \wedge d\beta_e$$ ← consist. con $d(dx^\mu)=0$

$d^2=0$ ← molto importante

Esempi:

- $\omega = \omega_\nu dx^\nu \rightarrow d\omega = (d\omega_\nu) dx^\nu = \partial_\mu \omega_\nu \, dx^\mu \wedge dx^\nu =$
$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu)\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$\rightarrow (d\omega)_{\mu_1\mu_2} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu)$$

Se $\omega = A$ (campo di gauge)

allora $F \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = dA$

→ la curvatura è il differenziale del campo di gauge.

- Verifichiamo che $d^2=0$ su 0-forme e 1-forme:

- $d(df) = d(\partial_\mu f\, dx^\mu) = d(\partial_\mu f)\wedge dx^\mu =$
$$= \partial_\nu \partial_\mu f \, dx^\nu \wedge dx^\mu = 0 \qquad (S_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = 0)$$

- $d(d\omega) = d(\partial_\mu \omega_\nu \, dx^\mu \wedge dx^\nu) =$

$$= d(\partial_\mu \omega_\nu) \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = \partial_\rho \partial_\mu \omega_\nu \, dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$$

In generale $d(d\omega_p) = d(\partial_\rho \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\rho \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) =$

$$= \partial_\sigma \partial_\rho \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \, dx^\sigma \wedge dx^\rho \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = 0.$$

Hodge star.

It is an isomorphism $* : \Lambda^k T^*M \to \Lambda^{d-k} T^*M$

- Def. $(\alpha | \beta) = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \beta_{\nu_1 \dots \nu_p} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p}$ $\quad$ $g_{\mu\nu}$ è la metrica su M.
- $\beta \in \Lambda^k T^*M$, allora $*\beta$ è l'unica $(d-k)$-form che soddisfa $\alpha \wedge (*\beta) = (\alpha | \beta) \, dvol_M$ $(\circ)$ $\forall \alpha \in \Lambda^k T^*M$
- Ricordiamo che se è def. una metrica g su M,
  $dvol_M = \sqrt{g} \underbrace{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d}_{\equiv d^dx}$ $\quad (\sqrt{g} \to \sqrt{-g}$ se Mink. sign.$)$
  $= \sqrt{g} \frac{1}{d!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_d}$
- Propr. utile $*(*\beta) = (-1)^{k(d-k)} \beta$
- In particolare

$$* dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{1}{(d-p)!} \sqrt{g} \, \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\mu_{p+1} \dots \mu_d} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}$$

In componenti: $\alpha \in \Lambda^p T^*M$

$$(*\alpha)_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-p} \nu_1 \dots \nu_p} g^{\nu_1 \rho_1} \dots g^{\nu_p \rho_p} \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p} \cdot \sqrt{g}$$

$$*\alpha = \frac{1}{(d-p)!} \frac{1}{p!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}}{}^{\rho_1 \dots \rho_p} \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p} \sqrt{g} \, dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{d-p}}$$

Esempi :

− $* dx^1 \cdots dx^p = \frac{1}{(d-p)!} \sqrt{g}\, \epsilon^{1\cdots p}{}_{\mu_{p+1}\cdots\mu_d}\, dx^{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_d} =$

$$= \frac{\cancel{(d-p)!}}{\cancel{(d-p)!}} dx^{p+1} \cdots dx^d \sqrt{g} = \sqrt{g}\, dx^{p+1} \wedge \cdots \wedge dx^d$$

Ora, verifichiamo (o)

$$\to \underbrace{dx^1 \cdots dx^p} \wedge * dx^1 \cdots dx^p = \sqrt{g}\, dx^1 \cdots dx^d = dvol_M$$

$$\delta^1_{\mu_1} \cdots \delta^p_{\mu_p}\, dx^{\mu_1} \cdots dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!} \big(\underbrace{\delta^1_{\mu_1} \cdots \delta^p_{\mu_p} \pm \text{perm.}}_{p!\ \text{terms}} \big)\, dx^{\mu_1} \cdots dx^{\mu_p}$$

$$(dx^1 \cdots dx^p, dx^1 \cdots dx^p) = \frac{1}{p!} (\qquad)_\mu (\qquad)_\nu\, g^{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{p!} \big(g^{1\mu_1} \cdots g^{p\mu_p} \pm \underset{\text{stessi}}{\text{perm.}}(\mu) \big) \big(\underset{\neq 0}{\delta^1_{\mu_1} \cdots \delta^p_{\mu_p}} \underset{=0}{\pm \text{perm.}} \big)$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow dx^{1\cdots p} \wedge * dx^{1\cdots p} = (dx^{1\cdots p}, dx^{1\cdots p})\, dvol_M$$

− $\alpha \in T^*M$ in $d = 3$ $\qquad \alpha = \alpha_i dx^i$

$$(*\alpha)_{jk} = \frac{1}{1!} \epsilon_{jkl}\, g^{lm} \alpha_m \sqrt{g} \underset{g = \mathbb{1}}{=} \epsilon_{jkl}\, \delta^{lm} \alpha_m =$$

$$= \sum_m \epsilon_{jkm} \alpha_m$$

− $\beta \in \Lambda^2 T^*M$ in $d = 3$ $\qquad \beta = \frac{1}{2} \beta_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$

$$(*\beta)_k = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \beta_{lm}$$

− In 3d, prendiamo vettori $\bar{v} = v_i \bar{e}_i$ $\quad \bar{w} = w_i \bar{e}_i$ e associamogli

1-forme $v = v_i dx^i$ $\quad w = w_i dx^i$

$$v \wedge w = v_i w_j \, dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \left(v_i w_j - v_j w_i \right) dx^i \wedge dx^j$$

$$*(v \wedge w)_k = \frac{1}{2} \epsilon_{k\ell m} \left(v_\ell w_m - v_m v_\ell \right) = \epsilon_{k\ell m} v_\ell v_m$$

$$*(v \wedge w) \longleftrightarrow \bar{V} \times \bar{w} \quad \text{in } 3d$$

- $\beta \in T^* M$ in $d=3$

$$\frac{1}{3!} (\beta \wedge *\alpha)_{ijk} \, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \overset{d=3}{=} (\beta \wedge *\alpha)_{123} \, d^3x$$

$$\Big(= \frac{1}{3!} \left(\beta_i \epsilon_{jk\ell} \delta^{\ell m} \alpha_m - \beta_j \epsilon_{ik\ell} \delta^{\ell m} \alpha_m + \beta_k \epsilon_{ij\ell} \delta^{\ell m} \alpha_m \right) \cdot dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

$$(\beta \wedge *\alpha)_{123} = \sum_\ell \left(\beta_1 \epsilon_{23\ell} \alpha_\ell - \beta_2 \epsilon_{13\ell} \alpha_\ell + \beta_3 \epsilon_{12\ell} \alpha_\ell \right) =$$

$$= \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha} \quad (d=3)$$

$$\beta \wedge *\alpha = \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha} \, d^3x \implies \beta \wedge *\alpha = (\beta, \alpha) \, d^3x$$

— $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$

$$(\ast\omega)_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\alpha'\beta'}\, g^{\alpha'\alpha} g^{\beta'\beta}\, \omega_{\alpha\beta}$$

in $d=4$ Minkowski

$$(\omega,\omega) = \omega_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \sqrt{g}\, d^4x$$

$$(\omega\wedge\ast\omega)_{\mu_1\cdots\mu_4} = \frac{1}{2}\Big(\omega_{\mu_1\mu_2}\sqrt{g}\,\epsilon_{\mu_3\mu_4}{}^{\rho\sigma}\,\omega_{\rho\sigma} - 1324 + 1423 + 2314 - 2413 + 3412 \Big)$$

$12,21$

$$(\omega\wedge\ast\omega)_{1234} = \big(\omega_{12}\omega_{12} + \omega_{13}\omega_{13} + \omega_{14}\omega_{14} + \omega_{23}\omega_{23} + \omega_{24}\omega_{24} + \omega_{34}\omega_{34}\big)\sqrt{-g} =$$

$$= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\sqrt{g}$$

$\omega\wedge\ast\omega = (\omega\wedge\ast\omega)_{1234}\, dx^1\ldots dx^4$

— Consideriamo l'azione del fotone

$$S = -\frac{1}{4}\int_M d^dx \sqrt{-g}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

↑ qto $=1$ per sp. Minkowski

$$= -\frac{1}{4}\int d\mathrm{vol}_M (F,F) = -\frac{1}{2}\int_M F\wedge\ast F \qquad F = dA$$

Qto è il modo in cui si scrive termine cinetico del fotone con le forme differenziali!

$$- \quad F \wedge F = F \wedge *(*F) \qquad *^2 = 1 \text{ on even forms}$$

$$= (F, *F)\, dvol_M$$

$$(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} d^4x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{32\pi^2} \int \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} d^4x = \frac{1}{8\pi^2} \int F \wedge F$$

$$A = \frac{1}{2} a_{\mu\nu}\, dx^{\mu\nu} \qquad B = \frac{1}{2} b_{\mu\nu}\, dx^{\mu\nu}$$

$$(A \wedge B) = \frac{1}{4!} (A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_4}\, dx^{\mu_1 \dots \mu_4} = (A \wedge B)_{1234}\, dx^1 \dots dx^4$$

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_4} = \frac{1}{2 \cdot 2} \left(a_{\mu_1 \mu_2} b_{\mu_3 \mu_4} \pm \text{permut.} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\underline{a_{\mu_1 \mu_2} b_{\mu_3 \mu_4}} - 1\,3\,2\,4 + 1\,4\,2\,3 + 2\,3\,1\,4 - 2\,4\,1\,3 + \underline{3\,4\,1\,2} \right)$$

+ altre permutazioni

$$b = \star a : \quad b_{\mu_3 \mu_4} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu_3 \mu_4}{}^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$$

$$(A \wedge \star A)_{1234} = \frac{1}{4} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot 4 \left(a^{12} a_{12} + a^{13} a_{13} + a^{14} a_{14} + a^{23} a_{23} + a^{24} a_{24} + a^{34} a_{34} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} a_{\mu_1 \mu_2} a^{\mu_1 \mu_2}$$

$$\boxed{A \wedge \star A = \frac{1}{2} a_{\mu\nu} a^{\mu\nu}}$$