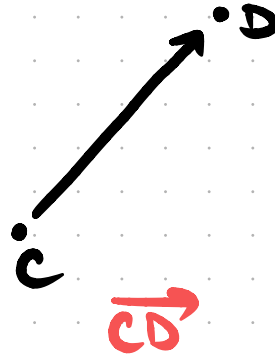
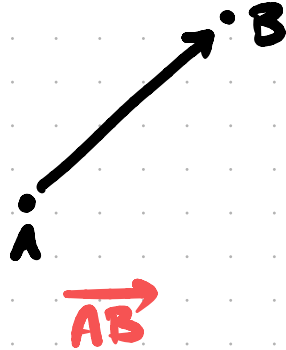




Sessione 4

Vettori

ECCO
ALCUNI
VETTORI
NEL
PIANO:



- Oss: ① $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso
- ② $\vec{EF}$ e $\vec{GH}$ hanno la stessa direzione e verso opposto
- ③ $\vec{AB}$ e $\vec{MN}$ hanno stessa direzione e verso, ma lunghezze diverse
- ④ $\vec{LL}$ ha lunghezza nulla.

Def [RELATIONE D'EQUIVALENZA] Sia S un insieme. Una RELATIONE D'EQUIVALENZA $\sim$ su S è una RELATIONE BINARIA tale che valgono le proprietà:



i) RIFLESSIVA: $a \sim a \quad \forall a \in S$

ii) SIMMETRICA: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a \quad \forall (a, b) \in S^2$

iii) TRANSITIVA: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad \forall (a, b, c) \in S^3$

$\begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \bigcirc \begin{matrix} a \\ a \end{matrix} \cdot \bar{c}$ è VERO

$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \bigcirc \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \cdot \bar{c}$ è VERO $\Rightarrow \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \bigcirc \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \cdot \bar{c}$ è VERO

SE $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \bigcirc \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \cdot \bar{c}$ è VERO,
E SE $\begin{matrix} b \\ c \end{matrix} \bigcirc \begin{matrix} b \\ c \end{matrix} \cdot \bar{c}$ è VERO, ALLORA

$\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \bigcirc \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \cdot \bar{c}$ è ANCHE VERO.

Esempio: • Essere fratelli [inteso come figli maschi degli stessi genitori] è una relazione di equivalenza sull'insieme dei figli maschi

- Essere sorelle, to be siblings,
- Seguire lo stesso corso di laurea, abitare nella stessa città, frequentare la stessa classe alle scuole super.

Non-esempi: • Essere CUGINI [fallisce la transitività]

• Essere FIGLI [falliscono tutte e tre]

• Riuscito a trovare esempi dove fallisce solo la simmetria? Solo la riflessività? Esempi dove vale solo uno su 3 in tutti i modi possibili?

Def [RELAZIONE DI EQUIPOTENZA tra VETTORI]

↑ "di uguale efficacia", si dice anche di titoli di studio

Due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono EQUIPOTENTI per definizione.

$\Leftrightarrow$ hanno stessa direzione, verso e lunghezza.

Oss: L'EQUIPOTENZA tra VETTORI nello stesso spazio è una RELAZIONE di EQUIVALENZA.

Def: Sia $\sim$ una RELAZ. d'EQUIVALENZA su un insieme S . Sia $a \in S$ un elemento di S . Si definisca

$[a]_{\sim} := \{ b \in S \mid b \sim a \}$ LA CLASSE DI EQUIVALENZA di a .
RAPPRESENTANTE DELLA CLASSE

$S_{/\sim} := \{ [a]_{\sim} \mid a \in S \}$ L'INSIEME QUOZIENTE di S , MODULO $\sim$

Esempio: $S :=$ studenti del Volta. $\sim :=$ essere nella stessa classe

$S_{/\sim} :=$ "consiglio dei rappresentanti di classe"

↑ POSSO ANCHE CAMBIARE I RAPPRESENTANTI, FUNZIONA PER OGNI SCELTA.

Oss: Se $a, b \in S$, allora: $\underbrace{[a] \cap [b] = \emptyset}$ oppure $\underbrace{[a] = [b]}$
 QUESTO AVVIENE
 SE E SOLO SE
 $a \not\sim b$

QUESTO AVVIENE
 SE E SOLO SE
 $a \sim b$

Q: Cosa succede se prendiamo l'insieme ~~grandezze~~ dei vettori in un dato spazio, MODULO la relazione di EQUIPOLLENZA?

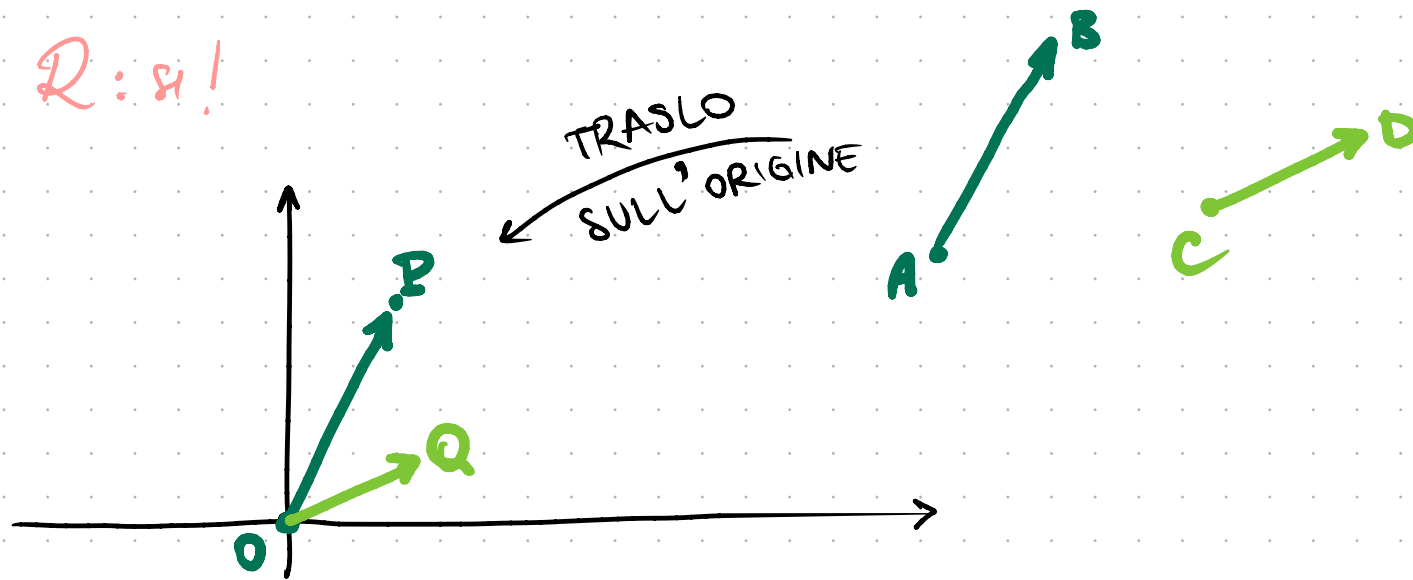
R: otteniamo i "vettori geometrici"

Def: un VETTORE GEOMETRICO v è una classe di EQUIPOLLENZA (in un certo spazio) (nello stesso spazio)

CIOÈ: $v := [\overrightarrow{AB}]_{\text{EQUIPOLLENZA}}$ PER UN QUALCHE $\overrightarrow{AB}$

Q: Ma se traslando un vettore, tenendolo parallelo al vettore iniziale, non cambia la classe di equipollenza, non possiamo sempre farlo partire dall'origine?

Q: si!



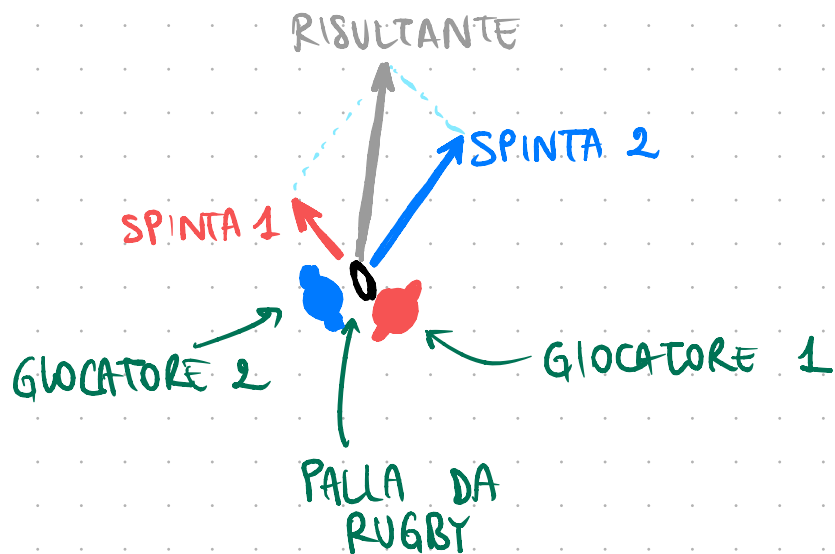
$V := [\overrightarrow{AB}]$, MA LO POSSO ANCHE SCRIVERE COME $V = [\overrightarrow{OP}]$
 $W := [\overrightarrow{CD}]$, " " " " " " " $W = [\overrightarrow{OQ}]$

Quindi potremmo scrivere qualsiasi $[\overrightarrow{EP}]$ come $[\overrightarrow{EP}] = [\overrightarrow{OR}]$
 ed il punto R lo potremmo individuare
 univocamente [è UNICO e BEN DEFINITO].

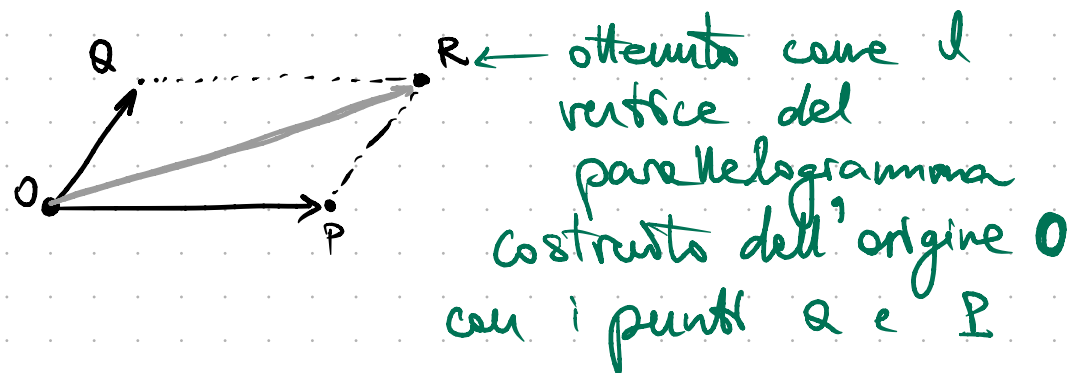
Def: il VETTORE GEOMETRICO NULLO $\vec{0} := [\overrightarrow{AA}]$.

ORIGINE
 PUNTO CHE
 TROVAMO
 TRASLANDO IL
 VETTORE
 NELL'ORIGINE
 PER OGNI PUNTO A,
 NON IMPORTA QUALE

Q: È possibile sommare vettori geometrici?



REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA:

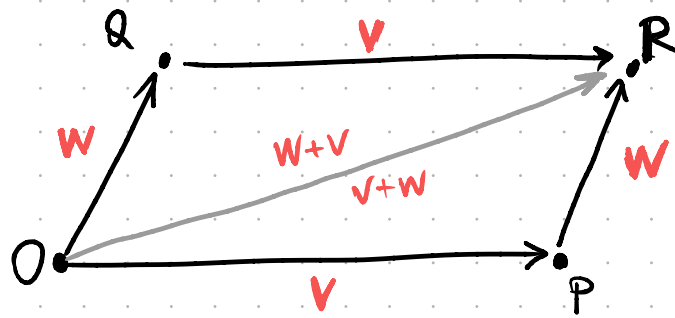


SCOPO: dati due vettori geometrici v e w , costruire un terzo vettore geometrico che chiameremo $v+w$ con le proprietà che ci aspettiamo.

STEP 1: Supponiamo che $v = [\overrightarrow{OP}]$ per un unico punto P
 $w = [\overrightarrow{OQ}]$ " " " " Q

STEP 2: Costruiamo il parallelogramma $OQRP$, trovando univocamente un nuovo punto R

STEP 3: Definiamo il vettore somma $v+w := [\overrightarrow{OR}]$



Oss: La somma così definita è COMMUTATIVA per DEFINIZIONE!
 Infatti $\overrightarrow{QR} \sim \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{PR} \sim \overrightarrow{OQ}$ per definizione di parallelogr.

$$[\overrightarrow{QR}] = [\overrightarrow{OP}] \quad [\overrightarrow{PR}] = [\overrightarrow{OQ}]$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$v \quad w$$

Oss: Lo stesso principio mostra anche l'associatività!

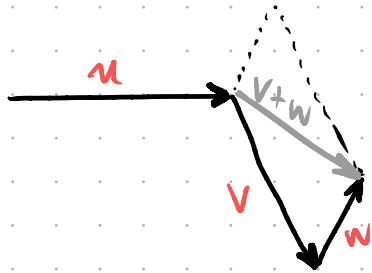
Consideriamo
tre vettori
geometrici:



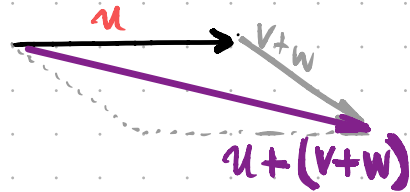
Sommiamo i vettori in ordini diversi e vediamo
cosa succede:

$$u + (v + w)$$

FIRST SUM:

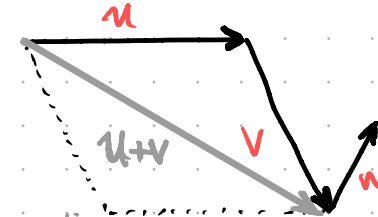


SECOND SUM:

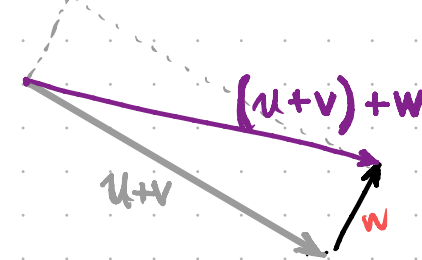


$$(u + v) + w$$

FIRST SUM:



SECOND SUM:



Un altro modo per vedere che sicuramente otterremo lo stesso risultato è osservare che il vettore risultante parte dalla coda di u e finisce alla testa di w , indipendentemente dalle somme intermedie.

Quindi fissato uno spazio opportuno, l'insieme S dei vettori geometrici su quello spazio dotato dell'operazione

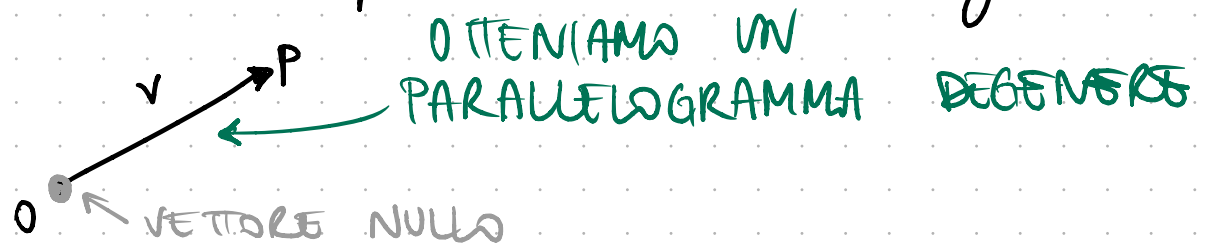
$\star = +$ INTESA COME SOMMA TRA VETTORI,

È ALMENO UN SEMIGRUPPO ABELIANO.

Q: Possiamo PROMUOVERE $(S, \star)$ ad un GRUPPO ABELIANO?

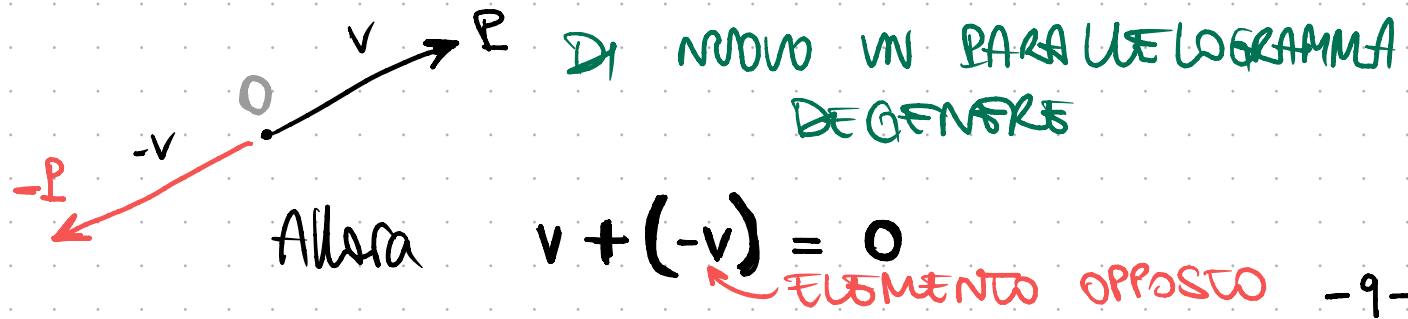
R: SÌ

Oss: come elemento neutro ■ per la somma scegliamo il VETTORE NULLO:



Allora $0 + v = v = v + 0$

È lo stesso con l'opposto



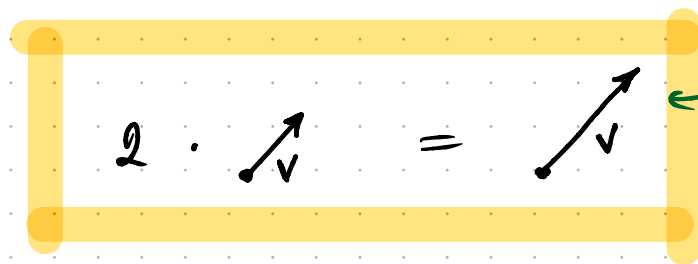
Allora $v + (-v) = 0$
ELEMENTO OPPOSTO

Conclusione: $(\text{VETTORI GEOMETRICI}, +)$ è un gruppo abeliano

Q: Possiamo metterci ancora più struttura?

Per esempio, cosa succede se MOLTIPLICHIAMO UN VETTORE PER UN NUMERO?

FISSIAMO UN INSIEME DI NUMERI, LO VOGLIAMO PERO' CON MOLTA STRUTTURA, DICIAMO UN CAMPO, PER ESEMPIO $\mathbb{R}$.



A diagram illustrating scalar multiplication of a vector. It shows the equation $2 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ inside a yellow rectangular box. The vector $\vec{v}$ on the right is drawn longer than the one on the left to represent doubling its magnitude.

ESTENDO O
CONTRAGGO $\checkmark$
SECONDO IL NUMERO
REALE USATO

Otteniamo un'operazione $\spadesuit: \mathbb{R} \times S \longrightarrow S = \text{GRUPPO DEI VETTORI}$

$$(\sqrt{2}, v) \longmapsto \sqrt{2} \cdot v$$

GEOMETRICI
PER COMODITA'

Non è un'operazione binaria da $S \times S$ come prima! $\spadesuit$ CON $\cdot$.
È una cosa diversa. È come se $\mathbb{R}$ mescolasse i

vettori di S in un modo particolare, con certe regole:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

i) $a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$

$\forall u, v \in S$

ii) $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

iii) $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$

iv) $1 \cdot v = v$

ABBIAMO ORA
DUE PROPRIETÀ
DISTRIBUTIVE

QUESTO
INVECE È
IL PRODOTTO
IN $\mathbb{R}$

[l'unico, tutti gli altri sono il prodotto
per scalari]

Def [SPAZIO VETTORIALE V su un campo K]. Si scelga un campo K .

Uno SPAZIO VETTORIALE $(V, +)$ su K è un GRUPPO ABELIANO
munito di una moltiplicazione $\spadesuit$ per gli scalari (= elementi)
del campo K tale che valgano le proprietà

i), ii), iii), iv)

[DOVE $\mathbb{R}$ È SOSTITUITO
DA UN CAMPO K
GENERICO]