3 ottobre

Teorema (Del Confronto) Siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ $\sup X = +\infty$. Supponiamo che $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$ e che esistono

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora $a \leq b$.

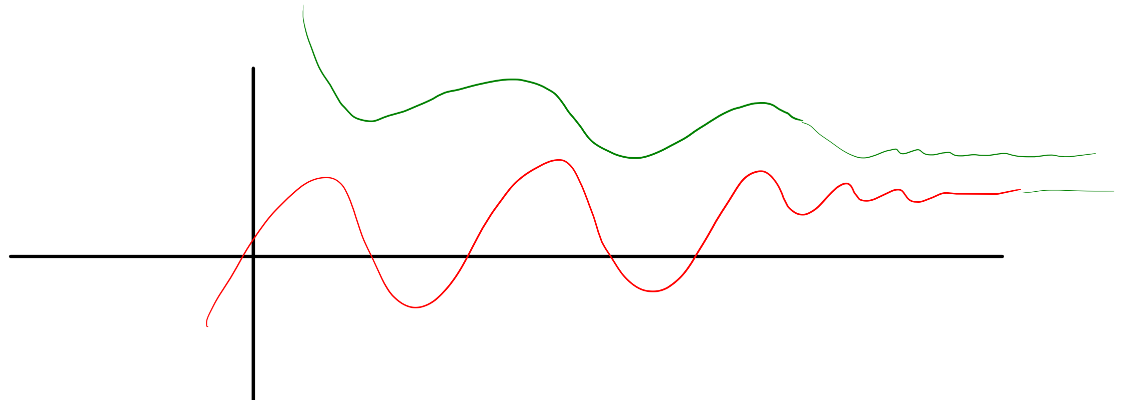
Osservazione Se $f(x) < g(x)$ $\forall x \in X$ in generale abbiamo solo $a \leq b$ e non $a < b$.

Es $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ $\quad X = \mathbb{R}_+$

$g(x) = 1$

Allora $\forall$ $x > 0$ ho $f(x) = 1 - \frac{1}{x} < 1 = g(x)$

eppure $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ $\quad \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$



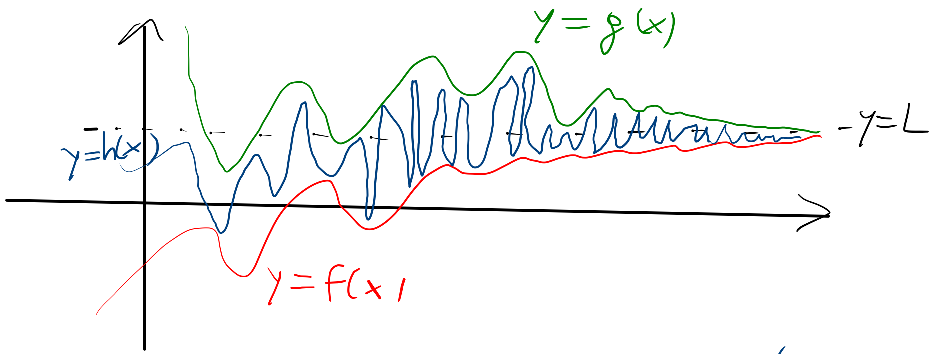
Teor (Carabinieri)

$f, h, g : X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \sup X = +\infty$

Supponiamo che $f(x) \le h(x) \le g(x)$ $\quad \forall x \in X$.

e supponiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

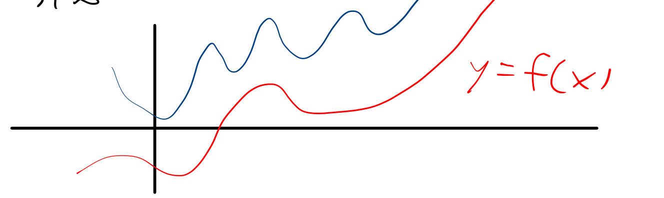
Allora $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$.



Corollario 1 Siano $f, h : X \to \mathbb{R}$ con

$f(x) \le h(x)$ $\quad \forall x \in X$ e con $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

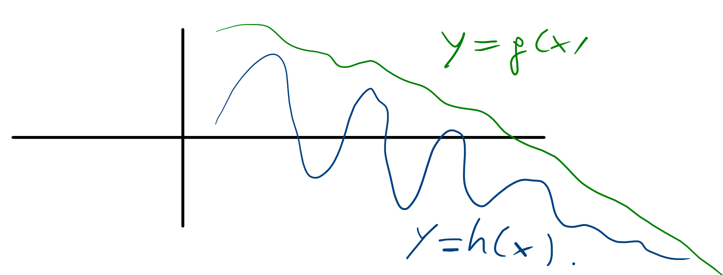
Allora $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$



Corollario 2 Siano $h, g : X \to \mathbb{R}$ con

$h(x) \le g(x)$ $\quad \forall x \in X$ e con $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Allora $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$



Dim del teorema (nel caso $L \in \mathbb{R}$)

$f(x) \le h(x) \le g(x) \quad \forall x \in X, \quad L \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon^{(1)} > 0$ t.c. $x > M_\varepsilon^{(1)} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon^{(2)} > 0$ t.c. $x > M_\varepsilon^{(2)} \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$

Vogliamo dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$ cioè che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon > 0$ t.c. $x > M_\varepsilon \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$

$f(x) \le h(x) \le g(x) \ \forall x \in X$

$\Updownarrow$

$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

Proviamo a scegliere $M_\varepsilon = \max\{M_\varepsilon^{(1)}, M_\varepsilon^{(2)}\}$

Allora $x > M_\varepsilon \Rightarrow x > M_\varepsilon^{(1)} \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

$x > M_\varepsilon \Rightarrow x > M_\varepsilon^{(2)} \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$

Per $x > M_\varepsilon$ ho

$$L - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < L + \varepsilon$$

Pertanto

$x > M_\varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

$\Updownarrow$

$|h(x) - L| < \varepsilon$

Esempio

Sia $b > 1$. Dimostriamo utilizzando la definizione che $\lim_{n \to +\infty} b^n = +\infty$

$$\boxed{\forall K > 0 \ \exists M_K > 0 \ \text{t.c.} \ n > M_K \Rightarrow b^n > K.}$$

Riscriviamo $b = 1 + a$ dove $a = b - 1 > 0$

$$b^n = (1+a)^n \geq 1 + na$$

$$1 + na > K \iff n > \frac{K-1}{a} \quad \left(=: M_K \right)$$

$$n > \frac{K-1}{a} \Rightarrow K < 1 + na \leq b^n \Rightarrow \boxed{b^n > K}$$

Esempio

Se $b>1$ allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$ $\quad \frac{+\infty}{+\infty}$

$b>1 \Rightarrow \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}} > 1$

Posto $a = b^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$ risulta

$\sqrt{b} = 1 + a$

$$\frac{b^n}{n} = \frac{\left(\left(\sqrt{b}\right)^2\right)^n}{n} = \frac{\left(\left(\sqrt{b}\right)^n\right)^2}{n} \geq$$

$\left(\sqrt{b}\right)^n = (1+a)^n \geq 1 + na \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$\left(\sqrt{b}\right)^n \geq 1 + na$

$\left(\left(\sqrt{b}\right)^n\right)^2 \geq (1+na)^2$

$$\geq \frac{(1+na)^2}{n}$$

$$\frac{b^n}{n} \geq \underbrace{\frac{(1+na)^2}{n}}_{\downarrow\, n\to+\infty \atop +\infty} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+na)^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^2 n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a^2 n = +\infty$$

Coroll.

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$

<u>Osservazione</u> Il precedente limite viene descritto dicendo che per $n >> 1$ si ha $b^n >> n$.

Esempio $\quad b > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^2} = +\infty$$

$$\sqrt[3]{b} > 1$$

$$\sqrt[3]{b} = 1 + a \qquad a = \sqrt[3]{b} - 1 > 0$$

$$\frac{b^n}{n^2} = \frac{\left(\left(\sqrt[3]{b}\right)^3\right)^n}{n^2} = \frac{\left(\left(\sqrt[3]{b}\right)^n\right)^3}{n^2} \geq$$

$$\left(\sqrt[3]{b}\right)^n = (1+a)^n \geq 1 + na \iff \left(\left(\sqrt[3]{b}\right)^n\right)^3 \geq (1+na)^3$$

$$\geq \frac{(1+na)^3}{n^2}$$

$$\frac{b^n}{n^2} \geq \frac{(1+na)^3}{n^2} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+na)^3}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\cancel{3}\,1} a^3}{\cancel{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} a^3 n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^2} = +\infty$$

Per $n >> 1 \qquad b^n >> n^2$

Esercizio. Dimostrare che $\forall\, N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^N} = +\infty$$

Esempio Sia $b>1$. Si ha $\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$

$$b>1 \implies b^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \forall n$$

Poniamo $\boxed{b^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n}$ dove $a_n = b^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$

Notare che

$$\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$b = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1+a_n)^n \geq 1 + n\, a_n$$

$$b \geq 1 + n\, a_n$$

$$\frac{b-1}{n} \geq a_n > 0$$

$$0 < a_n \leq \frac{b-1}{n}$$

$$0 \to 0, \qquad \frac{b-1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Per i carab. $\implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$X \subseteq \mathbb{R}$

Se vero che $\boxed{\text{card } X \leq n \Rightarrow \exists \max X}$

allora è vero $\text{card } X = n+1 \Rightarrow \exists \max X$

Sia $\text{card } X = n+1$

$X = \{ \underbrace{x_1, \dots, x_n}, x_{n+1} \}$

Definiamo

$Y = \{ x_1, \dots, x_n \}$

$X = Y \cup \{ x_{n+1} \}$

$\text{Card } Y = n \quad \exists \max Y = x_{j_0} \quad$ per un $1 \leq j_0 \leq n$

Sia $M = \max\{x_{j_0}, x_{n+1}\} \in X$

Risulta che $\boxed{M \text{ è il massimo di } X}$

Bisogna dimostrare che $\boxed{M \geq x_j \quad \forall\, j = 1, \dots, n+1}$

Risulta $\boxed{M \geq x_{n+1}}$ perché $M = \max\{x_{j_0}, x_{n+1}\} \geq x_{n+1}$

$\boxed{M \geq x_j \ \forall\ 1 \leq j \leq n}$ perché

$M = \max\{x_{j_0}, x_{n+1}\} \geq x_{j_0} = \max\{x_1, \dots, x_n\} \geq$

$\geq x_j \qquad 1 \leq j \leq n$

$A \subseteq \mathbb{R}_+ \quad \inf A = 0$

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

2) $\forall \varepsilon \in A \ \exists N_\varepsilon$ t.c. $x > N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Dimostrare che 1) $\Leftrightarrow$ 2)

La dimostrazione consiste di due parti.

a) 1) $\Rightarrow$ 2)

b) 2) $\Rightarrow$ 1)

a) E' vero che

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Voglio dimostrare che è vera la seguente

2) $\forall \varepsilon \in A \ \exists N_\varepsilon$ t.c. $x > N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Sia

$\varepsilon \in A \subseteq (0, +\infty) \Rightarrow \varepsilon > 0$. Prendo allora l'$M_\varepsilon$ della 1) e pongo $N_\varepsilon = M_\varepsilon$

$x > N_\varepsilon \Rightarrow x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

e quindi ho dimostrato la 2).