ESERCIZI INTRODUTTIVI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Considera l'equazione di cui ci siamo occupati a lezione, ovvero

$$3x + y - 2z = 0\,.$$

Calcola tre soluzioni di questa equazione, assegnando rispettivamenti i valori

$$y = 1 \text{ e } z = 2$$
$$y = -1 \text{ e } z = -2$$
$$y = 2 \text{ e } z = 1$$

e determinando il corrispondente valore di x.

Risoluzione. Sostituendo i valori per y e z otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\text{per } y = 1, z = 2 && 3x + 1 - 2 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1\,,\\
&\text{per } y = -1, z = -2 && 3x - 1 - 2 \cdot (-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1\,,\\
&\text{per } y = 2, z = 1 && 3x + 2 - 2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\,,
\end{aligned}$$

Le tre soluzioni sono dunque, rispettivamente:

$$(1, 1, 2)\,, \quad (-1, -1, -2)\,, \qquad (0, 2, 1)\,.$$

Esercizio 2

Considera il sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Utilizza la tecnica vista in classe per eliminare prima la variabile x dalla seconda e dalla terza equazione (aggiungendo o sottraendo opportuni multipli della prima equazione) e poi per eliminare la variabile y dalla terza equazione (aggiungendo o sottraendo opportuni multipli della nuova seconda equazione). A questo punto **calcola** la/le soluzioni del sistema. **Scrivi** poi la matrice dei coefficienti del sistema e **ripercorri** sulle sue righe le operazioni che hai svolto sulle equazioni.

Risoluzione. Per eliminare la variabile x dalla seconda equazione, la sommiamo alla prima equazione. Al membro sinistro otteniamo

$$(-x + 3y - z) + (x - y + 2z) = 2y + z\,.$$

Per eliminare la variabile x dalla terza equazione, ci sottraiamo la prima equazione moltiplicata per 2. Al membro sinistro otteniamo

$$(2x + y + z) - 2(x - y + 2z) = 3y - 3z\,.$$

Il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Per semplificare la situazione, notiamo che possiamo moltiplicare la terza equazione per $1/3$, così da ottenere $y - z = 0$. Ora, se vogliamo eliminare la variabile y dalla terza equazione, ci dobbiamo sottrarre la seconda moltiplicata per $1/2$. Al membro sinistro otteniamo:

$$(y - z) - (1/2) \cdot (2y + z) = (-3/2)z\,.$$

Il sistema diventa quindi

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ (-3/2) \cdot z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo l'ultima equazione otteniamo $z = 0$. Risolvendo la seconda equazione otteniamo $y = 0$ e quindi risolvendo la prima equazione otteniamo $x = 0$. Pertanto, l'unica soluzione è $(0, 0, 0)$.

La matrice dei coefficienti del sistema di partenza è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le prime due operazioni portano la matrice nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Ora l'operazione sulla terza riga trasforma la matrice in

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Infine l'ultima operazione sulla terza riga trasforma la matrice in

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

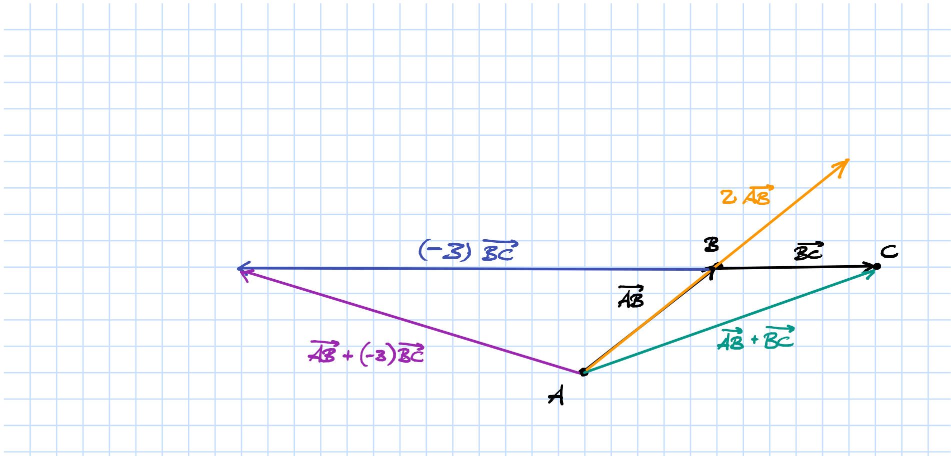
Esercizio 3

Disegna nel piano due vettori applicati $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$, a piacere (nota che, qualsiasi sia la scelta per i due vettori applicati, per come sono stati descritti il punto finale del primo vettore applicato deve coincidere con il punto iniziale del secondo vettore applicato).

Disegna ora i seguenti vettori applicati: $\vec{AB} + \vec{BC}$, $2 \cdot \vec{AB}$, $\vec{AB} + \big((-3) \cdot \vec{BC}\big)$.

Disegna inoltre tre vettori applicati che appartengano alla classe di equipollenza di $\vec{AB}$ e tre vettori applicati che appartengano alla classe di equipollenza di $(-1) \cdot \vec{BC}$.

Risoluzione.



Esercizio 4

Dati due vettori applicati $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$, **quali condizioni** devono sussistere sui punti A, B, C, D affinché entrambe le somme $\vec{AB}+\vec{CD}$ e $\vec{CD}+\vec{AB}$ siano definite? Quando sono entrambe definite, qual è il **risultato** della somma in ciascuno dei casi?

Risoluzione. Affinché la somma di vettori applicati $\vec{AB} + \vec{CD}$ sia definita deve essere che il punto finale del primo vettore applicato coincida con il punto iniziale del secondo vettore applicato, ovvero $B = C$. Affinché la somma di vettori applicati $\vec{CD} + \vec{AB}$ sia definita deve essere che il punto finale del primo vettore applicato coincida con il punto iniziale del secondo vettore applicato, ovvero $D = A$. In definitiva, dunque, affinché entrambe le somme siano definite deve essere che $\vec{CD} = \vec{BA}$. In questo caso vale che $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$ (il vettore applicato nullo puntato in A) e $\vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BB}$ (il vettore applicato nullo puntato in B).

Esercizio 5

Considera l'insieme V delle coppie ordinate di numeri (a, b) di numeri reali, ovvero

$$V := \big\{(a, b) :\ a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\big\}\,.$$

Ad esempio sono elementi di V le coppie $(1, 2)$, $(-5, 3)$, $(\sqrt{3}, 0.34)$. L'insieme V è anche denotato $\mathbb{R}^2$.

Date due coppie $(a, b) \in V$ e $(c, d) \in V$, definiamo la loro somma come

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)\,.$$

Notiamo quindi che anche la somma $(a, b) + (c, d)$ è un elemento di V. **Dimostra** che questa operazione di somma gode della proprietà commutativa e della proprietà associativa.

Data una coppia $(a, b) \in V$ e un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo la moltiplicazione della coppia (a, b) per lo scalare[1] λ come

$$\lambda \cdot (a, b) := (\lambda\, a, \lambda\, b)\,.$$

Notiamo quindi che anche $\lambda \cdot (a, b)$ è un elemento di V. **Dimostra** infine che per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $(a, b), (c, d) \in V$ valgono le proprietà distributive

$$\lambda \cdot \big((a, b) + (c, d)\big) = \lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (c, d)$$
$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)$$

Risoluzione.

(1) Dimostriamo che l'operazione di somma gode della proprietà commutativa. Per farlo, dobbiamo mostrare che per ogni $(a, b), (c, d) \in V$ vale che

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)\,.$$

Al fine di portare a termine la dimostrazione, useremo due ingredienti: il fatto che la somma tra numeri reali gode della proprietà commutativa e il fatto che la relazione di uguaglianza gode della proprietà transitiva (in particolare che se mostriamo che $X = Y$ e $Z = Y$, allora da ciò segue che $X = Z$).

Usando la definizione della somma tra coppie, abbiamo che

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)\,.$$

Ora, usando il fatto che la somma tra numeri reali gode della proprietà commutativa, abbiamo che $a + c = c + a$ e $b + d = d + b$, pertanto possiamo riscrivere la somma precedente come

$$(a, b) + (c, d) = (c + a, d + b)\,.$$

Ora usiamo la definizione di somma per calcolare $(c, d) + (a, b)$:

$$(c, d) + (a, b) = (c + a, d + b)\,.$$

Dal momento che abbiamo mostrato che sia $(a, b) + (c, d)$ che $(c, d) + (a, b)$ sono uguali alla medesima quantità, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza abbiamo dimostrato la tesi.

(2) Dimostriamo che l'operazione di somma gode della proprietà associativa. Per farlo, dobbiamo mostrare che per ogni $(a, b), (c, d), (e, f) \in V$ vale che

$$\big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f) = (a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big)\,.$$

Al fine di portare a termine la dimostrazione, useremo due ingredienti: il fatto che la somma tra numeri reali gode della proprietà associativa e il fatto che la relazione di uguaglianza gode della proprietà transitiva (in particolare che se mostriamo che $X = Y$ e $Z = Y$, allora da ciò segue che $X = Z$).

Usando la definizione della somma tra coppie, abbiamo che

$$\big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = \big((a + c) + e, (b + d) + f\big)\,.$$

[1] Qui "scalare" è sinonimo di "numero reale".

Ora, usando il fatto che la somma tra numeri reali gode della proprietà associativa, abbiamo che $(a+c)+e = a+(c+e)$ e $(b+d)+f = b+(d+f)$, pertanto possiamo riscrivere la somma precedente come

$$\big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = \big(a + (c + e), b + (d + f)\big)\,.$$

Ora usiamo la definizione di somma per calcolare $(a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big)$:

$$(a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big) = \big(a + (c + e), b + (d + f)\big)\,.$$

Dal momento che abbiamo mostrato che sia $\big((a, b) + (c, d)\big) + (e, f)$ che $(a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big)$ sono uguali alla medesima quantità, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza abbiamo dimostrato la tesi.

(3) Dimostriamo la prima proprietà distributiva del prodotto di uno scalare rispetto alla somma di coppie. Per farlo, dobbiamo mostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $(a, b), (c, d) \in V$ vale che

$$\lambda \cdot \big((a, b) + (c, d)\big) = \lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (c, d)\,.$$

Al fine di portare a termine la dimostrazione, useremo due ingredienti: il fatto che la il prodotto tra numeri reali gode della proprietà distributiva rispetto alla somma tra numeri reali e il fatto che la relazione di uguaglianza gode della proprietà transitiva (in particolare che se mostriamo che $X = Y$ e $Z = Y$, allora da ciò segue che $X = Z$).

Usiamo le definizioni di somma tra coppie e moltiplicazione per uno scalare e troviamo:

$$\lambda \cdot \big((a, b) + (c, d)\big) = \lambda \cdot (a + c, b + d) = \big(\lambda(a + c), \lambda(b + d)\big)\,.$$

Dal momento che il prodotto e la somma di numeri interi godono della proprietà distributiva, vale che $\lambda(a + c) = \lambda\, a + \lambda\, c$ e $\lambda(b + d) = \lambda\, b + \lambda d$; pertanto possiamo scrivere

$$\lambda \cdot \big((a, b) + (c, d)\big) = (\lambda\, a + \lambda\, c, \lambda\, b + \lambda d)\,.$$

Ora usiamo nuovamente la definizione di somma di coppie e di moltiplicazione per uno scalare:

$$\lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (c, d) = (\lambda\, a, \lambda\, b) + (\lambda\, c, \lambda\, d) = (\lambda\, a + \lambda\, c, \lambda\, b + \lambda d)\,.$$

Dal momento che abbiamo mostrato che sia $\lambda \cdot \big((a, b) + (c, d)\big)$ che $\lambda \cdot (a, b) + \lambda \cdot (c, d)$ sono uguali alla medesima quantità, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza abbiamo dimostrato la tesi.

(4) Dimostriamo la seconda proprietà distributiva del prodotto di uno scalare rispetto alla somma di coppie. Per farlo, dobbiamo mostrare che per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e per ogni $(a, b) \in V$ vale che

$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = \lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)\,.$$

Al fine di portare a termine la dimostrazione, useremo due ingredienti: il fatto che la il prodotto tra numeri reali gode della proprietà distributiva rispetto alla somma tra numeri reali e il fatto che la relazione di uguaglianza gode della proprietà transitiva (in particolare che se mostriamo che $X = Y$ e $Z = Y$, allora da ciò segue che $X = Z$).

Usiamo le definizioni di somma tra coppie e moltiplicazione per uno scalare e troviamo:

$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = \big((\lambda + \mu)a, (\lambda + \mu)b\big)\,.$$

Dal momento che il prodotto e la somma di numeri interi godono della proprietà distributiva, vale che $(\lambda + \mu)a = \lambda\, a + \mu\, a$ e $(\lambda + \mu)b = \lambda\, b + \mu\, b$; pertanto possiamo scrivere

$$(\lambda + \mu) \cdot (a, b) = (\lambda\, a + \mu\, a, \lambda\, b + \mu\, b)\,.$$

Ora usiamo nuovamente la definizione di somma di coppie e di moltiplicazione per uno scalare:

$$\lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b) = (\lambda\, a, \lambda\, b) + (\mu\, a, \mu\, b) = (\lambda\, a + \mu\, a, \lambda\, b + \mu\, b)\,.$$

Dal momento che abbiamo mostrato che sia $(\lambda + \mu) \cdot (a, b)$ che $\lambda \cdot (a, b) + \mu \cdot (a, b)$ sono uguali alla medesima quantità, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza abbiamo dimostrato la tesi.