Abbiamo concluso notando che per ogni vettore libero $\vec{v}$ vale

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

L'esistenza del vettore libero nullo richiama la domanda:

dato un vettore libero $\vec{v}$, esiste un vettore libero $\vec{w}$ tale che

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{0} \ ?$$

Se $\vec{v} = [\vec{AB}]$, allora possiamo scegliere $\vec{w} = [\vec{BA}]$, infatti

$$[\vec{AB}] + [\vec{BA}] = [\vec{AB} + \vec{BA}] = [\vec{AA}] = \vec{0}$$

Tale vettore $\vec{w}$ si dice l'<u>opposto</u> di $\vec{v}$ e si denota con $-\vec{v}$.

Similmente a quanto abbiamo fatto per la somma, possiamo definire anche per i vettori liberi la moltiplicazione per un numero reale:

se $\vec{v}$ è un vettore libero e $a \in \mathbb{R}$, allora definiamo (se $\vec{v} = [\vec{AB}]$)

$$a \cdot \vec{v} \underset{\text{definiamo}}{:=} [a \cdot \vec{AB}]$$

Si verifica che tale definizione non dipende dal rappresentante.

Si verifica che le operazioni di somma tra vettori liberi e di moltiplicazione di un vettore libero per uno scalare godono delle seguenti proprietà:

* $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
* $(-1) \underset{\text{moltiplicazione per un numero reale}}{\cdot} \vec{v} = \underset{\text{opposto rispetto alla somma}}{-\vec{v}}$

questa proprietà ci dice che c'è una <u>compatibilità</u> tra le operazioni di somma e di moltiplicazione per un numero reale.

* $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
* $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$

<u>Definizione</u>: sia V un insieme e supponiamo $V \neq \underset{\text{insieme vuoto}}{\emptyset}$;

l'insieme V si dice spazio <u>vettoriale</u> su $\mathbb{R}$ se sono definite due operazioni, una somma tra elementi di V che denotiamo con $+$ e una moltiplicazione tra un numero reale e un elemento di V, che denotiamo con $\cdot$, che soddisfano le seguenti proprietà:

(V1) (proprietà associativa di $+$)

per ogni $u, v, w \in V$ vale che

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

(V2) (proprietà commutativa di $+$)

per ogni $u, v \in V$ vale che

$$u + v = v + u$$

(V3) (esistenza dell'elemento nullo)

esiste $0 \in V$ (0 <u>non</u> è un numero, ma semplicemente un elemento di V che denotiamo così) tale che per ogni $v \in V$

$$0 + v = v + 0 = v$$

(V4) (esistenza dell'elemento opposto)

per ogni $v \in V$, esiste $w \in V$ tale che

$$v + w = w + v = 0$$

tale elemento w si denota $-v$ e si chiama <u>opposto</u> di v.

(V5) (distributività di $\cdot$ rispetto a $+$)

per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in V$ vale che

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$$

(V6) (distributività di $\cdot$ rispetto alla somma in $\mathbb{R}$)

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$ vale che:

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$$

(V7) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$ vale che

$$(a \underset{\text{moltiplicazione tra numeri reali}}{\cdot} b) \underset{\text{moltiplicazione di un elemento di } V \text{ per un numero reale}}{\cdot} v = a \cdot (b \cdot v)$$

moltiplicazioni di elementi di V per numeri reali

(V8) per ogni $v \in V$ vale che

$$1 \cdot v = v$$

gli elementi di V sono detti <u>vettori</u>; in questo contesto, i numeri reali sono detti <u>scalari</u>; in questo senso, $\cdot$ è detta moltiplicazione per uno scalare.

<u>Esempi</u>: l'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi con la somma e la moltiplicazione per un numero reale è uno spazio vettoriale;

l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con la somma e la moltiplicazione usuali è uno spazio vettoriale;

l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con le operazioni

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a \\ \alpha \cdot b \end{pmatrix}$$

è uno spazio vettoriale.