Proprietà generali degli spazi vettoriali

Prop. sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; allora il vettore nullo è unico (ovvero esiste un solo vettore $0 \in V$ che soddisfa $0 + v = v + 0 = v$ per ogni $v \in V$)

Dim: supponiamo che oltre al vettore nullo $0 \in V$ esista un altro vettore $0' \in V$ tale per cui valga che per ogni $v \in V$ si ha $0' + v = v + 0' = v$; mostriamo che deve essere $0 = 0'$, ovvero che i due elementi sono uguali; sappiamo che

per ogni

$$\forall v \in V, \quad 0 + v = v + 0 = v \qquad (*)$$

$$\forall v \in V, \quad 0' + v = v + 0' = v \qquad (\Delta)$$

in $(*)$ scelgo $v = 0'$; allora

$$0 + 0' = 0'$$

in (Δ) scelgo $v = 0$; allora

$$0 + 0' = 0$$

quindi

$$0 = 0 + 0' = 0' \qquad \square$$

Prop: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora $\forall v \in V$ vale che l'opposto di v è unico, ovvero esiste un unico vettore $w \in V$ tale che

$$w + v = v + w = 0$$

Dim: supponiamo che per un certo $v \in V$ valga che

$$w + v = v + w = 0 \quad e$$

$$w' + v = v + w' = 0$$

per certi $w, w' \in V$; vogliamo mostrare che $w = w'$; vale che:

$$w \underset{\text{proprietà dello zero}}{=} w + 0 \underset{\text{per quanto supposto}}{=} w + (v + w') \underset{\text{per la proprietà associativa}}{=}$$

$$= (w + v) + w' \underset{\text{per quanto supposto}}{=} 0 + w' \underset{\text{per le proprietà dello zero}}{=} w' \qquad \square$$

Prop: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; allora $\forall v \in V$ vale che

$$(-1) \cdot v = -v$$

Dim: dal momento che abbiamo dimostrato che per ogni $v \in V$, l'opposto di v è unico, è sufficiente dimostrare che per ogni $v \in V$, il vettore $(-1) \cdot v$ soddisfa le proprietà dell'opposto di v; se così è, esso deve dunque coincidere con $-v$; mostriamo pertanto che $\forall v \in V$

$$(-1) \cdot v + v = 0$$

l'uguaglianza precedente è vera, infatti

$$(-1) \cdot v + v \underset{(V8)}{=} (-1) \cdot v + 1 \cdot v \underset{\text{distributività di } \cdot \text{ rispetto a } +}{=} (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v$$

se fosse vero che $0 \cdot v = 0$, ovvero che $0 \cdot v$ è il vettore nullo, allora la dimostrazione sarebbe conclusa; lo mostriamo nella prossima proposizione $\square$

Prop: sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora $\forall v \in V$ vale che

$$\underset{\text{numero reale zero}}{0} \cdot v = \underset{\text{vettore nullo in } V}{0}$$

Dim: sia $v \in V$; vale che

$$0 \cdot v = \underset{\text{somma tra numeri reali}}{(0 + 0)} \cdot v \underset{\text{distributività}}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

qualsiasi sia $0 \cdot v$, possiamo considerare il suo opposto $-(0 \cdot v)$ e sommarlo ad entrambi i membri dell'uguaglianza precedente:

$$\underbrace{-(0 \cdot v) + 0 \cdot v}_{\text{è il vettore nullo, perché sto sommando un vettore al suo opposto}} = -(0 \cdot v) + (0 \cdot v + 0 \cdot v) \underset{\text{proprietà associativa}}{=}$$

$$= \underbrace{(-(0 \cdot v) + 0 \cdot v)}_{\text{vettore nullo}} + 0 \cdot v$$

in definitiva otteniamo

$$0 = \underbrace{0 + 0 \cdot v}_{= 0 \cdot v}$$

pertanto $0 \cdot v = 0$ $\square$.

Consideriamo ora $\mathbb{R}^2$ con somma $+$ e moltiplicazione per uno scalare $\cdot$ introdotte in precedenza (le cosiddette operazioni "componente per componente")

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto che $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Consideriamo il sottoinsieme $W \subseteq \mathbb{R}^2$ dato da:

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \underset{\text{tali che}}{:} x - 3y = 0 \right\}$$

Notiamo che vale $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, ovvero W contiene il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$.
Capiamo come gli elementi di W si comportano rispetto alla somma di $\mathbb{R}^2$.
Più precisamente, dati $v, w \in W$, sappiamo certamente che $v + w \in \mathbb{R}^2$, ma ci possiamo chiedere se valga $v + w \in W$.
Siano $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ con $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

Dato che $v \in W$, vale che $v_1 - 3v_2 = 0$; analogamente, $w \in W$, quindi $w_1 - 3w_2 = 0$. Ora, vale che

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

Per verificare se $v + w \in W$, verifico se valga

$$(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2) = 0$$

Vale che

$$(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2) = (v_1 - 3v_2) + (w_1 - 3w_2)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Pertanto $v + w \in W$.

Infine, verifichiamo che se $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda \cdot v \in W$.
Questo è vero, infatti se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, allora dal fatto che $v \in W$ segue che $v_1 - 3v_2 = 0$. Ora, $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}$; per verificare che $\lambda \cdot v \in W$ dobbiamo verificare che $\lambda \cdot v_1 - 3(\lambda \cdot v_2) = 0$. Vale che

$$\lambda \cdot v_1 - 3(\lambda \cdot v_2) = \lambda \cdot \underbrace{(v_1 - 3v_2)}_{=0} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

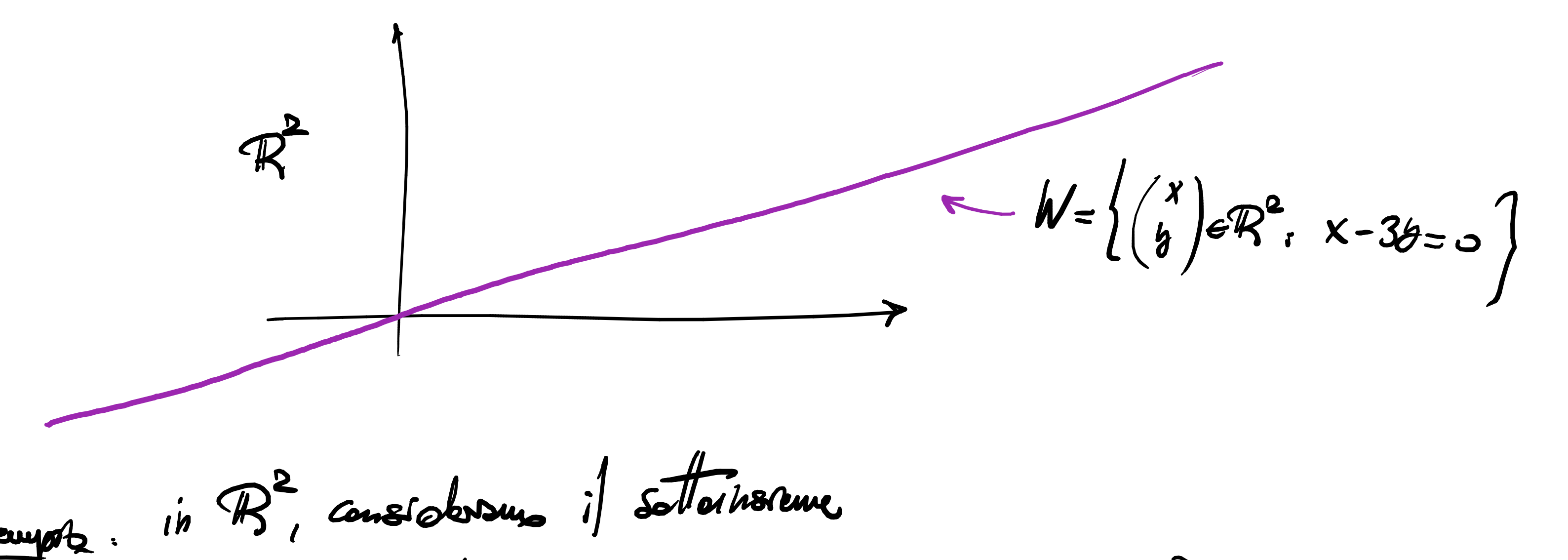
Pertanto $\lambda \cdot v \in W$.

Def. sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice un <u>sottospazio vettoriale</u> di V se valgono:

1. il vettore nullo di V appartiene a W (ovvero $0 \in W$)
2. $\forall v, w \in W$ vale che $v + w \in W$ ("chiusura rispetto alla somma")
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in W$ vale che $\lambda \cdot v \in W$ ("chiusura rispetto alla moltiplicazione per uno scalare")

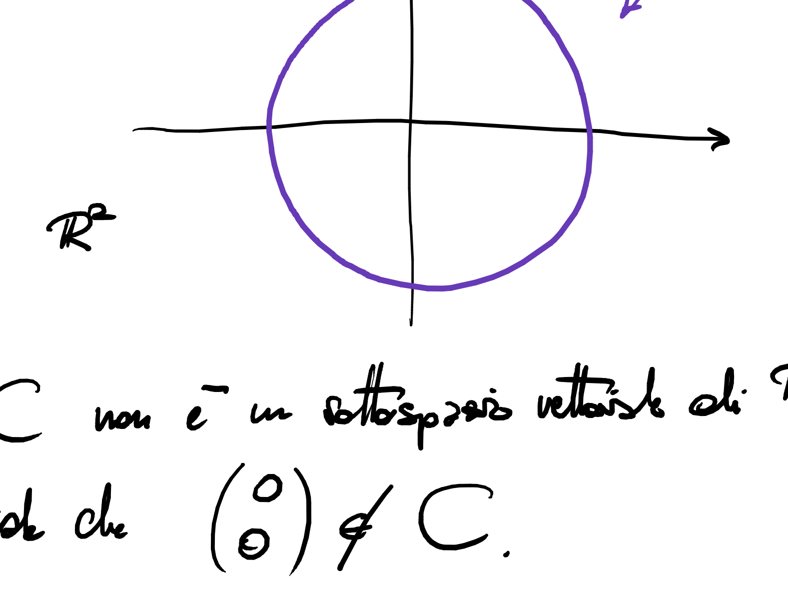
Esempio: se identifichiamo gli elementi di $\mathbb{R}^2$ con i punti del piano

$$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \{\text{punti del piano}\}$$



Esempio: in $\mathbb{R}^2$, consideriamo il sottoinsieme

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$



C non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ perché, ad esempio, vale che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin C$.