

Algebra Lineare ed Elementi di Geometria
Matematica per l'Economia e la Statistica 2
A.A. 2023/24
Prova scritta del 02.09.2024

Cognome	Nome

- (1) **(5 punti)** (a) Si dia la definizione di sistema di generatori di un sottospazio vettoriale. (b) Si dia la definizione di base di un sottospazio vettoriale. (c) Si enunci e si dimostri il teorema di struttura per sistemi lineari generali.

(2) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 .

(b) **(4 punti)** Si determinino una base di $\ker(f)$, una base di $\text{im}(f)$, e le dimensioni di $\ker(f)$ e $\text{im}(f)$.
Si determini, se esiste, un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(f)$ tale che $x_1 \neq 0$.

(c) **(3 punti)** Si trovi un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia compatibile.
Considerato il sistema lineare per tale specifico valore di α , si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) **(5 punti)** Si trovi una base \mathcal{B} di autovettori per L_A .
Si calcoli la matrice di cambio di base $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ dove \mathcal{E} è la base standard di \mathbb{R}^3 .

- (4) (a) **(3 punti)** Si determinino equazioni cartesiane della retta $\ell \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ che passa per i punti $P = (1, -2, 1)$ e $Q = (0, 1, -1)$.

- (b) **(5 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino la retta r e il piano H

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad H: y + z = 2$$

Descrivere la posizione reciproca tra r e H .

Se r ed H sono incidenti in un punto, determinare tale punto.

Se r è parallela ad H ed $r \cap H = \emptyset$, trovare un piano K che contenga r e sia parallelo ad H .

Se r ed H sono sghembi, trovare equazioni parametriche di una retta s che intersechi sia r che H .