

Algebra Lineare ed Elementi di Geometria
Matematica per l'Economia e la Statistica 2
A.A. 2023/24
Prova scritta del 16.09.2024

Cognome	Nome

- (1) **(5 punti)** (a) Si dia la definizione di vettori linearmente indipendenti (b) Si dia la definizione di rango di una matrice (c) Si enunci e si dimostri il teorema di Cramer (riguardante un sistema lineare $AX = b$ dove A è una matrice $n \times n$ invertibile).

(2) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 .

(b) **(4 punti)** Si determinino una base di $\ker(f)$, una base di $\text{im}(f)$, e le dimensioni di $\ker(f)$ e $\text{im}(f)$.
Si determini, se esiste, un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(f)$ tale che $x_1 = 0$ and $x_2 \neq 0$.

(c) **(3 punti)** Si trovi un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ sia compatibile.
Considerato il sistema lineare per tale specifico valore di α , si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 0 \\ 6 & -8 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) **(5 punti)** Si trovi una base \mathcal{B} di autovettori per L_A .
Si calcoli la matrice di cambio di base $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ dove \mathcal{E} è la base standard di \mathbb{R}^3 .

- (4) (a) **(3 punti)** Si determinino equazioni parametriche del piano $H \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ che passa sia per il punto $P = (1, 1, 0)$ che per la retta r di equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

- (b) **(5 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino la retta r e il piano H

$$r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \quad H: \begin{cases} x = t + s \\ y = 1 + s \\ z = -1 + 2t - s \end{cases}$$

Descrivere la posizione reciproca tra r e H .

Se r ed H sono incidenti in un punto, determinare tale punto.

Se r è parallela ad H ed $r \cap H = \emptyset$, trovare un piano K che contenga r e sia parallelo ad H .

Se r ed H sono sghembi, trovare equazioni parametriche di una retta s che intersechi sia r che H .