

Principi di Meccanica 2

In questo capitolo

- si introducono le grandezze fondamentali della Meccanica Classica, i postulati, i concetti di equilibrio e di moto, di lavoro e di energia;
- si descrivono i sistemi materiali così come vengono schematizzati dalla Meccanica Newtoniana, analizzando in particolare il più semplice fra di essi: il punto materiale;
- si descrivono le forze che sui sistemi materiali agiscono, principalmente la forza peso, la forza elastica, la trazione dovuta a funi e si introduce il concetto di reazione vincolare;
- si ricavano le equazioni di equilibrio e di moto del punto materiale, risolvendo elementari problemi.

2.1 Che cos'è la Meccanica?

A questa ambiziosa domanda si potrà in effetti cominciare a rispondere alla fine piuttosto che all'inizio di un corso di Meccanica. Tuttavia una elementare risposta servirà perlomeno a inquadrare il campo di interesse.

La Meccanica è il capitolo della Fisica che *descrive e predice la quiete o il moto* di un qualunque sistema materiale nello *spazio* e nel *tempo*, qualora si prescindano da tutte le caratteristiche fisiche del sistema stesso (termiche, elettromagnetiche, chimico-fisiche, ...) che non siano la sua semplice materialità: la sua *massa*, caratterizzata da una specifica attitudine a deformarsi.

La *descrizione* del movimento (o della quiete) consiste, in Meccanica, nell'assegnare alle diverse masse una collocazione nello spazio e nel tempo; e con ciò si viene anche a descrivere come si deforma nel tempo l'aspetto geometrico dei corpi.

In quanto alla *predicibilità* essa è possibile, in Meccanica Classica, in quanto si ritiene che fra i corpi (cioè fra le loro masse) si esercitino delle azioni che sono responsabili di ogni variazione geometrica (o di ogni sua assenza) nel tempo. Tali azioni si chiamano *forze*.

Pertanto in Meccanica Classica si ritiene che le "cause" della quiete o del moto di un sistema materiale siano le *forze*, da intendersi come interazioni fra masse. Potranno essere sollecitazioni che diversi componenti materiali di uno stesso sistema si scambiano fra loro, e si diranno *forze interne*, oppure sollecitazioni che altri corpi, esterni al sistema materiale sotto indagine, esercitano su di esso, e si diranno *forze esterne*.

Quando ci si limita alla descrizione puramente geometrica, al variare del tempo, si è nel campo della *Cinematica*.

La Meccanica descrive e predice la quiete (Statica) o il moto (Dinamica) di sistemi materiali (masse) nello spazio e nel tempo

Quando si tiene conto delle forze e si è al più in presenza di deformazione, ma in assenza di accelerazioni si è nel campo della *Statica*. Vigono in questo caso le condizioni di equilibrio.

Quando invece le forze provocano il movimento delle masse, rigide o deformabili che siano, con accelerazioni, si è nel campo della *Dinamica*.

Pur essendo la *Statica* l'argomento di questo testo non potremo prescindere da qualche nozione di *Dinamica*. Non solo per impostare correttamente, come vedremo, alcuni argomenti; ma anche perché i due concetti di quiete e di moto non sono così chiaramente distinguibili come la suggestione di parole consuete potrebbe di primo acchito farci credere.

Noi che siamo seduti al tavolo per leggere siamo fermi in quanto non ci muoviamo per la stanza o ci muoviamo in quanto il nostro pianeta sta percorrendo la sua orbita e noi con esso?

Ascoltiamo a questo proposito le parole di Simplicio nella seconda giornata del *Dialogo sui Massimi Sistemi*: "Così è: noi siamo in un dilemma, una parte del quale bisogna per necessità che sia vera, e l'altra falsa; perché tra il moto e la quiete che son contraddittori, non si dà un terzo, sì che si possa dire: «La Terra non si muove e non sta ferma; il Sole e le Stelle non si muovono, né stanno ferme»" (vedi Bibliografia).

Vedremo come a tale dilemma possa rispondere la proposizione che oggi denominiamo Principio di relatività Galileiano.

Senza addentrarci nelle questioni filosofiche che hanno fatto (e stanno tuttora facendo) tribolare la Scienza, dovremo però essere consapevoli dei postulati che reggono la Meccanica Classica e delle sue definizioni basilari. Grazie a essi la teoria ha una sua validità e i concetti di equilibrio e di moto hanno un preciso significato.

La riflessione sui limiti di validità della teoria è necessaria per dare un senso inequivocabile alle affermazioni che faremo e ai risultati che otterremo.

Ma c'è di più. È sano atteggiamento metodologico, affatto generale, rendersi consapevoli dei limiti di validità di una teoria scientifica, onde non cadere nelle due opposte, entrambe insostenibili, posizioni: l'una di fideismo, l'altra di scetticismo, nei confronti della trattazione tecnico-scientifica dei problemi.

Cautela e fiducia possono essere correttamente coniugate assieme, nei confronti delle teorie scientifiche.

2.2 Le grandezze fondamentali della Meccanica: spazio, tempo, massa

Spazio e tempo formano lo scenario entro cui avvengono i fenomeni meccanici. Ogni nostra anche più elementare forma di conoscenza è innanzitutto consapevolezza di eventi che hanno sede nello spazio e nel tempo, cosicché spazio e tempo sembrano quasi concetti connaturati alla mente umana.

In verità essi sono concetti oscuri e difficili da analizzare in senso filosofico. Da un punto di vista matematico essi sono dei *continui* (aggregati senza soluzioni di continuità, indefinitamente suddivisibili in aggregati più piccoli della stessa specie): monodimensionale il tempo, tridimensionale lo spazio (perlomeno tali si ritengono nell'accezione classica). Ogni punto di tali continui ci permette di individuare, rispettivamente, un istante o una posizione, qualora sia fissato un *sistema di riferimento*.

Per quanto riguarda il tempo, scegliere il sistema di riferimento significa fissare un asse dei tempi e un'origine su di esso. Con ciò non solo è possibile ordinare una successione di eventi secondo un *prima* e un *poi*, ma anche definire un *adesso*, che consiste in un punto sull'asse **temporale**. Esso è individuato da uno **scalare**: la sua ascissa. È possibile anche **misurare** la durata di un evento come lunghezza di un intervallo sull'asse temporale.

nazione, ma in questo caso le asse, rigide o amica. prescindere da ente, come ve- e di moto non e consuete po-

to non ci muo- percorrendo la

conda giornata a, una parte del ra il moto e la dire: «La Terra né stanno fer-

ne che oggi de-

(e stan tuttora ei postulati che e a essi la teoria iso significato. r dare un senso rremo. gerale, rendersi on cadere nelle l'altra di scetti- emi. ni, nei con-

ca:

eni meccanici. tutto consapevo- spazio e tempo

enso filosofico. senza soluzioni oli della stessa erlomeno tali si ermette di indi- issato un siste-

to significa fis- ossibile ordina- che definire un viduato da uno n evento come

Per quanto riguarda lo spazio, occorre scegliere direzioni privilegiate su ciascuna delle quali definire un ordinamento di prima e poi. Le più frequentemente usate consistono nelle direzioni di una terna di assi cartesiani ortogonali x, y, z di origine O . In ciascuno di essi va scelta un'unità di misura, che solitamente è la stessa per tutti e tre. Ogni punto dello spazio è un *qui* ed è individuato da un *vettore* che ha per componenti le tre coordinate del punto.

A ogni coppia di punti P e Q è pure associato un *vettore*

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$$

essendone definito il verso, in quanto si intende, con tale scrittura, che il percorrimto sia da P verso Q (Figura 2.1). Il particolare vettore $P-O$ coincide con il *vettore punto* P .

Il fatto che lo spazio sia a tre dimensioni comporta che ogni vettore sia esprimibile come combinazione lineare di tre vettori linearmente indipendenti che costituiscono la *base dello spazio vettoriale*, e che nel riferimento cartesiano sono i *versori* (vettori di modulo unitario) degli assi universalmente indicati come $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (vedi Appendice A):

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (2.1)$$

Vediamo ancora qualche precisazione sui concetti di spazio e di tempo.

- 1) Accettare che la durata di un evento sia misurata dalla lunghezza di un segmento sull'asse temporale significa accettare l'*omogeneità del tempo*, cosa che non è del tutto "evidente". Si tratta tuttavia di un'ipotesi che in Fisica viene accettata, in quanto considerazioni di carattere psicologico, ambientale... sono escluse dalla trattazione.
- 2) Calcolare *misure* di spazio e tempo, come di ogni grandezza fisica, significa eseguire confronti con grandezze campione della stessa specie: per le lunghezze occorre un "metro" cioè un corpo rigido campione; per il tempo occorre un "orologio" cioè un fenomeno di regolare ripetitività. Né il metro né l'orologio devono obbligatoriamente essere quel che normalmente si intende con tali nomi. L'importante è scegliere una lunghezza definita unitaria (il micron, il centimetro, l'anno luce...) e il fenomeno di durata definita unitaria (le piccole oscillazioni di un pendolo in assenza di attriti, un giro completo della Terra attorno al Sole, le oscillazioni regolari nei cristalli di quarzo...).
- 3) Come *sistema di riferimento* in Meccanica converrà intendere l'insieme del riferimento spaziale e di quello temporale, muniti di "metro" e di "orologio": in ciò consiste quel che in Meccanica si chiama l'*osservatore*.
- 4) Tutte le precedenti affermazioni sottintendono un convincimento che sembra del tutto ragionevole ma che in effetti è un assunto della Meccanica Classica:

■ *lo spazio e il tempo hanno carattere assoluto.*

E cioè: le dimensioni geometriche di un oggetto e la durata di un evento hanno di per sé un significato inequivocabile, indipendentemente da chi esegue la misura (a parte errori di carattere sperimentale). La Meccanica Relativistica per esempio non accetta questo postulato: per essa lunghezze e durate possono variare al variare dell'osservatore.

Anche per la Meccanica Relativistica tuttavia tali variazioni sono apprezzabili solo qualora i due osservatori si spostino uno rispetto all'altro con velocità paragonabili a quelle della luce.

Tale circostanza giustifica l'uso della Meccanica Classica in tutti i problemi che non coinvolgono velocità così elevate.

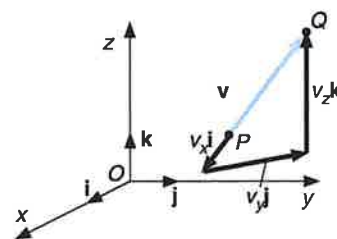


Figura 2.1

Solo il moto rettilineo uniforme ha accelerazione nulla

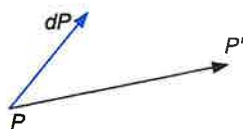


Figura 2.2

Ai soli concetti di spazio e di tempo fa riferimento la *Cinematica*, che è la descrizione del moto, come variazione di posizioni nel tempo.

Rimandiamo all'Appendice B per la trattazione cinematica. Rileviamo qui che *a un sol moto compete accelerazione nulla: al moto rettilineo uniforme*.

Se spazio e tempo sono lo scenario dei fenomeni meccanici, le *masse* ne sono i protagonisti.

Il concetto di massa viene qui introdotto in modo intuitivo, basandosi sul significato corrente di massa come quantità di materia, per completare il quadro delle *grandezze fondamentali* (o primitive) della Meccanica, che sono appunto *lunghezze, tempi, masse*. Sono dette fondamentali in quanto da esse, tramite leggi assiomatiche, definizioni e relazioni, sperimentali o dedotte, è possibile derivare tutte le altre grandezze meccaniche, le loro dimensioni e la loro misura (vedi Appendice D).

2.3 Il punto materiale e la Meccanica Newtoniana

Le masse, diversamente distribuite nella loro forma geometrica e con le loro diverse deformabilità, formano i *sistemi materiali* (Figura 2.3).

Impareremo a distinguere i corpi rigidi (Figura 2.3a), i sistemi composti da elementi rigidi (Figura 2.3b) e i continui deformabili (Figura 2.3c) essi si diranno mono-, bi- o tri-dimensionali rispettivamente a seconda che sia una sola la dimensione preponderante sulle altre (e in tal caso il sistema sarà assimilabile geometri-

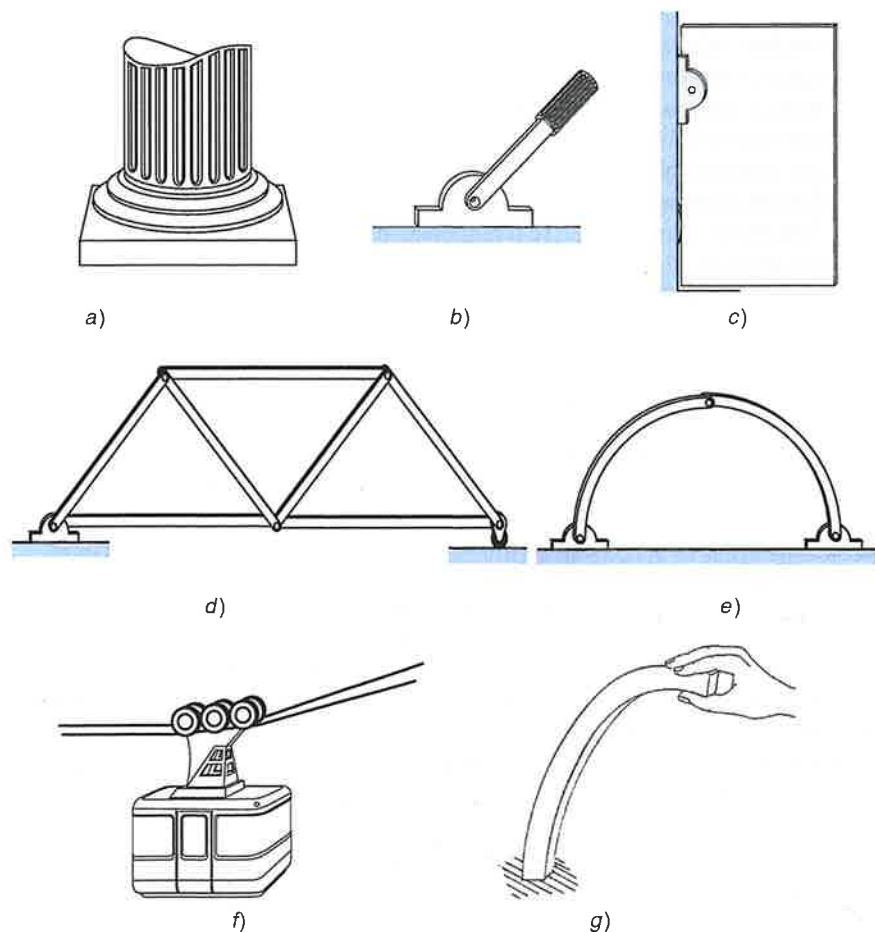


Figura 2.3

camente a una linea), che siano due (e in tal caso il sistema sarà assimilabile a una superficie), oppure che nessuna dimensione possa essere trascurata.

Per quanto nessun corpo sia rigido a rigore, l'ipotesi della rigidità viene adottata a seconda del problema trattato nonché del tipo di materiale in esame. Infatti può accadere che il problema non esiga l'esame della deformabilità o che il materiale abbia deformazioni del tutto trascurabili. Abbiamo tuttavia già commentato nel Capitolo 1 che ogni struttura sollecitata si deforma. Anzi è proprio grazie alla sua deformabilità che ogni struttura "cerca" (riuscendovi se è idonea) di sopportare le sollecitazioni cui deve far fronte.

Nella Meccanica Newtoniana qualsiasi sistema materiale può considerarsi un aggregato di *punti materiali*. Che cosa significa questa affermazione? Che cosa deve intendersi come punto materiale? Vediamo.

Diremo punto materiale un sistema materiale all'interno del quale non interessi distinguere varie parti, un sistema cioè che vada considerato come un tutt'uno; la sua collocazione nello spazio, anche se esso, come tutti i corpi, è dotato di massa e occupa una regione più o meno estesa nello spazio, è individuata da un solo punto, nel senso geometrico del termine, cioè delle sue tre coordinate (che intenderemo cartesiane ortogonali, salvo diversa precisazione). Non è detto che la sua estensione sia sempre piccola in assoluto; deve esserlo rispetto alle dimensioni del campo in cui il fenomeno viene studiato. La Terra, per esempio si può considerare un punto se la si studia nel suo moto attorno al Sole. Un edificio è schematizzabile come un insieme di punti in cui possono considerarsi concentrate le masse dei vari piani, se dei piani interessa il comportamento globale, se dell'edificio vogliono studiarsi le vibrazioni (dovute per esempio alle sollecitazioni del vento, o di un sisma) e se i collegamenti fra i punti sono rappresentativi dell'elasticità dell'edificio (Figura 2.4).

Ma anche i continui, nella Meccanica Newtoniana, "sono" aggregati di punti. Infatti si definiscono *sistemi continui materiali* quegli aggregati di materia indefinitamente suddivisibili in parti della stessa specie geometrica, nel senso che la massa distribuita nel volume totale sia indefinitamente suddivisibile in "volumetti" sempre più piccoli. La massa può eventualmente addensarsi in maniera diversa (continui non omogenei) ma deve occupare ancora tutto il volumetto. Si ipotizza cioè che il sistema non presenti alcun vuoto e che anche la più piccola parte sia dimensionalmente simile al tutto che può essere volume, superficie o linea, con dimensioni $[L^3]$ $[L^2]$ $[L^1]$. Ovviamente ogni sistema materiale occupa un volume che però viene trattato come superficie o linea quando una o due dimensioni siano trascurabili rispetto alle altre. Si pensi di suddividere il continuo C in infinite parti infinitesime ΔC nel senso dell'Analisi infinitesimale. È allora

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta C = P \quad (2.6)$$

e cioè ogni parte infinitesima, al limite, quando il massimo "diametro" δ relativo alla suddivisione operata tende a zero, coincide con un punto P (Figura 2.5).

Sarà perciò possibile estendere ai continui, mediante i classici procedimenti del Calcolo infinitesimale, i risultati ottenuti sul modello discreto di masse puntiformi.

Tutti gli elementi strutturali e la struttura stessa possono essere assimilati, per lo studio di vari aspetti meccanici, a sistemi continui, perlomeno quando i materiali di cui sono costituiti siano quelli classicamente studiati: acciaio, cemento armato o legno (anche alcuni materiali innovativi possono essere definiti "continui").

Ciò può giustamente destare stupore: che una trave in cemento armato per esempio, sia un continuo nel senso ora descritto, dell'analisi infinitesimale, sembra poco convincente. Il fatto è che la trattazione matematica è sempre una schematizzazione del fenomeno fisico, anzi ne è una "traduzione" nel senso che al-

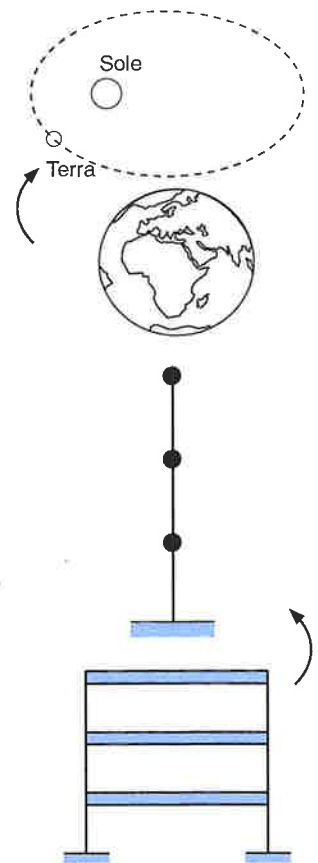


Figura 2.4

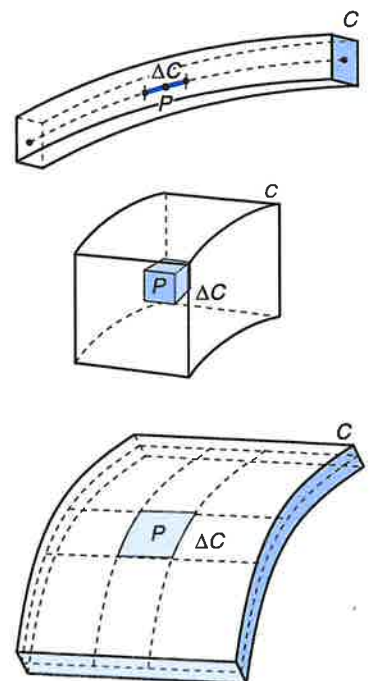


Figura 2.5

l'oggetto materiale sotto indagine e al suo comportamento vengono sostituiti coordinate, equazioni, in genere oggetti matematici. La *realtà fisica* viene descritta da un *modello matematico*, modello che, per uno stesso oggetto fisico, può essere diverso a seconda dei diversi problemi a esso relativi.

In quale misura, con quali garanzie di conoscenza effettiva, l'operazione sia lecita è il cuore dell'Epistemologia e più in generale della Filosofia della Scienza. A chi fosse interessato di approfondire l'argomento raccomandiamo in particolare gli scritti di Lakatos, Popper, Nagel indicati in Bibliografia. Vastissima e di grande interesse è tuttavia la letteratura sull'argomento.

Qui brevemente diremo che, pur diverse fra loro, le posizioni filosofiche sono concordi nell'accordare gradi di utilità e *non di verità* alle teorie scientifiche, in particolare a quelle espresse in termini matematici. A rispecchiare questo fatto è oggi quasi più consueto parlare di modelli piuttosto che di teorie. Uno stesso fenomeno può utilmente venir formalizzato secondo diversi modelli matematici a seconda degli aspetti che se ne vogliono mettere in luce.

La Meccanica Newtoniana è certamente uno dei più cospicui esempi di modello matematico della realtà fisica. In questo senso molti Autori fanno coincidere con Newton la nascita della scienza moderna: nel senso che, solo a partire da Newton, viene formulato un modello matematico di un insieme complesso di fenomeni fisici, per l'appunto quelli meccanici. E ciò costituisce in effetti una netta discontinuità con il precedente lavoro scientifico: si apre infatti la strada affascinante (e pericolosa, dobbiamo aggiungere) che conduce a sostituire all'osservazione di tanti casi sperimentali lo studio delle equazioni che li reggono, e soprattutto a prevedere come l'*intervento* su certe variabili comporti variazioni di comportamento nel fenomeno fisico.

Perché per esempio le traiettorie ellittiche descritte da Keplero come moto dei pianeti contengono informazioni molto minori che non le stesse traiettorie ottenute da Newton? Perché le prime sono puramente descrittive mentre le seconde sono calcolate mediante equazioni (vedi Esempio 2.7). Esse contengono la chiave per "progettare" il moto: di ciò si fa uso, per esempio, mandando in orbita un satellite.

2.4 Le forze

Si è detto che le masse sono protagoniste dei fenomeni meccanici, nello spazio e nel tempo. Lasciamoci ora tentare da queste domande: quali sono le cause dei fenomeni meccanici? chi sono, cioè, i responsabili della quiete e del moto?

Come sembra "spontaneo" e come (a volte) l'esperienza suggerisce, riteniamo che i corpi siano capaci di trasmettersi l'un l'altro delle sollecitazioni, e che sentano la reciproca influenza; così pure le varie parti di uno stesso corpo possono interagire fra loro.

■ Le azioni di corpi (o parti di essi) su altri corpi (o su altre parti di essi) si dicono *forze*.

Ci rendiamo ben conto che la suddetta proposizione non può considerarsi definizione soddisfacente. Accontentiamoci tuttavia per ora di una introduzione intuitiva al concetto di forza, rimandando una (possibile) più corretta definizione a dopo che saranno stati trattati i postulati di Newton. Non manchiamo peraltro di avvertire il lettore che a tutt'oggi il concetto di forza resta problematico, specialmente qualora si vogliano riportare a definizione unitaria tutti i tipi di forze, anche le interazioni relativistiche e subatomiche.

Illustriamo intanto con qualche esempio che cosa debba intendersi con "azioni di corpi su corpi".

Quando innestando la marcia di un'auto ne mettiamo in moto le ruote ciò accade in quanto alle ruote arrivano delle "forze" e cioè una sollecitazione tramite l'albero motore; quando con le mani o tramite una fune trasciniamo un oggetto gli trasmettiamo delle "forze"; quando poco gentilmente spintoniamo una persona facendola barcollare le trasmettiamo "forze"; quando il vento fa oscillare un'antenna, o anche un grattacielo, trasmette "forze".

Ma anche semplicemente quando ci alziamo da una sedia o ci incamminiamo o ci mettiamo a fare qualche sport il nostro apparato muscolare si mette in azione: fra varie parti del nostro corpo si trasmettono interazioni.

Tutto ciò sembra "intuitivo" in quanto è legato alla messa in moto di qualche sistema, il che sembra esigere una qualche "azione". Ma moltissimi sono i casi in cui non appare così palese l'intervento di una azione. Per esempio, per il fatto stesso che qualunque oggetto è tale, dobbiamo pensare che delle interazioni sussistano fra le sue parti, interazioni che tengon legate fra loro le varie parti e che verrebbero meno se si interrompesse la continuità dell'oggetto in esame, per esempio sezionandolo. Chiameremo *forze interne di connessione* tali interazioni.

Decisamente meno "intuitivo" sembra attribuire a "forze" la caduta di un sasso che abbandoniamo dalla nostra mano o che lanciamo con la nostra mano: il sasso si muove proprio quando viene abbandonato dalla mano. Si tratta in questo caso di forze a distanza, ben meno intuitive delle forze di contatto. Infatti solo dopo Newton abbiamo imparato che il sasso (come qualunque altro corpo) abbandonato a se stesso è in effetti soggetto alla attrazione delle altre masse nell'Universo (del tutto preponderante ovviamente quelle del pianeta Terra). Questa attrazione, così come la precedenti sollecitazioni viene chiamata forza. Per tutti i corpi in prossimità della Terra essa coincide con il *peso* del corpo. Più in generale, la *forza gravitazionale* è la sollecitazione che due masse qualunque m_1 ed m_2 esercitano l'una sull'altra (Figura 2.6).

La legge di gravitazione newtoniana precisa che questa forza è proporzionale alle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza r ed è di attrazione

$$F_{12} = F_{21} = h \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.2)$$

essendo h il coefficiente di proporzionalità che si chiama *costante di gravitazione universale*.

In termini vettoriali le due forze si esprimono in questo modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= h \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ vers } (P - Q) \\ \mathbf{F}_{21} &= h \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ vers } (Q - P) \end{aligned} \quad (2.2')$$

Si osservi che l'enunciato fa riferimento a masse puntiformi e vale infatti a rigore per ogni "punto" (nel senso già spiegato) del corpo sollecitato. In presenza di più masse, ogni punto risente dell'azione di tante forze, ciascuna dovuta a ognuna delle altre masse, ciascuna del tipo (2.2).

La forza gravitazionale, che a noi oggi sembra così accettabile, ha rappresentato una ben difficile conquista scientifica. Soprattutto sembrava poco verosimile una interazione fra corpi lontani che pure, anche prima di Newton, sia pur in termini imprecisi, era stata proposta. Infatti l'idea, originariamente platonica, di una gravitazione cosmica si trova ripresa da Copernico; e Keplero ne tenta una quantificazione denominandola "*appetentia*" fra corpi. Ma l'idea di forza a distanza non convinceva affatto. È interessante notare che Newton stesso sentì l'esi-

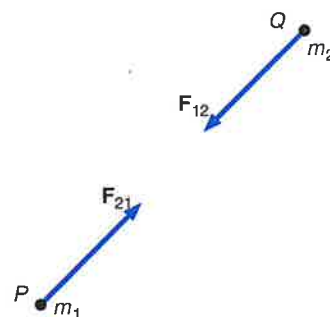


Figura 2.6

genza di affermare non che tali forze esistessero, ma che i fenomeni si spiegavano *come se* tali forze esistessero. Una tale affermazione poteva sembrare riduttiva a Newton, ma essa è del tutto consona alla nostra sensibilità scientifica attuale. Noi oggi accettiamo che altre teorie, per esempio la teoria della relatività, propongano una modellazione teorica della gravitazione diversa da quella Newtoniana.

Restando nell'ambito della Meccanica Classica la (2.2) è da ritenersi valida. Essa mostra fra l'altro che la forza gravitazionale è contraddistinta da modulo, direzione e verso, così come le forze di contatto.

Tutte le forze sono grandezze vettoriali (concetto anche questo di difficile precisazione nella storia del pensiero scientifico) e rappresentano azioni di corpi su corpi. In tale concetto la Meccanica Classica dà collocazione a tutti i tipi di forze.

2.5 Forze concentrate e forze distribuite

Le azioni che sono illustrate nella Figura 2.7 sono tutte esempi di forze: azione di corpi su corpi. Come avviene la trasmissione?

Nei primi due esempi è abbastanza spontaneo dire che il masso sollevato dall'uomo tramite la fune o la carrozzella trainata dal riccio, ricevono la forza nel "punto" di contatto. Qualora il masso o il carro fossero molto pesanti la fune dovrebbe essere un cavo di grande sezione e il collegamento fra la fune e il corpo, da sollevare o da trainare, dovrebbe interessare una certa porzione del corpo stesso; per quanto in tal caso la zona di trasmissione della forza non sarebbe più rigorosamente puntuale, sembra ancora accettabile considerare la forza applicata in un sol punto del corpo in esame. In questi casi diremo che si tratta di *forze concentrate*.

Qualche imbarazzo nel considerarle tali sorge per le forze che la carrozzina riceve dalle mani che la spingono. La zona di contatto delle mani non è poi una parte così trascurabile del manubrio; lo è invece nei confronti di tutta la carrozzina. Sembra ragionevole pensare a forze concentrate se in istudio è il moto della

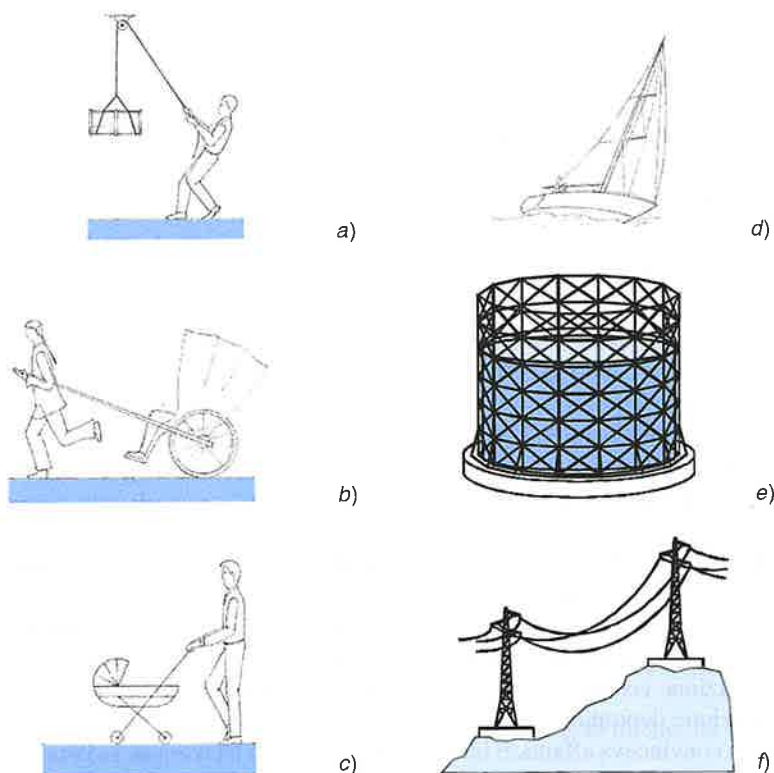


Figura 2.7

si spiegavano
rare riduttiva a
ca attuale. Noi
tà, proponiamo
toniana.

itenersi valida.
ta da modulo,

di difficile pre-
oni di corpi su
i i tipi di forze.

forze: azione di

o sollevato dal-
no la forza nel
pesanti la fune
ne e il corpo, da
corpo stesso; per
u rigorosamente
un sol punto del
e.

e la carrozzina
i non è poi una
tta la carrozzi-
è il moto della

carrozzina e non la situazione locale attorno alla zona di trasmissione delle forze. E naturalmente il problema è di più serio interesse meccanico se alla carrozzina e al papà si sostituiscono, per esempio, un pilastro e una trave di un edificio che gli trasmette sollecitazioni, un vagone ferroviario e un congegno di trasmissione...

Quando passiamo in esame gli ulteriori esempi illustrati nella figura occorre proprio superare il concetto di forza concentrata: il vento soffia infatti su tutta la vela; il gas contenuto nel gasometro spinge su tutte le sue pareti; il peso della fune o il vento che la fa oscillare agiscono lungo tutta la fune stessa. O ancora l'attrazione gravitazionale del Sole sulla Terra (o viceversa) agisce su ogni porzione di massa del pianeta (o del Sole); qualunque peso agisce dovunque sia distribuita la massa.

Diremo in questo caso che si tratta di *forze distribuite*. Esse formano un continuo (di forze) nel senso dell'Analisi infinitesimale, applicato al sistema materiale continuo (di masse) prima descritto. A ogni elemento infinitesimo dC (di fune, di superficie velica, di pilastro...) è applicata una forza infinitesima dF .

Capiamo inoltre l'esigenza di distinguere forze distribuite su di un corpo monodimensionale (come si può considerare una fune e anche una trave quando se ne possano trascurare le dimensioni trasversali), bidimensionale (come si possono considerare la superficie velica o una cupola o le pareti del gasometro) o tridimensionale (come in effetti sono tutti i corpi, e come vanno considerati quando debbano essere analizzati tenendo conto di tutte e tre le dimensioni).

Le forze concentrate risultano di più facile comprensione e permettono d'altrove la trattazione di molti problemi statici. È infatti lecito, per studiare l'equilibrio del corpo rigido e per verificare condizioni comunque necessarie all'equilibrio, sostituire le forze distribuite con opportune forze concentrate. Dunque, alle forze concentrate limitiamo per ora la nostra attenzione, rimandando al Capitolo 5 la trattazione delle forze distribuite.

2.6 I vincoli: forze reattive e forze attive

Già nella presentazione dei sistemi materiali, i disegni (Figura 2.3) illustravano che i sistemi da studiare si presentano quasi sempre ancorati all'ambiente esterno. Nella figura erano rappresentate cerniere, carrelli, semplici appoggi, ancoraggi completi... Questi *collegamenti del sistema all'ambiente esterno*, che limitano a priori la mobilità del sistema, si dicono *vincoli*. Anche essi rappresentano azioni di *altri corpi* (le cerniere, i carrelli...) sul sistema studiato e pertanto, coerentemente a quanto detto,

■ riteniamo che i vincoli trasmettano *forze* al sistema, in ciò consiste il *postulato delle reazioni vincolari*.

Tali forze però sono per così dire disponibili a intervenire a seconda di quale sia la sollecitazione cui il sistema è sottoposto. È ben comprensibile che la cerniera di Figura 2.3a) trasmetterà alla leva una forza che dipenderà da come la leva è sollecitata; la colonna di Figura 2.3a) riceverà dall'appoggio a terra forze che dipenderanno dal peso della colonna stessa; la cabina della funivia riceverà dal gancio che la collega alla fune (considerando il gancio come vincolo per il sistema cabina) una forza che dipenderà dal tipo di cabina nonché dal numero di persone in essa contenute...

Per questo motivo le forze trasmesse dai vincoli si dicono *reazioni vincolari*. Esse sono forze che reagiscono a quel che vien loro richiesto: sono *a priori incognite*.

Per contrapposizione a esse le forze note provenienti da altri corpi e che non limitano a priori la mobilità del corpo in esame si dicono *forze attive*.

d)

e)

f)

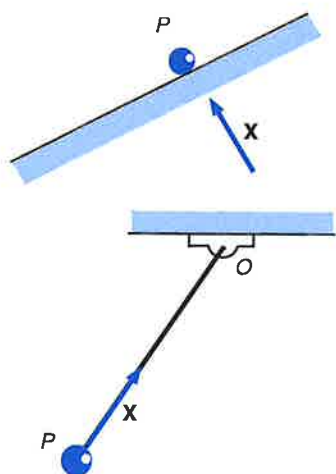


Figura 2.8

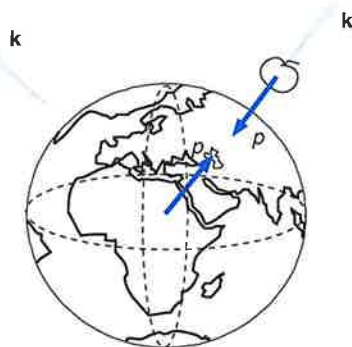


Figura 2.9

La discussione generale sulla funzione dei vincoli verrà presentata nel Capitolo 4. È tuttavia utile introdurre fin d'ora due vincoli tipici cui un punto P può essere soggetto: l'appoggio (liscio), su di un piano o su di una guida e il pendolo o biella, realizzato da un'asta rigida OP fissata nell'estremo O (Figura 2.8).

L'esperienza mostra che entrambi forniscono una forza reattiva \mathbf{X} nota in direzione: perpendicolare al piano (o alla guida) il primo; in direzione della biella stessa il secondo. Accade cioè che i vincoli intervengano con forze "disponibili" nella direzione in cui essi impediscono al punto di spostarsi.

Fra le forze attive meritano particolare attenzione la *forza peso* e la *forza elastica*.

La forza peso

Di precipuo interesse fra tutte le forze che agiscono sui corpi è certamente la forza peso. Essa è dovuta all'attrazione gravitazionale che la Terra esercita sul corpo in esame (anzi, a rigore dovremmo dire che tutte le masse dell'universo esercitano sul corpo in esame).

Questo concetto a noi così familiare e che la leggenda vuole suggerito a Newton dalla caduta di una mela è in effetti tutt'altro che intuitivo. I greci spiegavano la caduta dei corpi come una specie di attrazione fra materie simili o come una tendenza dei corpi a un "luogo naturale" che è loro proprio.

Noi diciamo che il peso altro non è che il caso particolare cui la (2.2) si riduce quando la distanza fra le due masse non vari apprezzabilmente e coincida con il "raggio" (ritenuto appunto costante) della Terra.

Detta M la massa della Terra, m la massa del corpo (puntiforme) in esame ed R il raggio della Terra (circa 6300 km) la (2.2) diviene

$$F = p = \frac{hM}{R^2} m \quad (2.3)$$

Il coefficiente hM/R^2 , che ha dimensioni $[LT^{-2}]$, è l'*accelerazione di gravità* universalmente indicata con g . La (2.3) assume così la ben nota forma

$$p = mg \quad (2.4)$$

Vettorialmente la forza peso è verticale discendente, cioè volta verso il centro della Terra, ed è opposta alla forza che la massa m esercita sulla Terra (Figura 2.9): tanto pesa m verso la Terra, altrettanto pesa la Terra verso m . In termini vettoriali, detto \mathbf{k} il versore verticale ascendente locale, è

$$\mathbf{p} = -mg\mathbf{k} \quad (2.5)$$

mentre la componente scalare della forza peso secondo un più familiare asse z discendente è

$$F_z = p \quad (2.5')$$

La (2.5) o la (2.5') esprimono il *campo gravitazionale uniforme* cui il campo gravitazionale si riduce quando si consideri una zona terrestre poco estesa. Si dice *grave* un punto soggetto al proprio peso.

Si noti che anche in modulo il peso non è a rigore costante, in quanto la Terra non è perfettamente sferica (è schiacciata ai poli e presenta cospicui rilievi) e perciò la distanza fra le due masse m e M , assimilata al "raggio" R della Terra, non è una costante. E, d'altronde, la massa m potrebbe non essere aderente alla crosta terrestre (per esempio una massa m in orbita su di un satellite artificiale).

Il valore "ufficiale" di g è

$$g = 9,81 \text{ m/sec}^2;$$

le sue variazioni sono, comunque, modeste. Se per esempio questo valore si assume valido al livello del mare, dalla (2.3) si ricava immediatamente che il peso, in

È errata l'affermazione "in orbita c'è mancanza di peso". Il peso è equilibrato dalla forza centrifuga dovuta al moto

cima all'Everest (~8000 m), diminuirebbe del 2,5% e, su di un'orbita di 100 km di raggio, diminuirebbe del 3%.

La forza elastica

La forza elastica è una forza che due punti si scambiano fra loro proporzionale allo spostamento relativo, forza in genere rappresentata tramite una "molla ideale" (Figura 2.9a). Mentre è ben comprensibile l'interesse alla forza peso, che qualunque struttura è chiamata a sopportare, ci si potrebbe chiedere come mai tanto interesse vada assegnato all'azione delle molle nell'analisi strutturale. Il fatto è che tali molle idealizzate rappresentano, e hanno rappresentato storicamente, il primo passo per tener conto della deformabilità elastica dei corpi.

Significativo, e peraltro famoso, è il disegno (Figura 2.10) che Hooke riportava nella sua celebre opera sulla teoria dell'elasticità. La teoria delle molle, che Hooke aveva con successo applicato ai bilancieri degli orologi, e di cui già altri prima di lui avevano intravisto l'importanza, diventava chiave interpretativa fondamentale della deformabilità di *tutti* i corpi. Hooke stesso nomina "Metalli, Legni, Pietre, Terre Cotte, Capelli, Corna, Tessuti di Seta, Ossa, Tendini e così via". Il problema di Galileo si avviava finalmente a corretta soluzione modellando la trave inflessa con un sistema di leve e di molle. La forza elastica si può considerare un nostro primo incontro con la famosa legge di Hooke: *ut tensio sic vis*. La forza applicata è proporzionale all'allungamento. (Una curiosità: alla fine del suo libro sulla Descrizione degli Elioscopi, Hooke proponeva la sua legge (*ut tensio sic vis*) sotto forma di anagramma: *ceiiniosssttuv*.)

Ora pensiamo a una semplice forza elastica di richiamo, proporzionale allo spostamento del punto P ; visivamente si usa rappresentare con una "molla ideale" fissata a un estremo (Figura 2.9a) e analiticamente con le sue componenti

$$F_x = -kx \quad F_y = -ky \quad F_z = -kz \quad (2.6)$$

Questa "molla ideale" è priva di massa e non può esercitare la repulsione che deriverebbe da una sua compressione.

Il coefficiente k è detto rigidità della molla. La forza elastica fornisce fra l'altro un metodo per la *misura statica delle forze*. Nella Figura 2.9b è schematizzato un *dinamometro*: l'ascissa x del punto P misura, su una scala appositamente tarata, il valore della forza che tiene in equilibrio il punto P soggetto alla forza elastica.

Va infine notato che la legge di Hooke viene anche presentata come definizione statica del concetto di forza, ma ciò non è esente da critiche (questo punto è approfondito nel Paragrafo 2.10).

Segnaliamo anche un altro tipo di forza che ha importantissimo rilievo: *l'attrito*. Di esso rimandiamo la trattazione al Capitolo 4, pensando che se ne potrà allora capire meglio il ruolo e il significato.

Qualche specifico commento va ora dedicato alle forze esercitate dalle funi. Esse sono sempre trazioni e rappresentano fin dai primordi un esemplare modo per applicare forze.

Se non c'è attrito fra la fune e i corpi con cui essa viene a contatto (carrucole od altro) la fune trasmette inalterato il valore della forza da un estremo all'altro e ne altera invece la direzione guidandola per così dire lungo il suo percorso. Così nella Figura 2.11, che ricorda i famosi esperimenti di Stevino, già citati nel Capitolo 1, l'insieme delle funi avvolte attorno alle carrucole permette di equilibrare un peso p con un altro 8 volte più piccolo, ma in ogni tratto di fune la tensione è costante: uguale a $p/8$ nel tratto più a destra nella figura; uguale a $p/4$ nel successivo, appeso al secondo gancio; uguale a $p/2$ nel tratto appeso al primo gancio.

Che in assenza di attrito la tensione si trasmetta inalterata lungo la fune è ben conforme all'esperienza, che solo sull'attrito appunto fa conto qualora si voglia

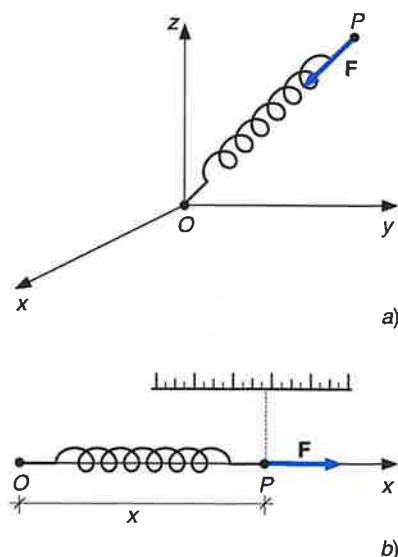


Figura 2.9

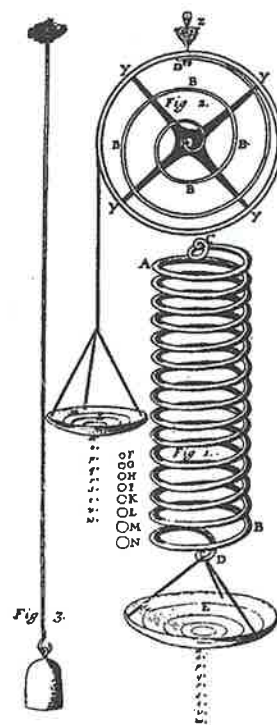


Figura 2.10

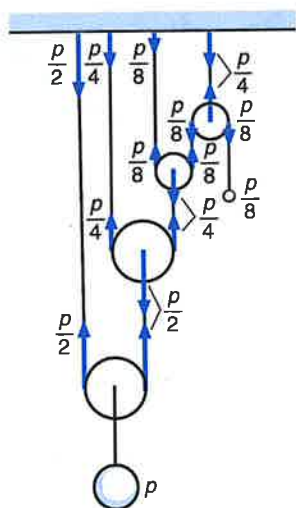


Figura 2.11

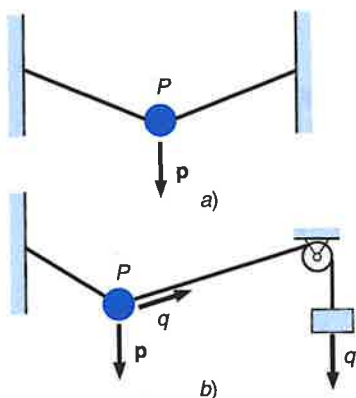


Figura 2.12

con una sola fune equilibrare una notevole forza. È quel che facciamo per esempio per **fermare** una tenda o una barchetta avvolgendo **parecchie** volte la fune attorno **a una bitta** in modo che il capo libero della fune sia **praticamente** scarico (Figura 7.36).

Rimandando le questioni del comportamento delle funi al Capitolo 7, e limitandoci per ora ai casi di **contatto liscio** in cui la tensione si trasmette **inalterata** da un estremo all'altro, **chiediamoci**: come si devono trattare le forze esercitate dalle funi? Come forze attive o come forze reattive?

Dipende. Se la fune esercita una costrizione *geometrica* a priori la trazione è da trattarsi come reazione vincolare, del tutto simile a quella esercitata da un pendolo (che appunto con una fune è realizzato in genere) o da una biella (purché si tratti di trazione e non di compressione). Se invece la fune non dà costrizioni geometriche a priori la trazione da essa esercitata è da trattarsi come forza attiva. Nella Figura 2.12a le tensioni nei due tratti di fune sono reazioni vincolari, da calcolarsi in funzione di p (il punto P è completamente vincolato nella posizione voluta dai due tratti di fune di lunghezza nota). Nella Figura 2.12b il punto P può cambiare la sua posizione; le forze trasmesse dalla fune fungono l'una (quella di sinistra) da forza reattiva, come nella Figura 2.12a, l'altra da forza attiva e il suo valore in condizioni di equilibrio è q e non dipende da come il punto P è caricato. Se cambia p cambia la posizione equilibrata (se esiste), non il valore della tensione q .

2.7 Forze esterne e forze interne

Abbiamo parlato di “altri” corpi, di “ambiente esterno”. Vediamo di precisare. È essenziale, prima di ogni analisi, definire quale sia il “sistema” da studiare. Dopo di che sarà chiaro che cosa sia da intendere come esterno o come interno al sistema stesso.

Si diranno *forze esterne* (attive o reattive che siano) quelle che provengono sul sistema dall'esterno. Nella Figura 2.3 sono per esempio forze esterne:

- la reazione che la cerniera fornisce al sistema leva;
- il peso della colonna e la reazione dell'appoggio sul sistema colonna;
- la reazione dell'aggancio alla fune per il sistema cabina nonché il peso della cabina stessa;
- le reazioni agli ancoraggi della fune nonché i pesi propri di fune e di cabina per il sistema fune + cabina.



Il peso proprio di una struttura è una forza esterna perché dovuta all'attrazione gravitazionale esercitata dal pianeta Terra.

Per un punto materiale ovviamente non esistono forze interne.

Problema fondamentale che ci si pone in Statica non è solo l'analisi della sollecitazione che dall'esterno viene trasmessa alla struttura, ma anche l'indagine, come si è detto, all'interno della struttura stessa. Riguardo a tale indagine sorgono spontanee le domande: come fa la struttura stessa a tenersi assieme, con le varie parti connesse tra di loro? Perché, se interrompiamo la continuità di una struttura in equilibrio tagliandola per esempio in due parti, il suo stato meccanico si altera e in equilibrio, in genere, non sta più? È ragionevole pensare che le due parti si tengano unite fra di loro con "forze" che le due parti si trasmettono vicendevolmente e che vengono a mancare interrompendo la continuità.

■ Le “forze” che su di una parte del sistema provengono da altre parti del sistema stesso si dicono *forze interne*.

Esse sono tipicamente le *forze di connessione* all'interno di un singolo elemento strutturale; ma possono essere anche forze interattive di altro tipo, purché esercitantesi fra parti dello stesso sistema. Per esempio una fune, oppure una molla, sia tesa fra due punti P e Q di un sistema (Figura 2.13). Ognuno dei due punti riceve dall'altro una forza tramite la fune o la molla; si tratta di forze interne al sistema formato dalle due aste. Lo stesso dicasi per le forze che ciascuna asta riceve dalla cerniera B .

Tuttavia si badi bene a questo fatto: se il sistema da studiare è una singola asta, per esempio l'asta AB , la forza che tramite la fune o la molla o la cerniera l'asta riceve è, per il sistema AB , forza esterna.

La definizione di forza esterna o interna dipende da come si è definito il sistema. Anche le reazioni vincolari in A e in C , esterne per il sistema ABC (Figura 2.13), diverrebbero forze interne per il sistema se si comprendesse in esso anche la zona di ancoraggio.

2.8 I problemi della Statica

Affidando per ora all'intuizione il significato di concetti come equilibrio, stato di sforzo e di deformazione, resistenza, cerchiamo di anticipare l'enunciato delle questioni fondamentali cui la Statica dà risposta, in modo da avere un quadro, sia pur per ora sommario, degli argomenti che andremo a studiare.

- 1) Definito il sistema, la sua deformabilità e i suoi vincoli, note le forze attive, sussiste l'equilibrio? Per quali configurazioni geometriche del sistema? Con quali reazioni vincolari?
- 2) In condizioni di equilibrio, qual è il fluire delle forze all'interno delle strutture, ovvero qual è lo stato di sforzo interno del sistema? A prezzo di quale deformazione il sistema riesce a mettere in atto delle forze interne che nel complesso consentano alla struttura di far fronte alla sollecitazione esterna? Come si suddividono fra loro i compiti le varie parti della struttura? Quali forze tocca sopportare a ciascuna di esse?
- 3) È in grado, ogni parte, di sopportare le forze che le spettano senza rompersi o lesionarsi?

Questi tre insiemi di domande costituiscono, rispettivamente, i tre fondamentali capitoli della Analisi Strutturale:

- 1) condizioni di equilibrio;
- 2) stato di sforzo e di deformazione;
- 3) verifica della resistenza.

Problemi notevolissimi dell'Analisi Strutturale cui pure dedicheremo qualche attenzione sono

- 4) la stabilità dell'equilibrio;
- 5) la trattazione dell'incertezza.

In questo libro, verranno esaminati i punti 1) e 2) per alcuni casi significativi e verranno accennati i temi 4) e 5). Del punto 3) si darà cenno in qualche problema.

Per avviarci a dar risposta a queste domande, cominciamo a esporre i postulati e le leggi che formano il fondamento della Meccanica Newtoniana.

Spesso distigueremo i problemi nel *piano* dalla più generale categoria di problemi nello *spazio*, iniziando in generale dai primi in quanto comportano notevoli semplificazioni di calcolo. Deve intendersi *problema piano*:

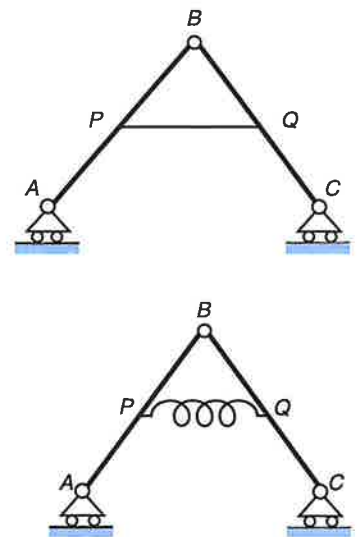


Figura 2.13

- o un problema in cui la *geometria* della struttura e le forze sollecitanti possono considerarsi contenute in un piano in quanto la terza dimensione è trascurabile;
- o un problema in cui una generica *sezione piana* della struttura è rappresentativa di qualunque altra a essa parallela, nel senso che tutte si trovano nelle stesse condizioni meccaniche e sono soggette a *forze che sono contenute nel piano della sezione*. Uno generico fra questi piani si dice *piano direttore*.

2.9 Il sistema di riferimento e il Principio di Relatività Galileiano

Come abbiamo già detto, il movimento o la quiete vanno riferiti a un *osservatore*; sia esso una terna cartesiana ortogonale fornita di orologio; che indicheremo con *OXYZT*. Quale valore avranno le leggi meccaniche riscontrate da questo osservatore? Varranno per un altro osservatore *oxyzt*?

Leggiamo le considerazioni che Galileo fa esprimere a Filippo Salviati nel *Dialogo sui Massimi Sistemi*.

“Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate di aver mosche, farfalle e simili animalletti volanti; siavi anco un gran vaso di acqua, e dentrovi de’ pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell’acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animalletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno nel vaso sottoposto; e voi, gettando all’amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze siano eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succedere così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina o pure sta ferma: voi soltanto passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi foste situati per l’opposito; le goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell’orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accadrà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave...”

Con minor suggestione di linguaggio noi enunciamo oggi queste argomentazioni come *Principio di Relatività Galileiano*.

■ *Le leggi meccaniche valide per un osservatore valgono per qualunque altro osservatore in moto rettilineo uniforme rispetto a esso.*

O anche: *le leggi meccaniche sono invarianti per trasformazioni galileiane.*

Per *trasformazioni galileiane* si intende il cambiamento di coordinate voluto dal moto rettilineo uniforme di un osservatore rispetto all’altro, tali trasformazioni si scrivono

$$T = t \quad X = x + vt \quad Y = y \quad Z = z \quad (2.7)$$

se, senza perdita di generalità, si assumono gli assi X e x dei due osservatori diretti e volti come la velocità v di un osservatore rispetto all'altro (Figura 2.14).

Si noti che se un punto P è fermo per l'osservatore $oxyzt$ non è fermo per l'altro osservatore: rispetto a esso P si muove di moto rettilineo uniforme secondo le (2.7). Le velocità sono diverse (nulla per il primo osservatore, v per il secondo), ma le accelerazioni sono eguali, nulle per entrambi. Più in generale l'accelerazione è invariante per trasformazioni galileiane.

Vale infine la pena di ricordare che le (2.7) e il Principio di Relatività Galileiano valgono se si accetta il carattere assoluto dello spazio e del tempo, cui si è già accennato. Esplicitamente tale carattere assoluto si esprime nel modo seguente:

$$T = t \quad D = d \quad (2.8)$$

e significa che i due osservatori sono in grado di accordare i loro orologi in modo che a ogni evento, dovunque accada, attribuiscono la stessa coordinata temporale (T o t) e che la distanza D fra due punti giudicata da $OXYZT$ coincida con la distanza d giudicata da $oxyzt$.

La Meccanica Classica introduce la precisazione espressa dalla (2.8) solo dopo l'avvento della Meccanica Relativistica. Prima la si riteneva "evidentemente vera". In effetti i due osservatori possono accordare le loro misure di spazio e di tempo solo trasmettendosi segnali. Affinché possano decidere di misurare la stessa posizione o la stessa durata è necessario che la rapidità con cui si propagano i segnali sia grande rispetto a quella con cui i due osservatori si muovono l'uno relativamente all'altro. Ora questi segnali sono ordinariamente segnali luminosi, e quindi la circostanza è nei casi più comuni ampiamente verificata. Non lo sarebbe se le due terne si muovessero l'una rispetto all'altra con velocità paragonabili a quelle della luce. In tal caso verrebbe meno la validità della Meccanica Classica. Si noti: non è il principio di invarianza delle leggi meccaniche che verrebbe meno.

Son le leggi meccaniche che sarebbero diverse da quelle classiche, in modo da restare invarianti per quelle trasformazioni che fan passare da un osservatore a un altro, trasformazioni che si esprimerebbero in forma diversa dalle (2.7).

Nel prossimo paragrafo passiamo a esporre le leggi che stanno a fondamento della Meccanica Classica. Il sistema di riferimento per cui esse hanno validità è detto *osservatore assoluto*. Si suol dire che esso si avvale di una terna solidale con il cielo delle *stelle fisse*, il cielo delle costellazioni già ben note agli antichi, le cui immutabili posizioni relative sulla volta del cielo ben sembravano fornire un esempio di immobilità (Figura 2.15). In effetti anche le distanze fra le cosiddette stelle fisse si sono riscontrate variare nei secoli, sia pur di pochissimo. E allora? Allora ci si dovrà accontentare di dire che per una certa classe di osservatori valgono le leggi della Meccanica Classica. Fra di essi è da ritenersi con buona approssimazione ogni sistema solidale con la Terra.

2.10 Le leggi di Newton

In linguaggio attuale, per un osservatore assoluto, le leggi di Newton possono così venir formulate.

La prima legge o *legge d'inerzia* afferma che

- un punto materiale sottratto a qualunque forza o sta fermo o si muove di moto rettilineo uniforme.

Anche se siamo abituati ad accettare gli enunciati scritti sui libri di testo, proviamo a fissare davvero l'attenzione su quanto abbiamo appena letto. Non è un po' sbalorditivo? S'è mai visto un punto che se ne vada indisturbato per l'eternità?

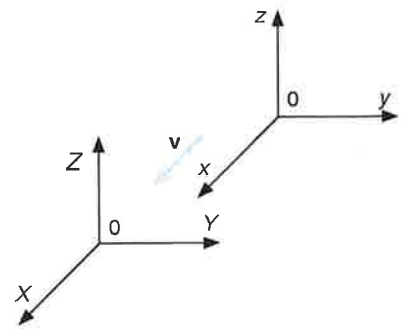


Figura 2.14

Come si può definire l'osservatore assoluto?

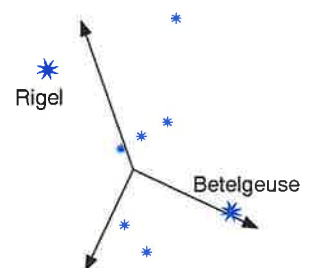


Figura 2.15

La prima legge e il sistema di riferimento

È inesatto enunciare la legge d'inerzia per un "corpo" anziché per un punto

Il fatto è che il punto, nella legge d'inerzia, è *sottratto a qualunque forza*; in altre parole esso è isolato dal resto dell'universo, in condizioni cioè che non è mai dato di osservare.

La legge non è verificabile con l'esperienza e proprio per questo c'è voluto un così lungo cammino nella storia della Scienza prima che venisse formulata. Essa ha il valore di un'affermazione limite. Quel che è possibile verificare è che tanto più piccole sono le forze agenti sul punto tanto più il punto persevera nel proprio stato. E ancora: ammessa come "evidente" la prima parte, la seconda ne consegue per il Principio di Relatività Galileiano.

La prima legge di Newton fornisce la possibilità di superare l'ostacolo in cui ci si è imbattuti per definire l'osservatore, divenendo essa stessa definitoria dell'osservatore assoluto: osservatore assoluto è un sistema di riferimento per cui valga la legge d'inerzia. Per via di questa definizione l'osservatore assoluto si dice anche *osservatore inerziale*. E d'ora in poi intenderemo che un osservatore solidale con la Terra sia tale. E a esso sempre ci riferiremo.

La seconda legge

La seconda legge è nota come *legge fondamentale* della Dinamica. Essa afferma che:

■ un punto materiale sotto l'azione di una forza acquista un'accelerazione **a** proporzionale a **F** e il coefficiente di proporzionalità **m** si dice *massa* del punto.

La forza non provoca velocità ma variazioni di velocità

La forza non provoca velocità ma variazioni di velocità. In formula

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (2.9)$$

La prima legge associava alla mancanza di forza la *perseveranza del moto* (moto rettilineo uniforme). La seconda legge associa alla presenza di forze la *variazione del moto*.

La seconda legge di Newton fornisce la possibilità di precisare il concetto di forza, già discorsivamente introdotto come azione di corpi su corpi. Viene essa stessa considerata da molti Autori definitoria del concetto di forza (torneremo su questo punto tra poco).

Modello matematico ovvero possibilità di predire e di intervenire

La (2.9) è un'equazione (vettoriale): in ciò consiste la possibilità di predire offerta da questa legge. Essa non si limita a descrivere un moto osservato bensì dice (tramite integrazione) quale *sarà* il moto, note le forze agenti e la situazione di partenza (condizioni iniziali).

Per esempio, per il moto dei pianeti essa fornisce in termini generali la risposta che Keplero descriveva per i pianeti osservati: sotto l'azione di una forza gravitazionale un punto descrive una conica (si veda l'Esempio 2.7).

La (2.9) ha rappresentato un vero punto di svolta nella storia del pensiero scientifico. Essa ha consentito, come è proprio di un modello, di sperimentare, e cioè di "osservare" che cosa fa il sistema (il punto materiale in questo caso) al variare della sollecitazione cui viene sottoposto o al variare delle sue caratteristiche fisiche. Infatti la (2.9) consente il calcolo della risposta del sistema a diverse sollecitazioni. In coordinate cartesiane la (2.9) è equivalente alle tre equazioni scalari:

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases} \quad (2.10)$$

che si riducono a due nel caso del piano.

Le (2.10) sono equazioni differenziali del secondo ordine nelle funzioni incognite $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Qualora si conoscano posizione e velocità a un istan-

te, informazioni che si dicono *condizioni iniziali* e che consentano di individuare le costanti di integrazione, le (2.10), tramite integrazione, conducono alle *equazioni del moto*

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases} + \begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \\ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \\ \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad P = P(t) \quad (2.10')$$

↑ ↑ ↑ ↑

seconda legge + condizioni iniziali integrando equazioni del moto

Le (2.10') esplicitano in che senso vada intesa la possibilità di "osservare" il fenomeno fisico tramite il modello matematico fornito dalla seconda legge di Newton. La legge è unica, qualunque sia il punto materiale sotto "osservazione"; si possono variare i parametri contenuti nelle equazioni, tipicamente la forza \mathbf{F} , la massa m , le condizioni iniziali P_0 e \mathbf{v}_0 , e "osservare" come ciò influenzi il moto del punto $P(t)$.

Alcuni Autori attribuiscono alla seconda legge anche il compito di *definire* la forza. Ciò in effetti non è esente da critiche, di cui riferiremo nel commento in questa pagina

La terza legge di Newton è nota come *principio di azione e reazione* (Figura 2.16).

Essa afferma che

- due punti interagenti meccanicamente esercitano l'uno sull'altro forze opposte, e cioè uguali in modulo e direzione, contrarie in verso.

Poiché il modulo della forza che P esercita su Q è $m_Q a_Q$ il principio afferma che

$$m_Q a_Q = m_P a_P \quad \text{ovvero che} \quad \frac{a_Q}{a_P} = \frac{m_P}{m_Q} \quad (2.11)$$

La (2.11) afferma che le masse di due punti formanti un sistema isolato sono inversamente proporzionali alle loro accelerazioni e consente la misura della massa di un punto rispetto a quella dell'altro presa come unità di misura.

Alcuni Autori attribuiscono alla terza legge il compito di definire la massa; la quale, nella seconda legge, si trova menzionata come una non meglio definita caratteristica propria del punto materiale.

Commento: che la seconda legge possa essere considerata definitoria del concetto di forza può essere consolatorio, ma non è certo limpido dal punto di vista logico. Come può infatti una legge fisica coinvolgere grandezze che essa stessa definisce?

Il fatto è che il concetto di forza, che sembra tanto spontaneo e intuitivo, è molto problematico a definirsi. Tanto che sono state tentate sistemazioni teoriche della Meccanica che non fanno uso del concetto di forza: sono famose quelle di Mach (che propone essere la forza un "concetto ausiliario") e di Hertz. La Teoria della Relatività ha poi geometrizzato la Meccanica.

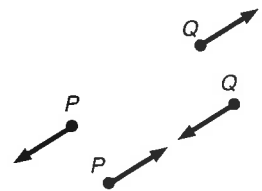


Figura 2.16

La terza legge

È molto vago enunciare il principio nella forma: a ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria

È tuttavia possibile, restando nell'ambito della Meccanica Classica, costruire il concetto di forza su premesse puramente cinematiche in modo da non incorrere nel "fatale errore di dire che forza significa massa per accelerazione". Al testo di C. Cercignani (1976), da cui l'affermazione è tratta, rimandiamo chi volesse approfondire l'argomento.

Si noti peraltro che la cosiddetta definizione statica di forza, basata sulla legge di Hooke, che alcuni Autori propongono per non incorrere nel circolo vizioso, in effetti non lo evita: una qualunque legge fisica, che sia quella di Hooke o quella di Newton, non può essere definitoria di una grandezza che la legge stessa coinvolge.

Tormentati da dubbi, torniamo perciò alla discorsiva definizione di forza come azione di corpi su corpi, un po' meglio precisata come causa atta ad alterare lo stato di quiete o di moto (oppure a causare deformazioni).

Riconosciamo così come importanti forze attive la forza gravitazionale e la forza elastica; e come primi esempi di forze reattive quelle fornite da un appoggio, da una biella (o pendolo) e, nei casi sopra precisati, da una fune.

Anche a proposito della possibilità di definire la massa tramite la terza legge di Newton valgono considerazioni analoghe a quelle or ora fatte.

Agli albori del '900 il concetto di massa non aveva ancora trovato la sua pace e la sua approfondita analisi avrebbe riservato enormi sorprese. È famosa l'affermazione di Einstein "la massa inerte coincide con la massa pesante", affermazione che appare del tutto evidente, oggi, ma che solo Einstein ha messo esplicitamente in luce nel 1905 facendone punto di partenza per la fondazione della Meccanica Relativistica.

L'affermazione è una riflessione sul fatto che questa caratteristica propria del corpo, che si chiama massa, funge come caratteristica di inerzia nella (2.9) (una specie di pigrizia a lasciarsi accelerare) e come attitudine ad attrarre (o a farsi attrarre da) un altro corpo. E non sembra affatto evidente che due propensioni così diverse debbano essere rappresentate dalla stessa grandezza fisica. Einstein lo chiama un "indizio" sul quale, come in un "giallo", bisogna appuntare l'attenzione... E fu così che nacque la Meccanica Relativistica.

Per continuare la riflessione su questi argomenti rimandiamo alla Bibliografia segnalata alla fine del volume.

2.11 La composizione delle forze e la prima operazione invariante

Se le forze sono vettori dobbiamo aspettarci che esse si compongano secondo la regola della somma vettoriale (Appendice A). Così infatti mostra l'esperienza, e sembra oggi del tutto intuitivo, anche se, come si è visto nel Capitolo 1, lunghissimo è stato il percorso scientifico per giungere a tale affermazione.

In forma precisa e compiuta possiamo oggi affermare nei seguenti termini la possibilità di comporre o decomporre forze.

La prima operazione invariante afferma che:

- in ogni sistema materiale è sempre possibile, senza alterare lo stato meccanico (di quiete o di moto che sia),
- sostituire a più forze applicate in un punto la loro risultante \mathbf{R} applicata nello stesso punto,
- sostituire a una forza più forze, tutte applicate nello stesso punto, che la ammettano come risultante.

In altre parole

■ l'equilibrio (o il moto) è invariante per composizione o decomposizione di più forze in un punto.

Val la pena sottolineare che l'operazione di somma vettoriale è definita sui vettori, appunto, che sono enti muniti di modulo, direzione e verso. La composizione (o decomposizione) di forze è definita, invece, sulle forze che sono, sì, vettori ma *vettori applicati* in ben precisi punti di una struttura; somma non significa sostituibilità in ogni caso.

L'operazione invariantiva testé enunciata precisa che per forze applicate tutte in un sol punto somma significa sostituibilità.

Ci guarderemo bene invece dall'affermare ad esempio che due forze opposte applicate agli estremi di una molla o ai due bracci di uno schiaccianoci siano sostituibili da una forza nulla, o che due ragazzi stratonantisi in una figura di rock si comportino come se non si trasmettessero forza alcuna! (Figura 2.18).

Neppure avrebbe senso, per un grave puntiforme (punto materiale) appoggiato sul tavolo o appeso a una fune (Figura 2.19), sostituire una forza nulla alle due forze, uguali e contrarie, che fra loro si scambiano peso e tavolo o peso e fune. Si tratta infatti di forze applicate a punti fisicamente diversi, anche se geometricamente coincidenti: il peso è tenuto in su e il tavolo è compresso in giù; oppure il peso è tenuto in su e la fune è tirata in giù.

Le forze opposte, che possono essere sostituite dalla forza nulla, sono quelle applicate (entrambe) al punto P : il peso e la forza di sostegno che al punto proviene dal tavolo o dalla fune.

Grazie alla prima operazione invariantiva e alle leggi di Newton siamo ora in grado di affrontare lo studio dell'equilibrio o del moto del punto materiale; infatti, se il punto è soggetto a più forze, a esse è lecito sostituire la loro risultante.

Cosicché la legge d'inerzia e la legge fondamentale, rappresentata dalla (2.9) o dalle (2.10), continuano a valere pur di sostituire a \mathbf{F} e alle sue componenti F_x, F_y, F_z la risultante \mathbf{R} e le sue componenti R_x, R_y, R_z .

2.12 Equilibrio del punto materiale

Quali sono infine le condizioni di equilibrio per il punto materiale?

L'annullarsi della risultante delle forze agenti sul punto, da quanto siamo venuti dicendo, si presenta senz'altro *condizione sufficiente per il mantenimento della velocità iniziale*.

Infatti, per la prima operazione invariantiva, alle forze è sostituibile la forza nulla e, per la legge d'inerzia, tale forza garantisce la quiete o il moto rettilineo uniforme, il che significa che il punto mantiene la sua velocità, nulla o diversa da zero, a seconda di quel che in un dato momento era.

La legge d'inerzia in sé non sa distinguere, si è già detto, fra quiete e moto rettilineo uniforme. Per distinguere fra i due casi dobbiamo aggiungere le condizioni iniziali, cioè l'informazione di quanto valga la velocità del punto in un certo istante, che diciamo iniziale. E perciò *l'equilibrio va inteso come mantenimento della quiete*.

Per esempio, un punto sottratto a qualunque forza, dovunque venga posto, sta. Ma se gli imprimiamo una velocità iniziale \mathbf{v}_0 esso, in assenza di attriti, conserva la velocità \mathbf{v}_0 .

Pertanto, inteso l'equilibrio come mantenimento della quiete, siamo in grado di enunciare:

■ *condizione caratteristica, e cioè necessaria e sufficiente, per l'equilibrio del punto materiale libero è che sia nulla la risultante di tutte le forze agenti sul punto:*

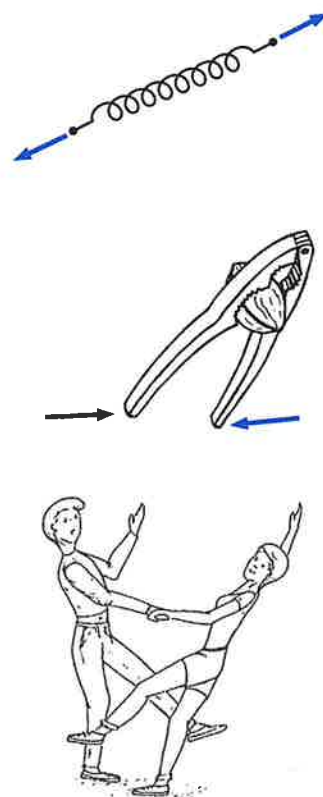


Figura 2.18

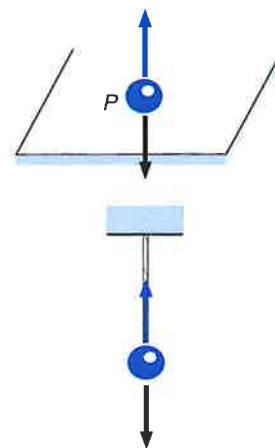


Figura 2.19

$$\mathbf{R} = 0. \quad (2.12)$$

La condizione è *sufficiente*. Infatti se la (2.12) è soddisfatta il principio d'inerzia assicura che la quiete, se a un istante c'è, viene mantenuta.

La condizione è anche *necessaria*. Infatti, se la (2.12) non fosse soddisfatta, il punto, per la seconda legge di Newton, sarebbe dotato di accelerazione.

La (2.12) è un'equazione vettoriale equivalente a un sistema di tre equazioni scalari, che in coordinate cartesiane ortogonali si scrive:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

e che si riduce a un sistema di due equazioni nel caso piano.

La (2.12), o le equivalenti (2.13), risolvono anche i problemi di equilibrio del punto vincolato, se "ben posti".

Quel che debba intendersi per problema "ben posto" si chiarirà man mano. Certamente, essendo tre le equazioni (2.13) (due nel caso piano), tre saranno le incognite (due nel caso piano) il cui valore esse permettono di calcolare. Quali siano le incognite e, più in generale, quale sia l'uso delle (2.13) son questioni che dipendono dalle condizioni di vincolo. È ben comprensibile infatti la diversità fra problemi in cui i vincoli garantiscano a priori l'immobilità del punto materiale così che impareremo a distinguere in isostatici e iperstatici, e quelli in cui al punto siano concesse libertà di spostamenti, che distingueremo in ipostatici e labili.

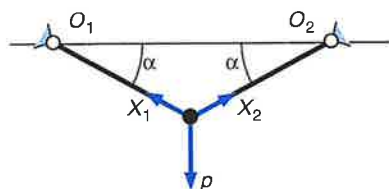


Figura 2.20

Esempio 2.1 Il caso isostatico

Si consideri un punto materiale di peso p vincolato con due bielle nel piano, di lunghezze eguali fra loro, e ugualmente inclinate di un angolo α sull'orizzontale (Figura 2.20). Quali sono le condizioni d'equilibrio?

L'equilibrio è assicurato dai due vincoli. Le (2.12) vanno usate come condizione necessaria. Le incognite sono le due reazioni vincolari X_1 e X_2 esercitate dalle due bielle. Le (2.12) sono in questo caso.

$$X_1 \cos \alpha = X_2 \cos \alpha \quad X_1 = X_2$$

$$X_1 \sin \alpha + X_2 \sin \alpha = p \quad X_1 = X_2 = \frac{p}{2 \sin \alpha}$$

Il risultato mostra che

- le due reazioni sono uguali fra loro, affermazione che si poteva addirittura anticipare per motivi di simmetria (omettendo la prima equazione);
- il valore di X dipende dall'inclinazione α e aumenta al diminuire di α ;
- il valore di X è indeterminato per $\alpha = 0$ e questo è un caso di problema non "ben posto" (caso non isostatico) come si intuisce e come ampiamente commenteremo nel Capitolo 4.

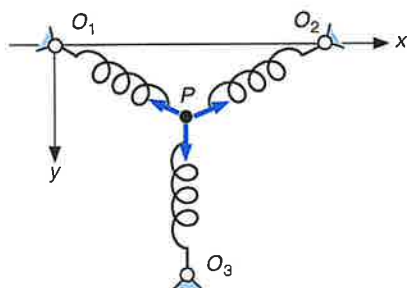


Figura 2.21

Esempio 2.2 Punto libero nel piano

Si cerchi la situazione equilibrata di un punto P soggetto, in un piano orizzontale, all'attrazione verso tre punti fissi $O_1 O_2 O_3$ dovuta a tre molle di ugual rigidezza k ; $O_1 O_2 O_3$ abbiano coordinate $(0,0)$ $(L, 0)$ $(L/2, h)$ nel sistema di riferimento della Figura 2.21.

(2.12)

cizio d'inerzia

e soddisfatta, il
zione.

li tre equazioni

In questo esempio le condizioni di equilibrio non sono assicurate in partenza. Il punto è libero di spostarsi. Le (2.12) vanno usate come condizioni sufficienti. Le incognite sono le coordinate del punto P in condizioni di equilibrio. Indicando con xy tali coordinate di P le (2.12) divengono

$$\begin{cases} kx = k(L - x) \\ 2ky = k(h - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{L}{2} \\ y &= \frac{h}{3} \end{aligned}$$

(2.13)

Il risultato mostra che il baricentro geometrico del triangolo $O_1 O_2 O_3$ è posizione di equilibrio.

Se le molle avessero rispettivamente rigidità $k_1 k_2 k_3$ le (2.12) diverrebbero

$$\begin{cases} k_1 x = k_2 (L - x) + k_3 \left(\frac{L}{2} - x \right) \\ k_1 y + k_2 y = k_3 (h - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{k_2 L + k_3 \frac{L}{2}}{k_1 + k_2 + k_3} \\ y &= \frac{k_3 h}{k_1 + k_2 + k_3} \end{aligned}$$

li equilibrio del

rirà man mano.

, tre saranno le

alcolare. Quali

n questioni che

la diversità fra

unto materiale

i in cui al punto

atici e labili.

le nel piano, di

sull'orizzontale

ome condizione

citate dalle due

La soluzione precedente vi è contenuta come caso particolare per $k_1 = k_2 = k_3$. ■

Si noti che anche con coefficienti di rigidità diversi fra loro la soluzione è baricentro del triangolo $O_1 O_2 O_3$ in cui siano concentrate masse proporzionali a $k_1 k_2 k_3$ (vedi Capitolo 3). Tale risultato resta valido anche se i punti fissi $O_1 O_2 O_3$ formano un triangolo qualunque (non isoscele come nell'esempio proposto). Il lettore provi a verificarlo.

Esempio 2.3 Il caso ipostatico

Un punto di peso p è appoggiato su di una guida fissa liscia inclinata di α sull'orizzontale (Figura 2.22). Quale forza F , tangente alla guida, occorre applicare per l'equilibrio del punto?

Delle due equazioni (2.13) (due perché il problema è piano) una sola è condizione caratteristica per l'equilibrio, quella nella direzione della guida: in tale direzione il vincolo non può intervenire in aiuto dell'equilibrio (caso ipostatico). La (2.13) proiettata nella direzione della guida è un'equazione pura, cioè un'equazione in cui non compaiono reazioni vincolari. È l'equazione sufficiente a garantire l'equilibrio. Essa afferma che deve essere

$$F = p \sin \alpha$$

Con questo valore di F l'equilibrio è soddisfatto.

L'altra equazione del sistema (2.13) serve a calcolare la reazione vincolare X che necessariamente viene a essere:

$$X = p \cos \alpha. \quad \blacksquare$$

Tutti e tre i problemi ora risolti fruiscono del sistema di equazioni (2.13), ma in modi fra loro diversi.

I tre problemi costituiscono esempi di tre categorie generali di problemi i quali così possono enunciarsi (anche per strutture complesse le cui equazioni di equilibrio siano più di tre):

- 1) i vincoli tolgono ogni possibilità di spostamento cosicché le equazioni di equilibrio sono necessariamente soddisfatte (Esempio 1) ed esse consentono (tutte assieme) di calcolare le reazioni vincolari (se non sono "sovrabbondanti");

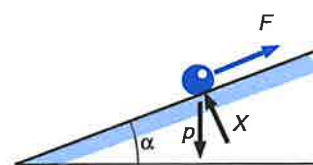


Figura 2.22

- 2) non sussistono vincoli, cosicché ogni spostamento è possibile ma le equazioni di equilibrio (tutte assieme) sono *sufficienti* a ricercare la situazione equilibrata (eventualmente più d'una);
- 3) i vincoli tolgono qualche (ma non tutte le) possibilità di spostamento e sussistono allora un certo numero di equazioni pure che sono sufficienti a ricercare la situazione equilibrata (eventualmente più d'una), restando poi le rimanenti equazioni per determinare le reazioni vincolari (se i vincoli sono "ben messi" e non "sovrabbondanti").

Sarà bene tener presenti queste tre categorie di problemi: esse si presenteranno anche per strutture complesse.

Nel primo caso i vincoli garantiscono l'equilibrio; negli altri due l'equilibrio sussiste solo a certe condizioni che, se non fossero soddisfatte, darebbero luogo a situazioni dinamiche.

2.13 Dinamica del punto

Nonostante le questioni dinamiche esulino dagli interessi di questo libro ci sembra significativo introdurre qualche argomento in proposito. E ciò in quanto dal punto di vista concettuale, i fondamenti della Dinamica sono strettamente legati a quelli della Statica, come già siam venuti delineando, ed entrambi gli aspetti della Meccanica (Statica e Dinamica) possono essere formulati unitariamente nel principio di d'Alambert* (1717-1783) in una forma elegantissima che non può non interessare lo studente:

■ le equazioni della Statica valgono anche in Dinamica pur di sostituire alle forze attive esterne \mathbf{F} le cosiddette *forze perdute* $\mathbf{F} - m\mathbf{a}$.**

Il principio, immediatamente verificato nella (2.9), è, vorremmo dire sorprendentemente, di validità generale. Ne faremo uso nel Paragrafo 5.14.

Occorre anche segnalare che la verifica statica di una struttura non è sufficiente qualora la sollecitazione attiva comprenda vibrazioni, azioni sismiche, azioni aerodinamiche particolarmente amplificate dalla geometria della struttura. Sembra allora opportuno introdurre il lettore che vorrà studiare la Dinamica delle Costruzioni alle prime argomentazioni di passaggio dalla Statica alla Dinamica.

Infine segnaliamo un argomento che, pur riguardando l'equilibrio di una struttura, non può essere compiutamente affrontato prescindendo dalla Dinamica: la stabilità dell'equilibrio. A esso dedicheremo qualche cenno introduttivo al Capitolo 9.

Quando sul punto agiscono forze con risultante diversa da zero oppure quando, pur essendo $\mathbf{R} = 0$, al punto viene impressa una velocità iniziale \mathbf{v}_0 , il punto non sta in quiete.

Integrando due volte rispetto al tempo l'equazione fondamentale della dinamica (2.9) si ottiene l'*equazione del moto*. Ma tale integrazione esige la conoscenza delle condizioni iniziali (posizione e velocità iniziale).

Esempio 2.4 Moto di un punto soggetto a forze con $\mathbf{R} = 0$

Nell'Esempio 2.3 del paragrafo precedente, applicata la forza $F = p \sin \alpha$ (che garantiva l'equilibrio) si imprime la velocità \mathbf{v}_0 e sia h la quota della posizione iniziale (Figura 2.23).

* Jean Baptist Le Rond, fisico, matematico, filosofo, detto d'Alambert, abbandonato alla nascita sui gradini della chiesa Saint-Jean Le Rond.

** Si dicono perdute, nei confronti del moto, in quanto vanno a equilibrare i vincoli.

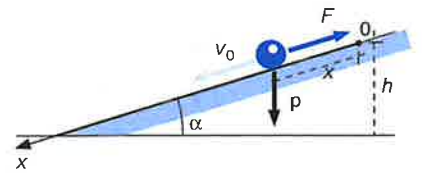


Figura 2.23

L'equazione della dinamica coincide con l'equazione di equilibrio, ma a essa vanno affiancate le condizioni iniziali, che non sono ora di quiete.

Per quanto già sappiamo del principio di relatività galileiano possiamo dire che il moto è rettilineo uniforme. Vediamolo tuttavia eseguendo l'integrazione con le assegnate condizioni iniziali, assumendo direzione e verso dell'asse x coincidenti con quelli della velocità iniziale e l'origine coincidente con la posizione iniziale.

Equazione differenziale

Condizioni iniziali

$$m\ddot{x} = 0$$

$$x = 0$$

per $t = 0$

$$\dot{x} = v_0$$

Integrando si ottiene

$$\dot{x} = v_0 \quad \Rightarrow \quad x = v_0 t$$

che è l'equazione del *moto rettilineo uniforme*.

La soluzione fornisce ogni altra informazione sul moto. Possiamo chiedere per esempio dopo quanto tempo il punto raggiunge il suolo. Poiché esso è raggiunto dopo un percorso $x = h/\sin\alpha$, sostituendo tale valore nell'equazione del moto, si ha che il tempo impiegato è $t = h/v_0 \sin\alpha$ ed è ovviamente tanto minore quanto maggiore è v_0 e l'inclinazione α , mentre cresce con la quota di partenza.

La reazione vincolare è ancora $mg \cos\alpha$, e in entrambe le direzioni normali all'asse x c'è equilibrio (mantenimento della quiete). ■

Esempio 2.5 Moto di un grave sul piano inclinato

Come secondo esempio di dinamica, lasciamo ora liberamente cadere il grave lungo il piano inclinato: $v_0 = 0$ ed $F = 0$.

Il moto avviene lungo la retta del piano contenuto nel piano verticale (che assumiamo come asse x) passante per la posizione iniziale (che assumiamo come origine); nelle altre due direzioni normali a x c'è equilibrio.

Equazione differenziale

Condizioni iniziali

$$m\ddot{x} = mg \sin\alpha$$

$$x = 0$$

per $t = 0$

$$\dot{x} = 0$$

Integrando si ottiene

$$\dot{x} = g \sin\alpha t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} g \sin\alpha t^2$$

Il moto è ora uniformemente accelerato. Il tempo per raggiungere il suolo si ottiene da

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} g \sin\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\sin\alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e la velocità con cui raggiunge il suolo è

$$\dot{x} = \sqrt{2gh}.$$

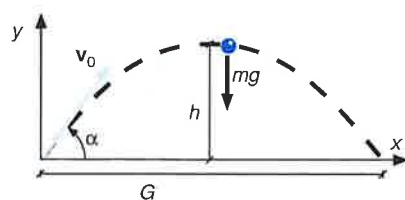


Figura 2.24

Esempio 2.6 Il moto di un grave

Vediamo ora il moto di un punto soggetto solo al suo peso, libero da vincoli, con assegnata velocità iniziale v_0 .

Il moto è contenuto nel piano verticale contenente v_0 , (che assumiamo come piano xy) mentre nella direzione a esso perpendicolare sussiste l'equilibrio. Sia α l'inclinazione di v_0 sull'asse orizzontale x e l'origine degli assi coincidente con la posizione iniziale (Figura 2.24).

Equazioni differenziali

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$$

Condizioni iniziali

$$\text{per } t = 0 \quad \begin{cases} x = y = 0 \\ \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Integrando si ha

$$\begin{cases} \dot{y} = v_0 \sin \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = v_0 \sin \alpha t \\ y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

Il moto ha quindi componente orizzontale uniforme e componente verticale uniformemente accelerata.

Eliminando t fra le due equazioni scalari di moto si ottiene la geometria del movimento: la traiettoria. Essa è la ben nota parabola

$$y = \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + x \tan \alpha$$

Vi si possono leggere le caratteristiche geometriche della traiettoria. Interessanti sono la gittata G e la massima quota raggiunta h .

Esse rispettivamente hanno valore:

$$G = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \quad h = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha$$

che si trovano rispettivamente come seconda intersezione della parabola con l'asse x e come ordinata del vertice; in questo punto si vede facilmente che è $y = 0$ perché la componente verticale del moto si inverte. ■

Esempio 2.7 L'orbita di un satellite

Il punto abbia ora la massa m di un satellite messo in orbita con velocità v_0 .

La forza cui il punto è soggetto è il "peso", che va ora inteso come campo gravitazionale non uniforme. Il moto è quindi centrale (vedi Appendice C) con centro nel punto O in cui può considerarsi concentrata la massa M della Terra. Il moto pertanto avviene in un piano con velocità areolare costante: il punto procede più velocemente in vicinanza di O , più lentamente in lontananza in modo che aree uguali siano percorse in tempi uguali. Tenendo presente la formula di Binet per l'accelerazione radiale, l'equazione fondamentale della Dinamica, in coordinate polari, si può scrivere

$$F_p = ma_p \quad \frac{kMm}{\rho^2} = \frac{mc^2}{\rho^2} \frac{d}{d\theta^2} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \quad (2.14)$$

È possibile integrare la (2.14) ed esprimere il suo integrale generale come

$$\rho = \frac{P}{1 + e \cos(\theta - \gamma)} \quad (2.15)$$

La (2.15) è l'espressione generale di una conica; dunque possiamo concludere che una massa puntiforme in un campo gravitazionale descrive sempre una conica. Se la conica sia ellisse o parabola o iperbole dipende dalle condizioni iniziali; esse sono contenute nel parametro e , che è l'eccentricità della conica, e nel parametro γ .

Quanto detto non cambia se al posto del satellite pensiamo al pianeta Terra (o ad altro pianeta di un sistema solare) immesso nella sua orbita con velocità v_0 all'inizio della sua storia.

Come si accennava all'inizio di questo capitolo, anche le osservazioni di Keplero avevano condotto a ritenere che i pianeti descrivessero ellissi, ma il modello matematico (2.9) afferma che così deve accadere se la forza è gravitazionale, e precisa anche come la forma dell'orbita dipenda dalle condizioni iniziali; quali che siano tali condizioni in un campo gravitazionale l'orbita è comunque una conica: per velocità iniziali molto elevate l'orbita sarebbe divergente, del tipo parabolico o iperbolico.

Grazie alla (2.9) si potrebbe per esempio decidere con quale velocità lanciare un grave dalla Terra affinché non vi torni: l'orbita dovrebbe essere parabolica: la velocità corrispondente si dice *velocità di fuga*. Essa risulta essere di 11 180 m/sec (prescindendo dalla resistenza dell'aria). Per velocità iniziali molto minori il moto, ellittico, è ben approssimato dal moto parabolico del campo gravitazionale uniforme perché, per "piccole" velocità (e quindi per "piccole" gittate), si può ben prescindere dalla convergenza delle verticali.

Esempio 2.8 L'oscillatore semplice

Il punto P di massa m sia appoggiato a un piano orizzontale e soggetto a una forza elastica, con coefficiente di rigidità k (Figura 2.25a). È l'oscillatore semplice. Esso costituisce il più elementare modello di un piano di edificio soggetto a vibrazioni.

Il moto è centrale e, se la velocità iniziale è diretta come la molla, il moto è rettilineo, oscillatorio.

Assunto l'asse del moto come asse x l'equazione fondamentale della Dinamica è

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.16)$$

che integrata dà luogo al *moto armonico* (si veda Appendice B)

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (2.17)$$

essendo $\omega^2 = k/m$; A e α sono le costanti di integrazione che si determinano conoscendo le condizioni iniziali: A è l'ampiezza dell'oscillazione e α è la fase iniziale. Se il punto non è vincolato e se la velocità iniziale non è diretta come la molla, il moto è ancora centrale e risulta essere la composizione di due moti armonici; la traiettoria è un'ellisse.

Se il punto P è appeso alla molla il moto risulta ancora essere armonico attorno alla posizione equilibrata (Figura 2.25b) lungo la verticale (sempre che la velocità iniziale sia verticale).

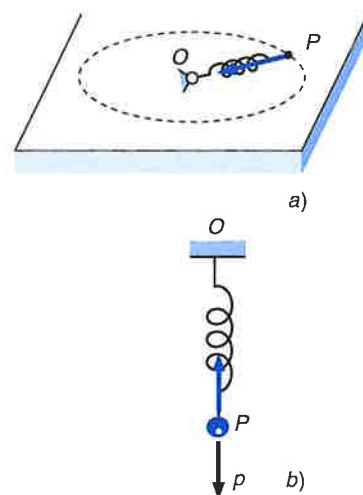


Figura 2.25

2.14 Lavoro ed energia

Un altro importantissimo concetto di cui vedremo la ricchezza applicativa è il concetto di *lavoro*.

Si dice che una forza compie lavoro quando, per un motivo qualunque, il suo punto di applicazione si sposta.

Per forze che si mantengono vettorialmente costanti durante lo spostamento, il lavoro si definisce come prodotto scalare della forza per lo spostamento $P' - P$ del suo punto di applicazione

$$L = \mathbf{F} \times (P' - P). \quad (2.18)$$

Il lavoro risulta positivo se l'angolo fra forza e spostamento è acuto e in tal caso si dice *lavoro motore*; risulta negativo se l'angolo è ottuso e in tal caso si dice *lavoro resistente*. Il lavoro è nullo se forza e spostamento sono fra loro ortogonali.

Se però la forza \mathbf{F} non si mantiene vettorialmente costante la (2.18) non è più definizione adeguata. Bisogna definire il *lavoro elementare* dL , cioè il lavoro infinitesimo che la forza compie per uno spostamento elementare dP (vedi Appendice B) del suo punto di applicazione (Figura 2.21):

$$dL = \mathbf{F} \times dP. \quad (2.19)$$

Il lavoro finito L che la forza compie mentre il punto di applicazione P si sposta da A a B lungo la linea l è dato dall'integrale di linea

$$L = \int_l \mathbf{F} \times dP. \quad (2.20)$$

Con riferimento alle coordinate cartesiane la (2.20) assume la forma

$$L = \int_l F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (2.21)$$

Il lavoro di un sistema di forze è semplicemente la somma dei singoli lavori.

La (2.20) (o la (2.21)) mostra che il lavoro di una forza dipende dal cammino l che il punto d'applicazione percorre e può, a tratti, essere positivo (Figura 2.26a) oppure negativo (Figura 2.26b).

Accade tuttavia che particolari forze posizionali $\mathbf{F}(P)$ compiano lavoro, quando si spostano, che dipende solo dagli estremi A e B del percorso e non dal particolare cammino che li unisce. Tali forze si dicono forze *conservative*.

La condizione analitica affinché un campo di forze $\mathbf{F}(P)$ sia conservativo è che sussista una funzione scalare del posto $V(P)$ tale che sia, per un riferimento cartesiano,

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.22)$$

In tal caso infatti la forma differenziale che compare sotto il segno integrale nella (2.21) diviene un differenziale esatto, il differenziale della funzione $-V$, ed è perciò

$$L = \int_l -dV = V_A - V_B. \quad (2.23)$$

e quindi il lavoro non dipende dal cammino percorso ma solo dalle posizioni iniziale e finale.

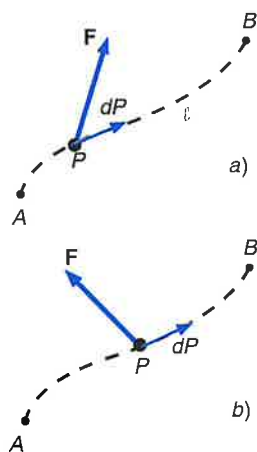


Figura 2.26

Alla fine di un circuito chiuso percorso dal punto di applicazione della forza il lavoro compiuto è nullo. In formula ciò si esprime

$$\oint dL = 0. \quad (2.24)$$

La funzione scalare del posto $V(P)$ che, come mostra la (2.23), decresce se il lavoro fatto è positivo (e cresce se il lavoro è negativo) ha un preciso significato fisico: è l'*energia potenziale*. Essa è per così dire una attitudine a compiere lavoro che le forze hanno, se conservative, a seconda della posizione in cui si trovano.

Il concetto è ben familiare per i due casi ben noti di forze che abbiamo analizzato e che ora riscontriamo essere forze conservative: la *forza peso* e la *forza elastica*.

È ben convincente, anche da un punto di vista puramente intuitivo, che un peso abbia maggior attitudine a compiere lavoro positivo quanto più in alto si trovi e una forza elastica quanto più la molla sia tesa. In termini analitici, con sistema di riferimento cartesiano come nella Figura 2.27, le (2.22) sono soddisfatte dalle semplici funzioni

$$V = py \quad (2.25)$$

$$V = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.25')$$

Esse sono rispettivamente l'energia potenziale di un campo gravitazionale uniforme e l'energia potenziale elastica (che nel caso più generale, a tre dimensioni, si esprime $V = 1/2 k|P-O|^2$, anche se il punto O non è fisso). Esse sono definite a meno di una costante additiva: sono i loro incrementi ad avere significato fisico e non i loro valori. Per questo motivo si dice che l'energia potenziale è un indice di stato e non una funzione di stato.

Esempio 2.9 Il problema dell'alpinista

Possiamo ora risolvere il dilemma dell'alpinista di Figura 2.28.

Si tolga illusioni: qualunque sia il cammino scelto, il lavoro che dovrà compiere (meglio: che la sua forza peso p dovrà compiere) è: in salita, per raggiungere la vetta di quota h , $-ph$; in discesa, ph . Cosicché alla fine il lavoro compiuto sarà nullo come sempre accade, in un campo conservativo. ■

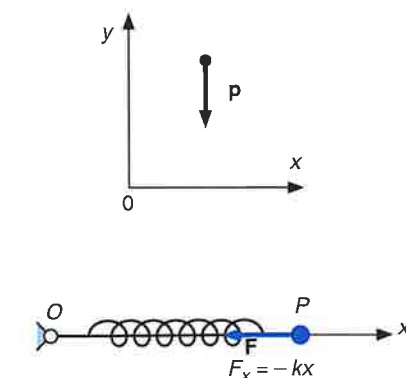


Figura 2.27

Figura 2.28