

Il diagramma delle azioni assiali è pertanto

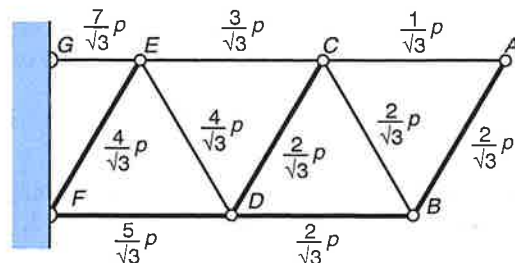


Figura 3.73c

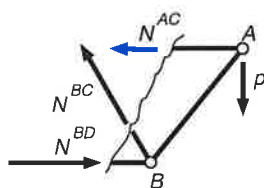


Figura 3.74

Commento: altri metodi di soluzione possono essere usati. In particolare si ricorda il metodo delle sezioni di Ritter (Figura 3.74). Esprime l'annullarsi del momento ai nodi delle forze agenti su una parte della travatura ottenuta con una sezione (di Ritter, appunto) per cui una sola asta non converga in quel nodo cosicché la sua azione assiale è l'unica incognita nell'equazione.

$$[M_B = 0] \Rightarrow N^{AC}$$

3.14 L'equilibrio difficile delle strutture ipostatiche

Le strutture ipostatiche sono strutture in cui i vincoli consentono una o più componenti di spostamento rigido (indipendente cioè dalla eventuale deformazione della struttura), e quindi possono assumere più configurazioni. La trattazione è rimandata al Capitolo 4 (in particolare Paragrafo 4.12); diamone ora qualche anticipazione a livello discorsivo.

In tali strutture l'equilibrio è possibile, in una certa configurazione, solo per particolari sistemi di forze attive (vedi Paragrafo 4.12).

Cosa significa questo in termini analitici? Vediamolo su una semplice e tipica struttura ipostatica: una trave su due appoggi scorrevoli (Figura 3.75).



Figura 3.75

Questa trave, per come sono posizionati i carrelli, può traslare liberamente nella direzione orizzontale x : è evidente che, in qualunque possibile configurazione, una eventuale forza attiva orizzontale romperebbe l'equilibrio. Pertanto l'equilibrio può sussistere solo se le forze attive, nel complesso, hanno componente orizzontale nulla.

Esiste quindi, per questa trave una volta ipostatica, una condizione sulle forze attive necessaria per l'esistenza dell'equilibrio.

Quanto affermato ha un preciso riscontro analitico: le 3 equazioni cardinali (3.21), che devono essere verificate per l'equilibrio in qualunque configurazione, contengono solo 2 forze incognite (la trave ha solo 2 vincoli semplici), quindi la soluzione è possibile solo se ognuna delle 3 equazioni è compatibile con le altre 2 (infatti ne basterebbero 2 per definire i valori delle incognite). Vediamolo in modo esplicito; le (3.21) diventano (Figura 3.76):

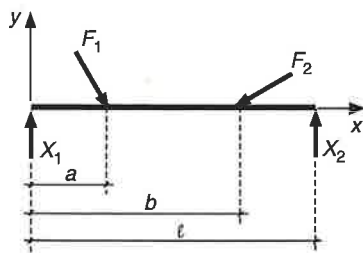


Figura 3.76

$$F_{1,x} - F_{2,x} = 0$$

$$X_1 + X_2 - F_{1,y} - F_{2,y} = 0$$

$$lX_2 - aF_{1,y} - bF_{2,y} = 0$$

In questo caso la condizione necessaria per l'equilibrio è facilmente individuabile: la prima equazione deve essere identicamente soddisfatta: richiede che le componenti orizzontali delle forze attive siano o singolarmente nulle (forze entrambe verticali), oppure uguali e opposte: questa equazione è detta *equazione pura*, in quanto non contiene forze reattive.

più in generale, in una struttura n volte ipostatica esistono n equazioni pure, necessarie per l'esistenza dell'equilibrio in una possibile configurazione.

Vediamo ancora un altro esempio tipico: un'asta rettilinea vincolata a un estremo con una cerniera e libera all'altro (Figura 3.77). Si tratta di una struttura 1 volta ipostatica: l'asta può ruotare liberamente intorno alla cerniera, perciò in qualunque configurazione, definita dall'angolo α , può esserci equilibrio solo se il momento delle forze attive intorno alla cerniera è nullo.

Se per esempio all'estremo libero è applicata una forza verticale P (Figura 3.78), le (3.21) diventano:

$$X_1 = 0$$

$$X_2 - P = 0$$

$$P l \cos \alpha = 0$$

L'equazione pura dice che, con la forza verticale P , può esserci equilibrio solo nelle due configurazioni geometriche in cui è $\cos \alpha = 0$ (Figura 3.79): per la differenza tra le due configurazioni si veda il Capitolo 9.

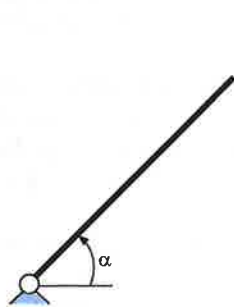


Figura 3.77

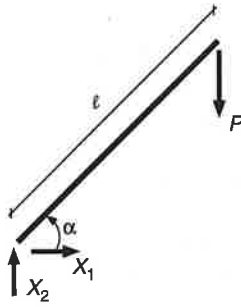


Figura 3.78

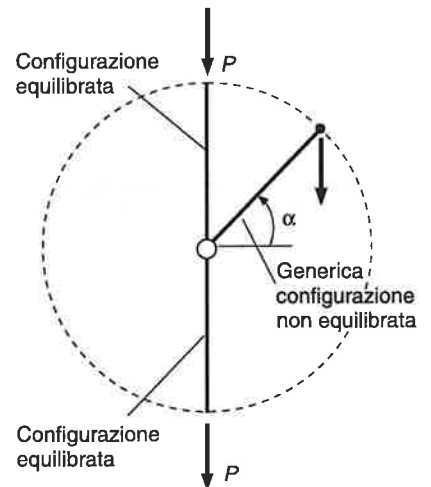


Figura 3.79

In un'altra qualsiasi configurazione con l'asta inclinata l'equilibrio è possibile solo se anche la forza attiva P ha la stessa inclinazione (Figura 3.80).

Nella realtà esistono non poche strutture ipostatiche, anche se spesso sono strutture particolari: esempi tipici sono le carrozze di un treno, i ponti levatoio, le passerelle scorrevoli, le gru ecc.

Per esempio il ponte levatoio (peso p , lunghezza l , contrappeso q) di Figura 3.81 sta in equilibrio in posizione orizzontale solo se l'equazione pura

$$[M_O = 0] \quad q \sin \alpha l = p l / 2$$

è soddisfatta.

Se ciò accade le altre due EC ($\mathbf{R} = 0$) servono (condizioni necessarie) a calcolare le reazioni vincolari in O .

Spesso però è nella schematizzazione della realtà che ci imbattiamo in tali strutture; tipico esempio può essere quello delle travi di un vecchio edificio in legno e muratura, nelle quali l'equilibrio alle forze orizzontali, tenute erroneamente in poco conto nell'antichità, era affidato all'attrito e alla resistenza minima del paramento di muro (Figura 3.82): venute meno queste, o se nel modello le escludiamo, la trave è una struttura ipostatica che può essere in equilibrio solo con particolari sistemi di forze.

È anche da dire che nell'analisi strutturale in alcuni casi facciamo riferimento a schemi ipostatici solo per semplicità di trattazione; per esempio, una trave

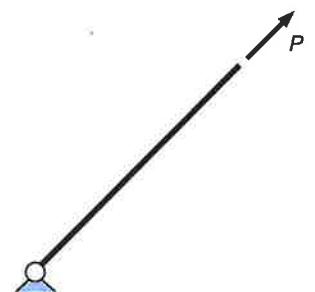


Figura 3.80

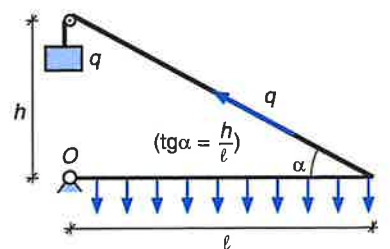
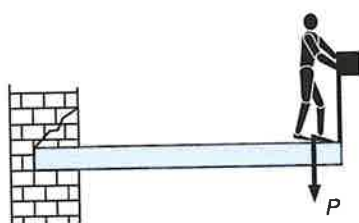
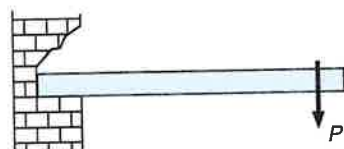


Figura 3.81



Isostatica ancora in equilibrio



Ipostatica non più in equilibrio

Figura 3.82



Isostatica

Figura 3.83

incernierata a un estremo e appoggiata all'altro e soggetta solo a forze verticali la schematizziamo come appoggiata in entrambi i punti (Figura 3.83): sappiamo già che la reazione orizzontale della cerniera è nulla.

Altro esempio può essere il muro di sostegno di un terrapieno o di una diga, dimensionato "a gravità" (vedi Problema 29). Se siamo sicuri di poter contare sull'attrito per l'equilibrio orizzontale e sulla resistenza del terreno per l'equilibrio verticale, possiamo schematizzare la struttura come incernierata in O , punto intorno al quale il muro potrebbe ribaltarsi per effetto della spinta S , del terreno o dell'acqua: l'equilibrio si ha se il momento "ribaltante" di S e il momento "stabilizzante" dei pesi si eguagliano (naturalmente in sicurezza il momento stabilizzante deve essere superiore al ribaltante secondo un coefficiente di sicurezza fissato allo scopo).

3.15 Strutture isostatiche e strutture iperstatiche: perché?

Alle strutture isostatiche e alle strutture iperstatiche, che saranno definite con precisione nei prossimi capitoli, è volto il maggior interesse in quanto equilibrate per qualunque sollecitazione.

Le strutture isostatiche si dicono anche *staticamente determinate* in quanto le sole equazioni di equilibrio sono sufficienti a determinare RV e AI nell'ipotesi semplificatrice di componenti rigidi.

Questa ipotesi, anche se non è mai soddisfatta nella realtà fisica, è utilissima in quanto, come vedremo, su di essa è basata la possibilità, nell'analisi strutturale, di far riferimento alla geometria iniziale indeformata piuttosto che a quella finale deformata, e quindi incognita, della struttura, sia essa isostatica che iperstatica (vedi Paragrafo 4.1).

Le strutture isostatiche rivestono inoltre un interesse in sé. Come tali sono volutamente progettate strutture che debbono ad esempio sopportare piccoli cedimenti dei vincoli esterni. Le strutture isostatiche infatti mantengono inalterato anche in tal caso l'equilibrio e lo stato di sforzo interno (vedi per esempio Paragrafo 6.8).

Le strutture iperstatiche si dicono anche *staticamente indeterminate* in quanto per esse i vincoli sono "sovrabbondanti" e perciò le sole equazioni di equilibrio non sono sufficienti a determinare RV e AI; per queste strutture è necessario introdurre anche equazioni che ne coinvolgono la deformabilità (vedi Capitolo 7).

Le strutture in realtà sono spesso iperstatiche, sia perché la perdita di efficacia di un vincolo non ne pregiudica l'equilibrio, come nelle isostatiche, sia per ovvi motivi di resistenza (Figura 3.84).



Iperstatica

Figura 3.84

Riassumendo: in questo capitolo, allo scopo di familiarizzare lo studente con la ricerca delle RV e delle AI, si sono analizzate semplici strutture soggette a forze concentrate, il che non richiede l'uso dell'Analisi infinitesimale.

Le dizioni ipostatico, labile, isostatico, iperstatico si sono introdotte in modo intuitivo e saranno analizzate con precisione solo nei prossimi capitoli.

Il problema geometrico e il problema statico 4

In questo capitolo

- si affrontano i problemi già introdotti in modo elementare nel capitolo precedente, ora riproposti da un punto di vista più analitico e generale;
- si definiscono i concetti di configurazione, gradi di libertà, coordinate libere, spostamento, spostamento virtuale, atto di moto;
- si analizza in particolare lo spostamento virtuale di una struttura piana composta da elementi rigidi variamente vincolati fra loro e all'ambiente esterno (analisi cinematica);
- si enuncia il principio dei lavori virtuali commentandone la generalità e la flessibilità ed esplicitandone l'uso per strutture piane nelle varie condizioni di vincolo;
- si ritrovano, come caso particolare, le equazioni cardinali della Statica.

4.1 Le strutture reali e i sistemi materiali della Meccanica. Configurazione e spostamento

Come si è già avuto occasione di dire, qualunque assemblaggio di materiali, atto a sostenere carichi (non solo verticali, naturalmente), è una *struttura*. La Meccanica la "traduce" in *sistema materiale*.

Secondo la Meccanica Newtoniana un sistema materiale consiste in un insieme di punti dotati di massa, nel senso introdotto al Paragrafo 2.3. Tali punti possono formare un discreto o un continuo e costituiscono un modello della struttura reale. La geometria del sistema materiale è detta *configurazione del sistema*.

La *configurazione di un sistema materiale* consiste nell'insieme delle coordinate di tutti i suoi punti (in un dato sistema di riferimento).

Preliminarmente occorre definire *tutte* le possibili configurazioni che il sistema potrebbe assumere, indipendentemente dalle forze che il sistema sarà effettivamente chiamato a sopportare. Ciò equivale (ce ne convinceremo man mano) a definire l'insieme di tutti i possibili *spostamenti* dei punti del sistema da una configurazione a a una qualsiasi altra a' (Figura 4.1). *Spostamento del sistema o campo degli spostamenti* $s(P)$ è l'insieme di tutti i possibili spostamenti $P' - P$ dei punti P .

L'impresa di definire ogni possibile configurazione e ogni possibile spostamento del sistema può sembrar disperata, e lo sarebbe, se non si definisse una qualche legge che regoli lo spostamento del sistema, precisandone il tipo di *deformabilità*. Accade infatti che nessun materiale sia completamente incoerente, dimodoché gli spostamenti dei vari punti si influenzano a vicenda. Il tipo di

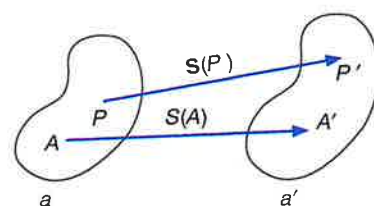


Figura 4.1

deformabilità geometrica dipende dal comportamento fisico del materiale di cui la struttura è composta. Esso viene modellato secondo alcuni schemi notevoli: si parlerà di grandi deformazioni, di deformazioni infinitesime, di deformabilità elastica, plastica, viscosa ...

L'analisi di questi spostamenti è in generale non semplice e comporta, come ogni modellazione teorica, una qualche schematizzazione del comportamento reale. E tale schematizzazione non è neppure univoca: essa può essere più o meno spinta a seconda delle grandezze che si vogliono calcolare o dei problemi che si vogliono risolvere.

In particolare, per la verifica dell'equilibrio, una struttura può a volte essere pensata come un corpo rigido o come un insieme di corpi rigidi vincolati fra loro. Fra i vari tipi di deformabilità andrà perciò anche analizzato quel particolarissimo caso che consiste nell'assenza di deformabilità, cui stiamo volgendo ora la nostra attenzione.

D'altronde la rigidità può essere immaginata come un caso limite di deformabilità.

Si diceva infatti che nessun materiale è completamente incoerente, il che significa che fra le particelle del materiale si esercita una qualche forza di connessione, o perlomeno così è ragionevole ipotizzare. Un possibile modello, nel caso di deformabilità elastica, è schematicamente rappresentato nella Figura 4.2. Le varie coppie di punti si scambiano forze elastiche; le mutue distanze fra punti possono variare e il sistema è deformabile elasticamente.

Si pensi ora che le forze di connessione fra le particelle siano realizzate da molle pochissimo deformabili; al limite queste molle possono essere pensate come "aste ideali" di massa trascurabile e di lunghezza invariabile; le mutue distanze fra punti non possono più variare e il sistema è diventato rigido.

D'altronde lo schema del corpo rigido è, come si vedrà, schema essenziale anche per l'analisi statica delle strutture reali, che rigide non sono mai. L'ipotesi di rigidità riduce drasticamente la difficoltà di descrivere la configurazione del sistema o il suo spostamento da una configurazione a un'altra.

Accade infatti, come ora vedremo, che le posizioni degli infiniti punti che compongono un corpo rigido o più corpi rigidi, variamente vincolati fra loro e all'ambiente esterno, si esprimano tutte in funzione di un numero finito di parametri geometrici indipendenti. Tali parametri bastano cioè a individuare la configurazione del sistema e si dicono *coordinate libere o lagrangiane* (c.l.). Il loro numero si dice *numero di gradi di libertà* (g.d.l.) del sistema. È un numero finito per strutture composte da elementi rigidi.

A esse rivolgiamo per ora l'attenzione. Per renderci conto di come ciò accada commentiamo dapprima intuitivamente qualche esempio, nel piano; le relative figure sono a volte già corredate dei simboli che verranno utilizzati nella trattazione successiva.

Esempio 4.1

La configurazione di una porta (Figura 4.3) è individuata da un solo angolo. Ha un g.d.l. La c.l. più spontanea è appunto un angolo, per esempio α , ma potrebbe anche essere la distanza d di un punto dalla sua posizione di chiusura o qualche altra coordinata ancora. Potrebbe anche essere un angolo diverso da α , purché compreso fra una direzione solidale con la porta e una direzione fissa. Essenziale è il fatto che una è la c.l. e uno il g.d.l.

Si noti che il sistema, dal punto di vista geometrico, è piano: un generico piano parallelo al pavimento è piano direttore (vedi Paragrafo 2.9). Sistema "equivalente" è l'asta rigida girevole attorno a un punto fisso nel piano.

Esempio 4.2

Il sistema composto da tre aste incernierate fra loro ha tre g.d.l. Occorrono due coordinate per individuare la posizione di un punto A e una coordinata, per esempio l'angolo α , per individuare l'orientamento rispetto a una direzione fissa (Figura 4.4a).

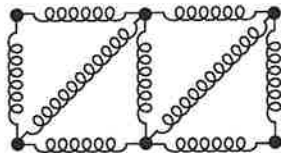


Figura 4.2

Il numero dei g.d.l. è il numero di coordinate indipendenti atte a individuare la configurazione di un sistema

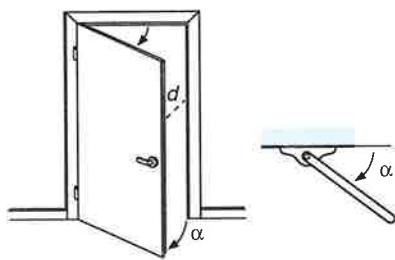


Figura 4.3

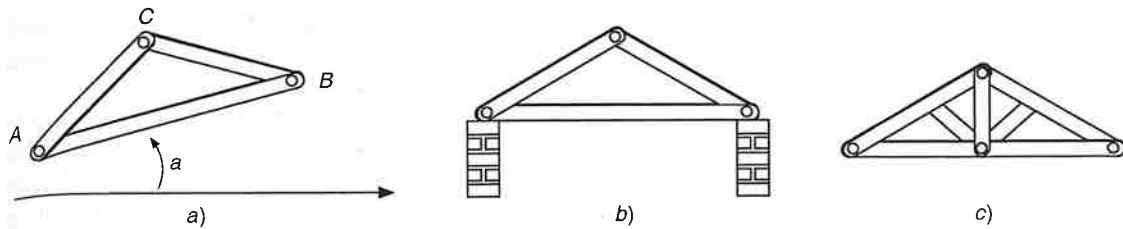


Figura 4.4

Il sistema, se fosse fissato uno dei tre elementi, non avrebbe più alcun g.d.l. Esso è la schematizzazione di un ben noto elemento strutturale: la capriata (Figura 4.4b). Prescindendo dalla deformabilità elastica si comporta come un tutt'uno rigido.

La capriata in effetti si presenta di solito con dei puntoni di rinforzo che si possono anch'essi pensare incernierati ai precedenti. La struttura è ancora, a maggior ragione possiamo dire, indeformabile e possiede ancora tre g.d.l. (Figura 4.4c).

Tre g.d.l. possiede infatti qualunque corpo rigido libero nel piano, la sua configurazione essendo ancora determinata dalla posizione di un punto A e da un angolo, per esempio α , che una direzione solidale con il corpo rigido forma con una direzione fissa (Figura 4.5).

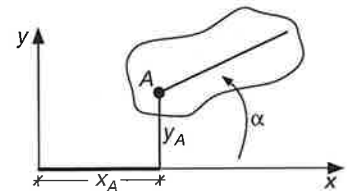


Figura 4.5

Esempio 4.3

Il sistema composto da quattro aste incernierate tra loro ha invece una deformabilità interna (Figura 4.6); diremo che è interamente ipostatico. Oltre alle tre coordinate necessarie a definire una configurazione rigida, occorre ora una quarta coordinata, per esempio l'angolo β , per individuare la configurazione propria del sistema articolato. La struttura ha quattro g.d.l. Quand'anche un suo componente rigido fosse fissato a terra, al sistema rimarrebbe un g.d.l.

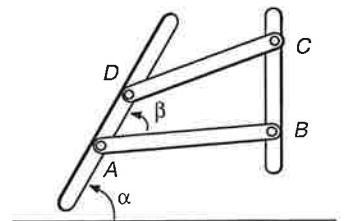


Figura 4.6

Esempio 4.4

Il portale di Figura 4.7 ha un g.d.l. e può essere visto come un quadrilatero del tipo precedente, fissatone un elemento rigido AB . Ragionando direttamente: i punti A e B sono fissati a terra dai vincoli; non occorrono coordinate per individuare le loro posizioni. Essendo però libere le rotazioni attorno a essi occorre una coordinata, per esempio l'angolo α , per individuare la configurazione del portale. Si noti che un solo angolo è sufficiente per via del collegamento fra i due montanti, realizzato dal traverso orizzontale.

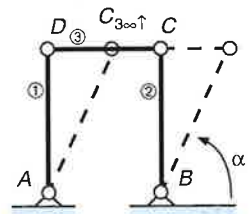


Figura 4.7

Esempio 4.5

Il portale diverrebbe a zero g.d.l. se un ulteriore traverso collegasse i due montanti come nella Figura 4.8.

Si noti però che se questo ulteriore traverso fosse anch'esso orizzontale il sistema conserverebbe un g.d.l. (Figura 4.9). In altre parole l'ulteriore vincolo di collegamento fra i due montanti sarebbe inefficace a ridurre la possibilità di spostamento del sistema.

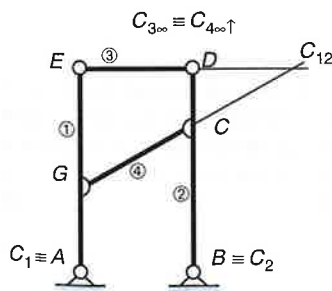


Figura 4.8

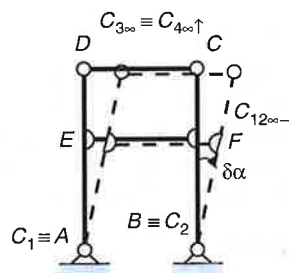


Figura 4.9

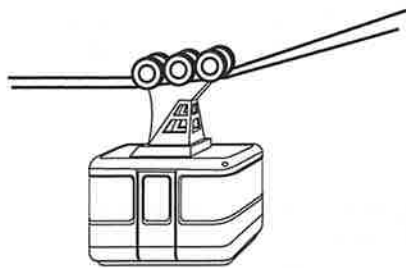


Figura 4.18



Figura 4.19

Esempio 4.13

Si pensi per esempio al sistema di Figura 4.18, che può schematizzare una cabinovia con le sue funi, portante e traente; occorre, sì, una sola ascissa per definire la posizione della cabina lungo il cavo, ma il cavo stesso è rappresentato da funzioni e non da coordinate. Si usa dire, per contrapposizione ai precedenti, che il sistema ha infiniti g.d.l. ■

Esempio 4.14

Ma anche una semplice trave, qualora non si possa prescindere dalla sua deformabilità, è un sistema con infiniti gradi di libertà (Figura 4.19). ■

Vediamo ora l'*analisi cinematica* dei sistemi olonomi, composti da elementi rigidi. Così viene comunemente chiamata l'analisi degli spostamenti possibili del sistema; essa non è la descrizione di un moto reale (vedi Appendice B).

4.2 Vincoli, gradi di libertà, analisi cinematica

Abbiamo già discorsivamente introdotto il concetto di vincolo. I vincoli sono costrizioni geometriche che limitano a priori le possibilità di spostamento del sistema e che, per riuscire (diciamo così) in tale intento, forniscono al sistema delle forze, a priori incognite, dette *reazioni vincolari*. Essi assolvono così a una funzione geometrica e a una funzione statica, che analizzeremo separatamente.

Definiamo in questo paragrafo la *funzione geometrica dei vincoli*, indipendentemente dalle forze che essi dovranno fornire alla struttura come risposta alle sollecitazioni (attive) cui la struttura è esposta.

Vincolo, e precisamente *vincolo olonomo*, è una connessione del sistema con l'ambiente esterno (vincolo esterno) o di parti del sistema fra di loro (vincolo interno) che analiticamente si esprime con qualche equazione nelle coordinate del sistema, il che fa diminuire i *gradi di libertà* (g.d.l.) del sistema, e cioè il numero delle *coordinate libere* (tipicamente lunghezze e angoli). Se al sistema vincolato restano n g.d.l., con $n \neq 0$, esso si dice *ipostatico* e la sua configurazione può variare. L'assenza di vincoli (corpo rigido libero) è un caso particolare di ipostaticità.

Se il sistema è vincolato in modo da non aver più alcun g.d.l. ($n = 0$), la sua configurazione è determinata dalle imposizioni dei vincoli e non può variare.

Le strutture con zero g.d.l. non possono essere classificate in un'unica categoria. Il loro comportamento non è univoco né dal punto di vista geometrico, né da quello statico. Esso dipende dalle condizioni dei vincoli che, tutti assieme, tolgono al sistema ogni g.d.l.: se i vincoli sono quelli "essenziali" a togliere tutti i g.d.l. e se sono "ben messi", la struttura si dice *isostatica*; il suo stato di equilibrio e le azioni interne si possono studiare nell'ipotesi di rigidità ed essa costituisce il caso di più rilevante interesse in questa trattazione. Quale sia il significato

Una struttura è isostatica se non possiede gradi di libertà e se i vincoli sono "essenziali" e "ben messi"

delle due
rito fra p

Va an
amplissim
sì, la mob
anonom
mobile fr
configura
ta: limita
occupere
Dette
ogni punt

$P =$

■ Dices
le di
con i
in cui

Lo sposta
ed è, dici
potrebbe

Coere
tico, coin
nazione s
analitica
vincoli),

Dal p
rigorosan
compatib

Il rapp
virtuale,
anch'esse
sul conge

L'insi
si dice at
moto, ch
definisco
fare, all'i

Quan
scienziat

Il rife
virtuale d
però, con
nati in un

Lo spe
di P (e

δP

* Una prec
vanno con

delle due clausole per i vincoli, che siano “essenziali” e “ben messi”, sarà chiarito fra poco.

Va anche detto che i vincoli olonomi sono una particolare, per quanto amplissima, categoria di vincoli. Altri tipi di vincolo, detti *anonomi*, limitano, sì, la mobilità del sistema, ma non ne diminuiscono i g.d.l. Un esempio di vincolo anonomo che viene spesso citato è il vincolo realizzato dallo sterzo di un'automobile fra ruota e pavimento stradale. Esso non impedisce alla macchina alcuna configurazione ma vincola il modo in cui una configurazione può essere raggiunta: limita le modalità di variazione di una configurazione. Di tali vincoli non ci occuperemo. D'ora in poi chiameremo senz'altro vincolo un vincolo olonomo.

Dette q_1, q_2, \dots, q_n le n c.l. di un sistema olonomo a n g.d.l., la posizione di ogni punto P del sistema è funzione vettoriale delle coordinate q_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$P = P(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (4.1)$$

■ Dicesi spostamento virtuale δP di ogni punto P di un sistema la parte principale di uno spostamento infinitesimo del punto, arbitrario purché compatibile con i vincoli. L'infinitesimo campione è un arbitrario incremento di tempo δt in cui possa immaginarsi avvenire δP .

Lo spostamento virtuale non è uno spostamento reale. È puramente immaginato ed è, diciamo così, la parte incipiente di un ipotetico spostamento che il sistema potrebbe compiere, compatibilmente con i vincoli.*

Coerentemente con la definizione data, l'operatore δ , dal punto di vista analitico, coincide con l'operatore differenziale d . La differenza di grafia e di denominazione sottolinea l'arbitrarietà dello spostamento virtuale. Lo spostamento dP , analiticamente coincidente con δP (a meno della clausola sul congelamento dei vincoli), si chiama *spostamento elementare* (vedi Appendice B).

Dal punto di vista geometrico, lo spostamento virtuale δP di ogni punto P è rigorosamente tangente alla traiettoria che il punto potrebbe iniziare a descrivere compatibilmente con i vincoli (Figura 4.20).

Il rapporto $\delta P/\delta t$ si dice *velocità virtuale* ed è diretta come δP ; si usa il termine virtuale, sia per essere δP virtuale, sia per l'arbitrarietà dell'incremento temporale, anch'esso puramente immaginato. La velocità reale dP/dt è (fatta salva la clausola sul congelamento dei vincoli) una fra le infinite possibili velocità virtuali.

L'insieme delle velocità (reali o virtuali che siano) di tutti i punti P del sistema si dice *atto di moto* (reale o virtuale) del sistema. È un concetto, quello dell'atto di moto, che si mostrerà estremamente proficuo, efficace anche nelle parole che lo definiscono e che ci suggeriscono di immaginare quello che il sistema vorrebbe fare, all'inizio di un suo possibile movimento.

Quando faticosamente questo concetto veniva precisandosi alla mente degli scienziati, Descartes (1637) parlava di “*commencement du mouvement*”.

Il riferimento alle velocità virtuali è il motivo per cui l'analisi della mobilità virtuale di un sistema materiale è spesso indicata come *analisi cinematica*. Si tratta però, come stiamo dicendo, di una cinematica in cui gli spostamenti sono immaginati in un tempo arbitrario.

Lo spostamento virtuale di un generico punto P è analiticamente dato dal differenziale di P (che è un vettore).

$$\delta P = \sum_i \frac{\partial P}{\partial q_i} \delta q_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

* Una precisazione va fatta per i vincoli (precisazione che però è utile solo in Dinamica): essi vanno congelati all'istante in cui lo spostamento virtuale viene immaginato.

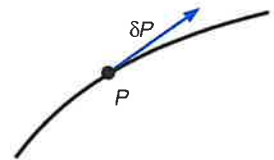


Figura 4.20

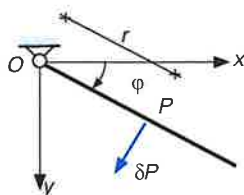


Figura 4.21

La Figura 4.20 e la (4.2) costituiscono rispettivamente l'aspetto geometrico di δP (per quanto è possibile disegnare un infinitesimo) e l'aspetto analitico nel caso in cui P appartenga a un sistema olonomo con n g.d.l.

Per esempio, per l'asta già presa in considerazione nella Figura 4.3, la (4.1) e la (4.2) divengono (Figura 4.21):

$$P \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \delta P \begin{cases} \delta x = -r \sin \varphi \delta \varphi \\ \delta y = r \cos \varphi \delta \varphi \end{cases} \Rightarrow |\delta P| = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \quad (4.3)$$

La Figura 4.21 e la (4.3) costituiscono rispettivamente l'aspetto geometrico e l'aspetto analitico di δP .

Attraverso la descrizione analitica che del sistema fanno le c.l., lo spostamento (finito o virtuale) di ogni sistema olonomo, e quindi anche di un sistema rigido, è definito.

Tuttavia presenteremo ora l'analisi cinematica secondo la descrizione diretta dello spostamento rigido dapprima finito, poi virtuale; ciò è più intuitivo del procedimento analitico e riveste inoltre un interesse storico. Esso è dovuto soprattutto a Eulero (1707-1783).

Ripercorrendo la descrizione propria dello spostamento rigido perderemo ovviamente in generalità, ma acquisteremo in evidenza geometrica e in efficacia descrittiva. Verranno inoltre più espressivamente messe in luce proprietà dello spostamento rigido utili a indagare se i vincoli di una struttura siano "ben messi" in modo da renderla isostatica.

4.3 Analisi dello spostamento rigido e analisi cinematica

Diamo ora una serie di proposizioni. Dal punto di vista logico alcune sono definizioni, altri teoremi. Consideriamo dapprima spostamenti finiti.

4.3.1 Spostamenti finiti

■ **Spostamento rigido** è un campo di spostamenti in cui tutte le mutue distanze restano invariate. Un corpo rigido può avere solo spostamenti rigidi.

Se in uno spostamento rigido si conoscono gli spostamenti di tre punti non allineati il campo degli spostamenti è definito. Infatti, note le posizioni finali $A'B'C'$ di tre punti ABC non allineati, un generico quarto punto D deve spostarsi in modo da trasformare il tetraedro $ABCD$ nel tetraedro $A'B'C'D'$ uguale (e congruente), come illustrato nella Figura 4.22.

■ **Spostamento rigido piano** è uno spostamento rigido in cui tutti i punti subiscono spostamenti paralleli a un piano (Figura 4.23) che si dice *piano direttore*.

Lo spostamento della porta di Figura 4.3 è un esempio di spostamento rigido piano. Conseguenza della definizione è che: due punti allineati sulla perpendicolare al piano direttore subiscono lo stesso spostamento.

Siano A e C due punti allineati su di una perpendicolare al piano direttore π . Le loro posizioni finali A' e C' devono trovarsi sui piani per A e per C , paralleli al piano direttore. D'altronde, per la rigidità, la posizione finale C' deve stare anche su di una sfera con centro in A' e raggio uguale ad AC , sfera che, per la perpendicolarità fra AC e π , è tangente a π . Quindi C' coincide con il punto di tangenza e $A'C'$ deve perciò anch'esso essere perpendicolare a π . Il quadrilatero $ACC'A'$ è quindi un rettangolo con $A'A = C'C$.

■ Se in uno spostamento rigido piano si conoscono gli spostamenti di due punti il campo degli spostamenti è definito.

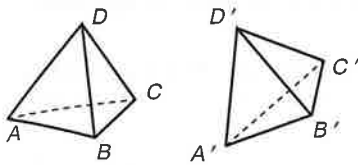


Figura 4.22

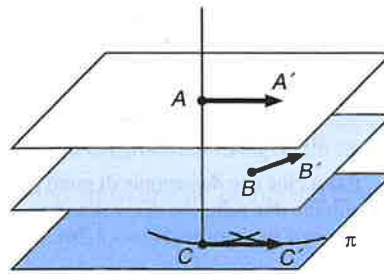


Figura 4.23

Infatti note le posizioni finali A' e B' di due punti A e B un generico terzo punto C deve spostarsi in modo da trasformare il triangolo ABC nell'unico triangolo $A'B'C'$ uguale e congruente ad ABC (Figura 4.24). Notiamo esplicitamente che il triangolo $A'B'C''$ nella Figura 4.24 non è congruente ad ABC .

Una direzione che resti invariata durante lo spostamento si dice *direzione principale*.

Se due punti A e B si trovano su di una retta a avente direzione principale essi subiscono lo stesso spostamento.

La dimostrazione è immediata. Dovendo essere $A'B'$ parallelo ad AB per ipotesi è uguale ad AB per via della rigidità, il quadrilatero $ABB'A'$ è un parallelogramma e quindi è $A'A = B'B$.

Corollario della precedente proposizione è: nello spostamento piano ogni direzione normale al piano direttore è principale.

■ Si dice *spostamento traslatorio* uno spostamento in cui tutti i punti subiscono lo stesso spostamento.

Conseguenze di tale definizione sono: lo spostamento traslatorio è rigido piano; tutte le direzioni sono direzioni principali e cioè rimangono invariate. Viceversa: se tutte le direzioni restano invariate lo spostamento è traslatorio. Le dimostrazioni sono immediate.

Spostamenti traslatori sono per esempio gli spostamenti del libro e della panchina panoramica (se si prescinde da ogni oscillazione) di Figura 4.25; non è traslatorio lo spostamento dei raggi della ruota panoramica. Nel portale di Figura

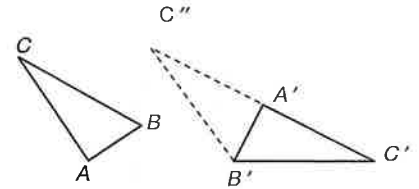


Figura 4.24

La proprietà di essere traslatorio attiene allo spostamento di un sistema. Non ha senso dire che lo spostamento di un punto è traslatorio



a)

b)

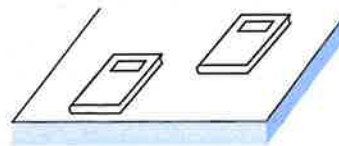


Figura 4.25

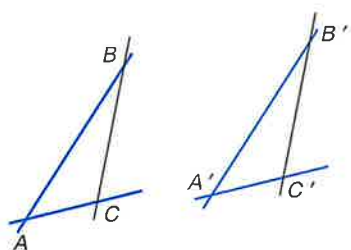


Figura 4.26

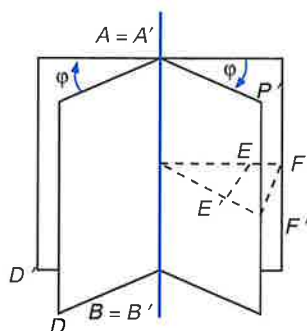


Figura 4.27

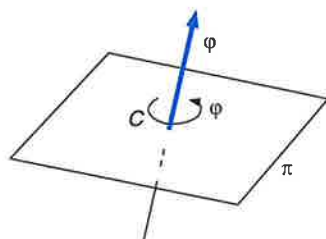


Figura 4.28

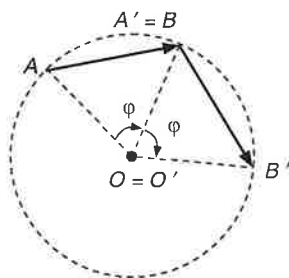


Figura 4.29

"Spostamento" è concetto diverso da "movimento"

ra 4.7 è traslatorio lo spostamento del traverso orizzontale; non lo è quello dei due montanti verticali.

Per le applicazioni che andremo a sviluppare è importante il seguente teorema:

Se in uno spostamento rigido due direzioni sono principali lo spostamento è traslatorio.

Basta cioè che due coppie di punti (per esempio AB e AC con ABC non allineati) individuino due rette che si spostino parallelamente a se stesse per affermare che lo spostamento è traslatorio (Figura 4.26).

Infatti, se le rette $A'B'$ e $A'C'$ devono essere parallele alle rette AB e AC e se lo spostamento è rigido, un qualunque triangolo ABC si trasforma in un triangolo con tutti i lati paralleli a quelli di partenza. Con ciò anche un tetraedro $ABCD$ (con D qualunque) si trasforma in un tetraedro con tutti i lati paralleli a quelli di partenza. Ogni direzione resta dunque invariata.

■ Si dice *spostamento rotatorio* uno spostamento rigido in cui a tutti i punti di una retta compete spostamento nullo. Tale retta dicesi *asse di rotazione*.

In uno spostamento rigido, noti l'asse di rotazione e lo spostamento di un punto P non appartenente all'asse, lo spostamento è determinato.

Infatti se A e B sono due punti (fissi) appartenenti all'asse di rotazione (Figura 4.27) il triangolo ABP' si ottiene dal triangolo ABP per rotazione (attorno all'asse) di un angolo φ . Di conseguenza, per la rigidità e per la fissità dell'asse, ogni altro piano ABD ruota (attorno all'asse) dello stesso angolo φ . E perciò: l'asse di rotazione e l'angolo di rotazione determinano lo spostamento rotatorio. Essi determinano cioè il campo degli spostamenti.

Si usa descrivere lo spostamento rigido rotatorio mediante un vettore φ avente come direzione l'asse di rotazione, come modulo l'angolo di rotazione φ , come verso quello che assieme al verso di rotazione individua un avvitamento destro (Figura 4.28). Vedremo fra poco, tuttavia, che tale grandezza φ non ha tutte le carte in regola per potersi chiamare "vettore" a tutti gli effetti.

Da quanto detto consegue che uno spostamento rotatorio è anch'esso piano. È piano direttore un piano π perpendicolare all'asse di rotazione. Per questo si usa parlare anche di *centro di rotazione*.

Si dice *centro di rotazione* l'intersezione C dell'asse di rotazione con il piano direttore (Figura 4.28).

Va notato che in uno spostamento rotatorio subiscono spostamenti paralleli solo coppie di punti che, come E ed F , siano allineati su di una perpendicolare all'asse di rotazione incidente l'asse. È direzione principale solo la direzione dell'asse.

Importantissimo, sia dal punto di vista teorico che per le applicazioni all'analisi cinematica delle strutture, è il seguente teorema (dovuto a Eulero):

■ Ogni spostamento rigido piano, non traslatorio, è rotatorio.

Infatti, nel piano direttore, sia A un punto (non fisso) che si sposta in A' e sia B quel punto che inizialmente si trovava in A' e che si sposterà in un punto B' tale che AB sia uguale ad $A'B'$ (B' non è allineato con AB perché per ipotesi lo spostamento non è traslatorio). I tre punti ABB' individuano una circonferenza di centro O (Figura 4.29). Il triangolo OAB deve, per la rigidità, trasformarsi nel triangolo $O'A'B'$ uguale a se stesso. Quindi O' coincide con O . Ma poiché lo spostamento è piano, tutto l'asse passante per O e perpendicolare al piano è fisso ed è l'asse di rotazione. L'angolo φ è l'angolo di rotazione.

Si noti che B' potrebbe essere allineato con AB , ma allora dovrebbe coincidere con A (per essere lo spostamento rigido e non traslatorio). In tal caso il punto O che resta fisso è il punto medio del segmento AB ed è l'angolo $\varphi = \pi$.

Altro importante teorema, anch'esso dovuto a Eulero, è il seguente.

Se, in uno spostamento rigido, un punto è fisso, allora tutt'un asse di punti resta fisso, e quindi lo spostamento è rotatorio.

Prima di darne la dimostrazione val la pena sottolineare che stiamo parlando di spostamento e non di movimento. Se sostituissimo "movimento" a "spostamento" il teorema sarebbe falso.

Sia C il punto che per ipotesi resta fisso (Figura 4.30). Noti allora gli spostamenti di altri due punti A e B lo spostamento rigido è determinato. Si procede come nella dimostrazione precedente (si può perché se C' è un punto fisso lo spostamento non è traslatorio) e si scopre che C' è un secondo punto fisso O . Quindi, per la rigidità, tutto l'asse OC è fisso e lo spostamento è rotatorio. Si noti che il piano di ABB' deve essere perpendicolare all'asse OC perché il triangolo CAB deve essere uguale e congruente al triangolo $CA'B'$.

- Si dice infine *spostamento rototraslatorio* uno spostamento composto di una traslazione e di una rotazione.

La definizione comporta che lo spostamento rototraslatorio sia uno spostamento rigido. Esso non è in generale uno spostamento piano.

Un particolare spostamento rototraslatorio è lo *spostamento elicoidale*, in cui la traslazione ha la stessa direzione dell'asse di rotazione. Esempio tipico ne è lo spostamento che può subire una vite rispetto al dado (anche il movimento, in questo caso, è elicoidale) o di una chiave rispetto alla serratura (Figura 4.31). Lo spostamento elicoidale non è piano. Nella sistemazione teorica successiva a Eulero, Chasles (1793-1880) ha dimostrato un teorema che nel caso piano assume la seguente forma, che si mostrerà di rilevantissimo interesse nell'analisi cinematica delle strutture:

- **Teorema di Chasles:** ogni spostamento rigido piano, non traslatorio, si riduce in un sol modo a una rotazione attorno a un opportuno centro.

Anche a proposito di questi teoremi non sarà inutile sottolineare che essi trattano spostamenti, non movimenti.

Nella sua forma generale il teorema di Chasles afferma che non solo a un movimento elicoidale, come quello della vite rappresentato nella Figura 4.31, compete uno spostamento elicoidale, ma che, qualunque sia un movimento rigido (un aeroplano in volo, una nave in navigazione con rollio e beccheggio, un qualunque assestamento di struttura rigida...), lo spostamento da una configurazione a un'altra si può realizzare con uno spostamento elicoidale.

Nel caso piano il teorema si riduce ad affermare che qualunque spostamento rigido può realizzarsi o con una sola rotazione (Figura 4.32a) o con una sola traslazione (Figura 4.32b).

Di questo ci si può convincere costruttivamente. Se le direzioni restano invariate si tratta di traslazione (Figura 4.32b). In caso contrario, costruiti gli assi dei segmenti AA' e BB' (A e B essendo punti qualsiasi solidali con il corpo rigido), la loro intersezione C è centro di una rotazione che porta il libro dalla sua posizione a quella finale; l'angolo φ compreso fra CA e CA' oppure fra CB e CB' è l'angolo di rotazione. Con ciò ci siamo convinti che esistono un centro C e un angolo φ che definiscono una rotazione che realizza lo spostamento.

Ciò non esclude che lo spostamento si potrebbe anche realizzare in due tempi: dapprima portando A in A' con una semplice traslazione e poi ruotando attorno ad A' . Si noti che l'angolo φ di rotazione è sempre lo stesso. Rimarrebbe lo stesso anche se si assumesse come primo passo una traslazione diversa, per esempio quella che porta B in B' ("in infiniti modi" dice il teorema).

La dimostrazione nel caso spaziale è sostanzialmente analoga: infatti, una volta sistemato il punto A in A' con la traslazione, A' è fisso e quindi il successivo spostamento è rotatorio.

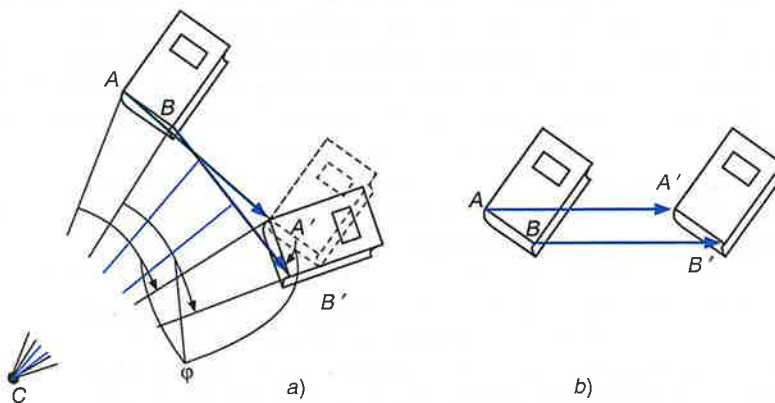


Figura 4.32

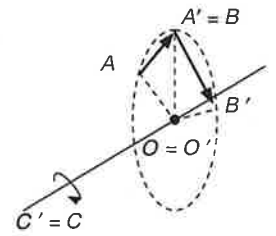


Figura 4.30

Qualunque spostamento rigido piano o è traslatorio o è rotatorio

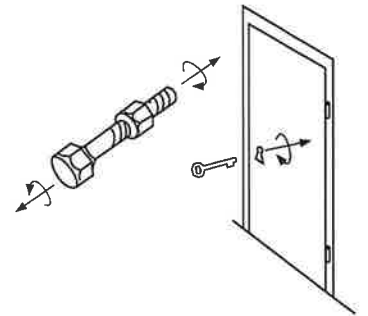


Figura 4.31

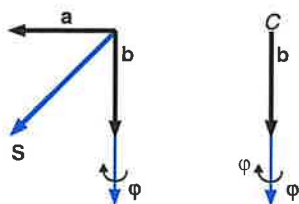


Figura 4.33

Non è in generale possibile ridurre, nel caso spaziale, lo spostamento a puramente rotatorio (basti pensare che in tal caso gli assi dei segmenti AA' e BB' possono essere sghembi) o puramente traslatorio.

È invece sempre possibile, si è detto, ridurre lo spostamento a elicoidale (e in modo unico).

Infatti, sia ϕ "il vettore" rotazione ed S la traslazione, che assieme rappresentano una possibile rototraslazione (Figura 4.33). Si scomponga S in una traslazione b diretta come ϕ e in una a a essa perpendicolare. Questa, assieme alla rotazione, forma uno spostamento rigido piano (non traslatorio) ed è quindi riducibile a una sola rotazione ϕ (attorno a un ben preciso asse di rotazione passante per C) che assieme a b dà lo spostamento elicoidale.

Come casi particolari potrebbero essere nulli o b (spostamento rotatorio) o ϕ (spostamento traslatorio). È corollario di quest'ultimo teorema la riduzione dello spostamento nel caso piano, in cui il componente b non può sussistere.

Il teorema di Chasles viene ad affermare che occorrono sei parametri per descrivere lo spostamento rigido generale: tre componenti del vettore traslazione e tre componenti del "vettore" rotazione. Nel caso piano i parametri si riducono a tre: due per la traslazione e uno per la rotazione.

È interessante notare che, quand'anche il generico spostamento rigido piano non traslatorio venga descritto con una sola rotazione, resta vero che tre sono i parametri necessari a descriverlo: due per le coordinate del centro di rotazione, uno per l'angolo di rotazione.

Veniamo infine alla questione del "vettore" rotazione che abbiamo detto non essere con tutti i diritti un vettore. Perché? Perché esso non segue le regole dell'algebra vettoriale: due successive rotazioni non si compongono secondo le regole del parallelogramma. La Figura 4.34 mostra che lo spostamento dovuto a due rotazioni successive è diverso dalla rotazione che si avrebbe coerentemente a un eventuale vettore rotazione somma.

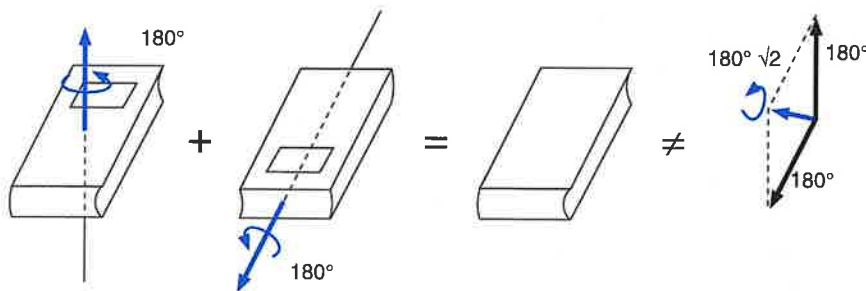


Figura 4.34

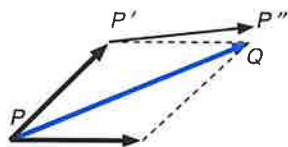


Figura 4.35

4.3.2 Spostamenti virtuali e centro di istantanea rotazione

Diversamente vanno le cose nel caso degli *spostamenti virtuali o elementari*: per essi valgono definizione e teoremi introdotti (si riveda il Paragrafo 4.2), ma vale inoltre il *Principio di sovrapposizione degli spostamenti virtuali*: è questa una proposizione relevantissima. Afferma che è indifferente riferire lo spostamento virtuale di un punto alla sua posizione iniziale o a quella finale. Ciò significa che lo spostamento virtuale composto di due successivi spostamenti, da P in P' e poi da P' a P'' è rigorosamente uguale a quello che si otterrebbe facendo subire i due spostamenti alla posizione iniziale P e componendoli secondo la regola del parallelogramma (Figura 4.35). Commentiamo questa delicata proposizione.

Innanzitutto: come mai si dice che i due spostamenti composti sono rigorosamente uguali, se la Figura 4.35 mostra la differenza fra P'' e Q ?

La risposta è contenuta nella definizione stessa di spostamento virtuale: esso consiste nella parte principale dello spostamento ed è, per così dire, incapace di rilevare la differenza fra P'' e Q , che risulta un infinitesimo di ordine superiore.

Val la pena notare che il principio è riportato spesso come principio di sovrapposizione degli spostamenti infinitesimi. Esso però è a rigore valido solo per

spostamenti virtuali δP o per spostamenti elementari dP , che, analiticamente parlando, sono differenziali primi della posizione P , e non per la completa variazione infinitesima di P .

Ancora: grazie al principio di sovrapposizione degli spostamenti virtuali diventa lecito senza ambiguità alcuna parlare di *vettore rotazione virtuale* $\delta\varphi$.

E veniamo al centro di istantanea rotazione!

Cerchiamo innanzitutto di non dirne sciocchezze. Non diciamo che è il centro di istantanea rotazione della struttura. Non diciamo che è il punto intorno a cui essa ruota. Non diciamo che è un punto fisso. E non chiamiamolo *cir*, anche se per brevità di scrittura lo indicheremo con le iniziali.

Evitato di dire ciò, che cos'è il centro di istantanea rotazione?

Innanzitutto esso attiene allo spostamento *di un singolo elemento rigido* e non a tutta la struttura. Questo perché, come siamo venuti dimostrando, (ripetiamo la proposizione nel **caso piano**)

■ ogni spostamento virtuale rigido piano non traslatorio è rotatorio.

Esiste perciò un punto C , *solidale con il corpo rigido*, cui compete spostamento virtuale nullo. Esso è il c.i.r. di quello spostamento rigido. E perciò:

■ il c.i.r. di uno spostamento virtuale rigido piano, e cioè, per le strutture articolate di nostro interesse, *di una singola asta*, è quel punto C solidale con l'asta cui compete spostamento virtuale nullo

$$\delta C = 0.$$

Lo spostamento virtuale δP di qualunque punto P dell'asta è, in modulo,

$$|\delta P| = r_P \delta\varphi.$$

Nella Figura 4.36 non è disegnata l'asta ma lo spostamento δP di un suo punto P .

Per esprimere questo concetto in modo valido anche in tre dimensioni si fa uso del linguaggio vettoriale.

■ Lo spostamento virtuale δP di ogni punto P in uno spostamento rotatorio si esprime analiticamente in questo modo (Figura 4.36):

$$\delta P = \delta\varphi \wedge (P - C) \quad \text{con} \quad |\delta P| = r_P |\delta\varphi|, \quad r_P = |P - C| \quad (4.4)$$

essendo C un punto dell'asse di istantanea rotazione. La (4.4) è espressione del tutto generale dello spostamento rotatorio virtuale. Essa ovviamente coincide con l'espressione (4.3) che si era ottenuta differenziando le coordinate di P . La forma vettoriale di δP (4.4) vale qualunque sia il punto C sull'asse di rotazione. Nel caso piano C è il c.i.r. del corpo rigido.

E infine, mentre non è detto che lo spostamento composto di due rotazioni finite successive sia una rotazione (può non essere nullo lo spostamento di alcun punto), lo spostamento composto di due rotazioni virtuali, grazie al principio di sovrapposizione, è ancora una rotazione (virtuale) con vettore rotazione somma vettoriale dei due vettori rotazione componenti (tale risultato è storicamente noto come principio del parallelogramma delle rotazioni infinitesimali del Frisi).

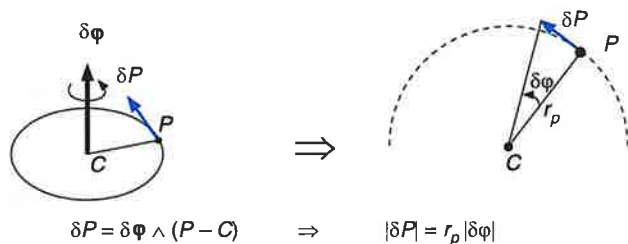


Figura 4.36

In uno spostamento rotatorio virtuale, il centro di istantanea rotazione C si trova sempre sulla perpendicolare allo spostamento virtuale δP_i di ogni punto P_i

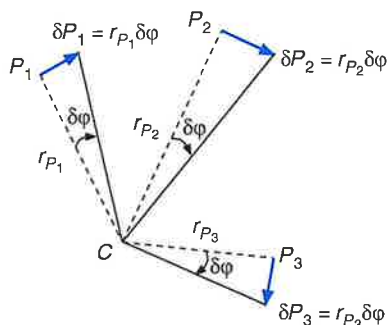


Figura 4.37

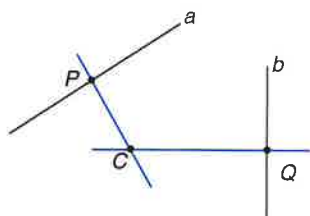


Figura 4.38

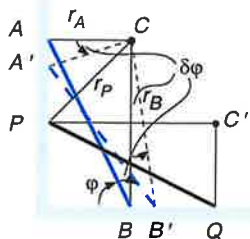


Figura 4.39

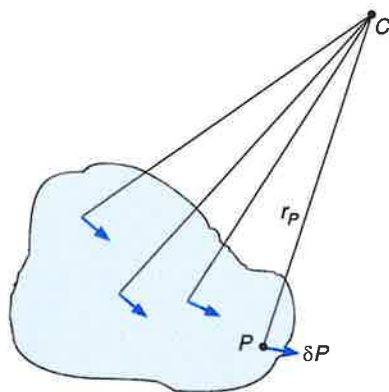


Figura 4.40

Il centro di istantanea rotazione di un corpo rigido si trova sulla perpendicolare allo spostamento di ogni punto P (Figura 4.37). La sua posizione è nota qualora si conoscano in direzione gli spostamenti virtuali di due punti. Infatti, note che siano le rette a e b su cui devono avvenire gli spostamenti di P e di Q , il centro C di istantanea rotazione deve trovarsi sulle perpendicolari per P e per Q alle rette a e b (Figura 4.38). La posizione di C è anche nota se, conoscendo il piano e l'angolo $\delta\varphi$ della rotazione, si conosca lo spostamento δP di un punto P . Il centro C deve infatti trovarsi, secondo la (4.4), sulla perpendicolare per P a una distanza

$$r_P = \frac{|\delta P|}{|\delta\varphi|}. \quad (4.5)$$

Grazie a quanto finora siamo venuti dicendo lo spostamento rototraslatorio virtuale si esprime nel modo seguente:

$$\delta P = \delta A + \delta\varphi \wedge (P-A). \quad (4.6)$$

La (4.6) significa che lo spostamento virtuale δP di un generico punto P solidale con il corpo rigido è la somma vettoriale di una traslazione virtuale δA (cioè dello spostamento di un qualunque punto A) più una rotazione virtuale attorno ad A . La scelta di A è arbitraria (la descrizione avviene in infiniti modi); il vettore $\delta\varphi$ è proprio della rotazione che il corpo rigido ha subito (determinazione unica di $\delta\varphi$). La (4.6) esige che gli spostamenti di due qualsiasi punti A , P , solidali con lo stesso corpo rigido, abbiano ugual componente nella direzione AP ; soddisfa cioè la condizione di congruenza per cui i due punti non possono né allontanarsi né avvicinarsi.

La (4.6) è valida per qualunque spostamento rigido, sia nel caso piano che nel caso tridimensionale. Nel caso piano, però, c'è sempre modo di ridurre la (4.6) a $\delta P = \delta A$ oppure alla (4.4).

nello spostamento virtuale rigido piano o tutti i punti subiscono lo stesso spostamento (traslazione) o esiste un punto C , solidale con il corpo (anche eventualmente esterno a esso), a spostamento virtuale nullo (il c.i.r.) attorno a cui tutti gli altri ruotano virtualmente. Lo spostamento di ogni punto P a distanza da r_P da C è in modulo

$$|\delta P| = r_P |\delta\varphi|. \quad (4.4)$$

Per esempio, l'asta AB con estremi scorrevoli su due guide ortogonali ha centro di istantanea rotazione C , che è l'intersezione delle perpendicolari per A e per B alle guide (Figura 4.39). L'asta può ruotare virtualmente attorno a C di un angolo $\delta\varphi$, con il che assume la configurazione $A'B'$. Nulla vieterebbe di descrivere lo spostamento dell'asta AB in due tempi: dapprima con una traslazione che per esempio mandi a posto A , da A in A' (con il che però si infrangerebbe il vincolo in B), poi con una rotazione, sempre di ampiezza $\delta\varphi$, che, tenendo fermo A' , sistemi B nella sua giusta posizione finale B' . Si noti che il c.i.r. è relativo alla configurazione che in quell'istante all'asta compete. Relativamente per esempio alla configurazione PQ il c.i.r. è il punto C' .

Si noti infine che uno spostamento rotatorio virtuale in cui il centro C di istantanea rotazione sia molto lontano dai punti del sistema (Figura 4.40) è poco dissimile da uno spostamento traslatorio, in quanto tutti i punti P vengono a subire spostamenti δP poco dissimili fra loro. I punti tendono ad avere spostamenti tanto più simili fra loro quanto più il centro C si allontana.

Si usa dire che una traslazione virtuale è una rotazione in cui il centro di istantanea rotazione è all'infinito: la traslazione è perpendicolare alla direzione in cui il centro si è allontanato.

Il centro si indica con C_∞ e si rappresenta con una freccia. Esso è individuato da una direzione. Per esempio, l'asta che trasla virtualmente da AB in $A'B'$ (Figura 4.41) ha c.i.r. C_∞ . Esso è individuato dalla direzione normale allo spostamento δP .