

# Problemi strutturali: realtà fisica e modelli 6

In questo capitolo:

- si riassumono concetti, regole e criteri già esposti, visti ora come base dell'analisi del probabile comportamento di una struttura;
- si discute il ruolo di alcune delle ipotesi semplificative che regolano il passaggio realtà-modello e si evidenziano i limiti insiti nell'utilizzo delle sole regole dell'equilibrio;
- si esaminano alcune semplici strutture, facendo quasi sempre riferimento al mondo delle costruzioni, estrapolandone modelli strutturali e determinando, ove possibile, la distribuzione delle forze interne prodotte da un assegnato sistema di azioni esterne;
- si discutono i risultati ottenuti mettendoli in relazione con scelte progettuali, realizzative e di modellazione.

## 6.1 Premessa

I concetti già esposti nei capitoli precedenti sono qui sintetizzati per evidenziarne tutto ciò che è necessario alla corretta comprensione dei problemi strutturali reali che il Lettore può ormai cominciare ad affrontare.

Tutte le osservazioni che nasceranno di volta in volta avranno la stessa, e talvolta maggiore, importanza del discorso principale ma, per non interrompere il filo del discorso, saranno espresse come "parentesi" e rappresentate in corpo minore rientrato.

## 6.2 Introduzione

L'analisi del probabile comportamento di una struttura sotto l'azione di cause esterne (forze o spostamenti impressi) è sempre svolta riducendo la struttura reale a *modello strutturale* teorico.

Si ricordi che un modello strutturale è un insieme, piano o spaziale, di elementi, mono-, bi-, o tri-dimensionali, di stabilita deformabilità (vedi Parentesi 1), collegati tra loro e all'esterno con vincoli ideali.

**Parentesi 1** La deformazione di un elemento strutturale dipende dalla sua geometria, dal materiale, dai vincoli e dalle forze cui è sottoposto.

Nell'applicazione delle regole della Statica si assume spesso l'ipotesi che le deformazioni siano infinitesime (vedi Capitolo 7) e che perciò la configurazione geometrica dei sistemi di forze, attive e reattive, esterne e interne, rimanga invariata. Questa ipotesi semplificativa

è molto utile nel calcolo: le equazioni di equilibrio vengono scritte con riferimento alla struttura indeformata. Esse risultano lineari, a coefficienti costanti.

Conseguenza importante è il cosiddetto "principio di sovrapposizione degli effetti": la distribuzione delle forze reattive corrispondente all'azione contemporanea di più forze può essere ottenuta come somma delle distribuzioni corrispondenti a ciascuna forza considerata agente separatamente. Di questo comodo principio faremo uso molto spesso.

L'ipotesi delle "piccole deformazioni" è giustificata dal fatto che, in molti problemi strutturali, nei limiti di variabilità delle forze in gioco, la differenza tra configurazione geometrica deformata e indeformata è così "piccola" da non influenzare in modo significativo i risultati. È però da tenere sempre presente la necessità di rinunciare a questa ipotesi in tutti quegli altri problemi in cui così non accade perché le deformazioni sono "grandi" (non possono considerarsi infinitesime) e quindi influenzano in modo significativo i risultati (si vedano per esempio i problemi trattati nel Capitolo 8).

La distribuzione delle forze, degli sforzi e degli spostamenti in un modello strutturale è determinata dalle regole della Statica e della Scienza delle Costruzioni.

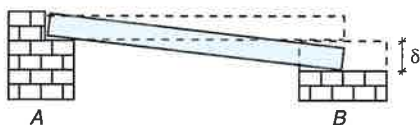
La distanza tra comportamento reale della struttura e comportamento teorico del modello dipende dalle necessarie e inevitabili ipotesi che si introducono sia nel passaggio struttura  $\rightarrow$  modello, sia nella formulazione delle regole suddette (vedi Parentesi 2).

**Parentesi 2** Minimizzare questa distanza è sempre stato obiettivo degli studiosi di problemi strutturali, a livello sia teorico (formulazione delle regole) che operativo (modellazione e metodi di calcolo). L'avvento dei calcolatori elettronici ha dato un grandissimo contributo all'aspetto operativo di questo problema, rendendo possibile l'introduzione di modelli strutturali anche molto sofisticati, la cui analisi numerica era prima impensabile, richiedendo talvolta più anni della vita umana.

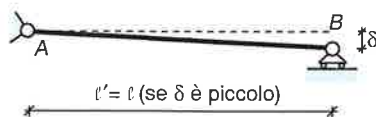
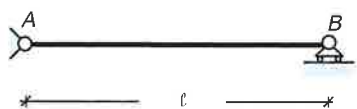
Può essere talvolta necessario schematizzare la stessa struttura con più di un modello strutturale, modificando di volta in volta le ipotesi introdotte.



Il muro in B subisce un abbassamento  $\delta$



La trave è libera di disporsi nella nuova posizione dei muri senza deformarsi



La trave non si deforma

Figura 6.1 Trave su due muri (isostatica).

### 6.3 Oggetto e metodo

Argomento principale di questo capitolo è l'analisi di alcuni modelli strutturali: l'analisi possibile, con gli strumenti fin qui acquisiti, sarà limitata alla ricerca delle forze reattive dei vincoli, esterni e interni, e delle caratteristiche globali delle forze interne (azioni interne); gli schemi strutturali saranno solamente quelli per i quali questa ricerca è possibile e determinata usando le sole regole della Statica, cioè dell'equilibrio (modelli isostatici e ipostatici determinati).

Si esamineranno in prevalenza schemi strutturali piani, costituiti da *elementi mono-dimensionali*, connessi mutuamente e all'esterno con vincoli senza attrito né cedimenti (vedi Parentesi 3); si assumerà tacitamente valida l'ipotesi di rigidità, che consente di scrivere le equazioni di equilibrio nella geometria iniziale indeformata della struttura.

**Parentesi 3** La precisazione sull'assenza di cedimenti può essere superflua poiché in una struttura isostatica (o ipostatica determinata) un cedimento, piccolo tanto da non modificarne sostanzialmente la geometria, non modifica neppure la distribuzione delle forze reattive e interne, come avviene invece nelle strutture iperstatiche. Infatti in una struttura isostatica il cedimento di un vincolo non provoca deformazioni nella struttura e quindi non fa nascere forze interne auto-equilibrate.

Nella Figura 6.1 è rappresentata una trave incernierata in A e appoggiata in B: un cedimento  $\delta$  dell'appoggio B non richiede che la trave si deformi per assumere la nuova posizione, cosicché i vincoli non reagiscono al cedimento.

Nella Figura 6.2 è rappresentata una trave incastrata in A: un cedimento angolare  $\alpha$  dell'incastro non richiede che la trave si deformi per assumere la nuova posizione; il vincolo non reagisce al cedimento.

Nella Figura 6.3 è rappresentata una trave incastrata ai due estremi. Le condizioni di vincolo sono sei mentre quelle strettamente necessarie per l'equilibrio sono tre, trattasi cioè di una struttura tre volte iperstatica. Un cedimento verticale di tutto il muro in  $B$  costringe la trave a deformarsi per assumere la nuova posizione dei due incastri. Nascono cioè delle forze reattive nei due incastri, che si fanno equilibrio tra di loro (sono cioè autoequilibrate), e le corrispondenti forze interne (taglio e momento flettente).

Particolare attenzione sarà rivolta ad alcuni schemi strutturali tipici (trave, pilastro, capriata, travatura reticolare ...) partendo da esempi di problemi strutturali nei quali essi possono essere individuati. L'analisi degli schemi strutturali proposti sarà utile per meglio comprendere l'applicazione delle regole dell'equilibrio; la individuazione degli schemi a partire dalla struttura e il confronto fra più schemi possibili potranno essere utili per capire come collocare una struttura reale rispetto agli schemi teorici analizzati ed eventualmente come modificarla affinché il suo comportamento sia vicino a quello teorico desiderato.

## 6.4 L'elemento strutturale monodimensionale

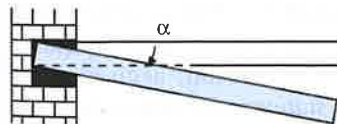
Come già detto, gli schemi strutturali qui esaminati sono tutti costituiti da *elementi monodimensionali*: è utile sintetizzare quanto già detto nei precedenti capitoli sulla definizione di questo termine e sui motivi della scelta.

Con *elemento monodimensionale* si intende qui un elemento strutturale, in realtà tridimensionale, ma caratterizzato dall'avere una dimensione (longitudinale) prevalente rispetto alle altre due (trasversali), le quali però non sono trascurabili,

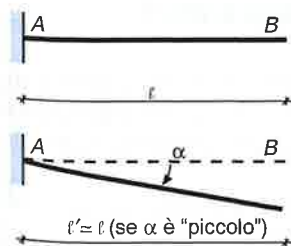
*Definizione (richiamo)*



L'incastro nel muro  $A$  cede di un angolo  $\alpha$



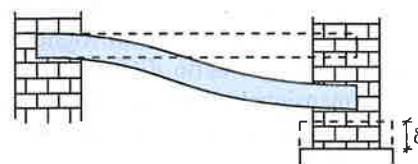
La trave è libera di disporsi con la nuova inclinazione dell'incastro nel muro senza deformarsi



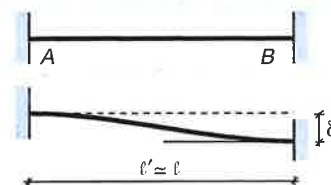
La trave non si deforma



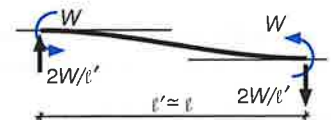
Il muro in  $B$  subisce un abbassamento  $\delta$



La trave non è libera di assumere la nuova posizione ma deve deformarsi per farlo



La trave si deforma e nascono forze reattive esterne autoequilibrate e forze interne



**Figura 6.2** Trave incastrata, o "mensola" (isostatica).

**Figura 6.3** Trave doppiamente incastrata (iperstatica).

poiché si intende che l'elemento sia in grado di reagire al momento flettente, al taglio e alle forze assiali (a differenza per esempio dei *fili*, che reagiscono solo alla trazione). Nella definizione ora data sono compresi quindi sia gli elementi strutturali soggetti prevalentemente a flessione (e taglio), come le travi, sia quelli soggetti prevalentemente a forze assiali, come i pilastri, gli elementi delle capriate, gli archi, le aste delle strutture reticolari.

L'elemento monodimensionale così definito è elemento tipico della Scienza delle Costruzioni classica. È detto *solido di de Saint Venant* dal nome dello studioso francese (Barrè de Saint Venant, 1796-1886) che per primo ne ha saputo calcolare lo stato di sforzo introducendo, accanto alle equazioni costitutive (legami sforzi-deformazioni), dei *postulati specifici* che consentono il calcolo della distribuzione degli sforzi in una sezione a partire dal valore delle azioni interne. Le ipotesi che sono alla base di questo calcolo non sono più accettabili se la geometria del solido non ha le suddette caratteristiche "monodimensionali". Del solido di de Saint Venant parleremo ampiamente nel Capitolo 7.

Gli elementi monodimensionali saranno qui rappresentati con la loro linea d'asse, luogo dei baricentri delle sezioni piane trasversali normali a questa linea. Se le forze esterne, attive e reattive, possono essere ridotte a un sistema di forze complanari con l'asse della trave, il problema sarà schematizzato come piano; se questa riduzione non è possibile, il problema sarà spaziale.

Forma e dimensioni delle sezioni trasversali non saranno in generale precisate poiché non intervengono nel problema dell'equilibrio delle strutture isostatiche (vedi Parentesi 4).

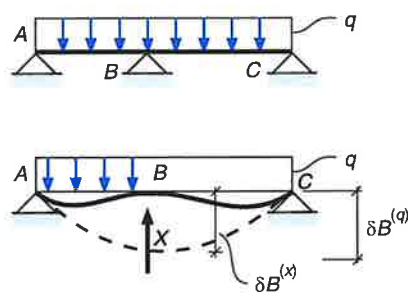


Figura 6.4

**Parentesi 4** Forma e dimensioni delle sezioni trasversali intervengono nella *deformabilità* degli elementi strutturali, per cui intervengono anche nella distribuzione delle forze reattive nelle strutture iperstatiche (vedi Capitolo 7); si ricordi che il problema dell'equilibrio di una struttura iperstatica ammette infinite soluzioni equilibrate, tra le quali una sola è anche congruente con i vincoli. Nell'esempio riportato nella Figura 6.4, per la congruenza della deformazione della trave con il vincolo appoggio in B, il valore reale di  $X$  sarà quello per cui lo spostamento  $\delta B$  di B, somma di quello  $\delta B^{(q)}$  dovuto al carico distribuito e di quello  $\delta B^{(X)}$  dovuto alla reazione dell'appoggio, risulta nullo.

La scelta di esaminare schemi strutturali costituiti da elementi monodimensionali è in effetti una esigenza se si vogliono utilizzare solo i mezzi fin qui acquisiti. Infatti, come già detto diffusamente nei capitoli precedenti, negli elementi monodimensionali le azioni interne *sono sempre staticamente determinate* una volta note le forze esterne, mentre ciò non accade in generale negli elementi bi- e tri-dimensionali.

## 6.5 Problema strutturale I: travi di solaio e muri

Si vuole determinare la probabile distribuzione delle forze in alcuni dei principali elementi che costituiscono la semplice struttura in legno e muratura rappresentata nella Figura 6.5, struttura tipica che si ritrova in quasi tutti gli edifici vecchi di almeno un secolo.

In particolare si vogliono analizzare le strutture orizzontali che costituiscono nel loro complesso i *solai*, e le strutture verticali che li sostengono.

I principali elementi strutturali che si possono individuare sono:

- tutte le assi della soletta nella direzione *a-a*, che sopportano sia il peso della soletta stessa che i pesi delle persone e degli oggetti che gravano su di essa;
- sei travi nella direzione *b-b*, sulle quali appoggiano le assi della soletta, e nel caso di una di esse anche il peso di un muro triangolare (timpano) che appoggia lungo tutta la trave;

Descrizione della struttura



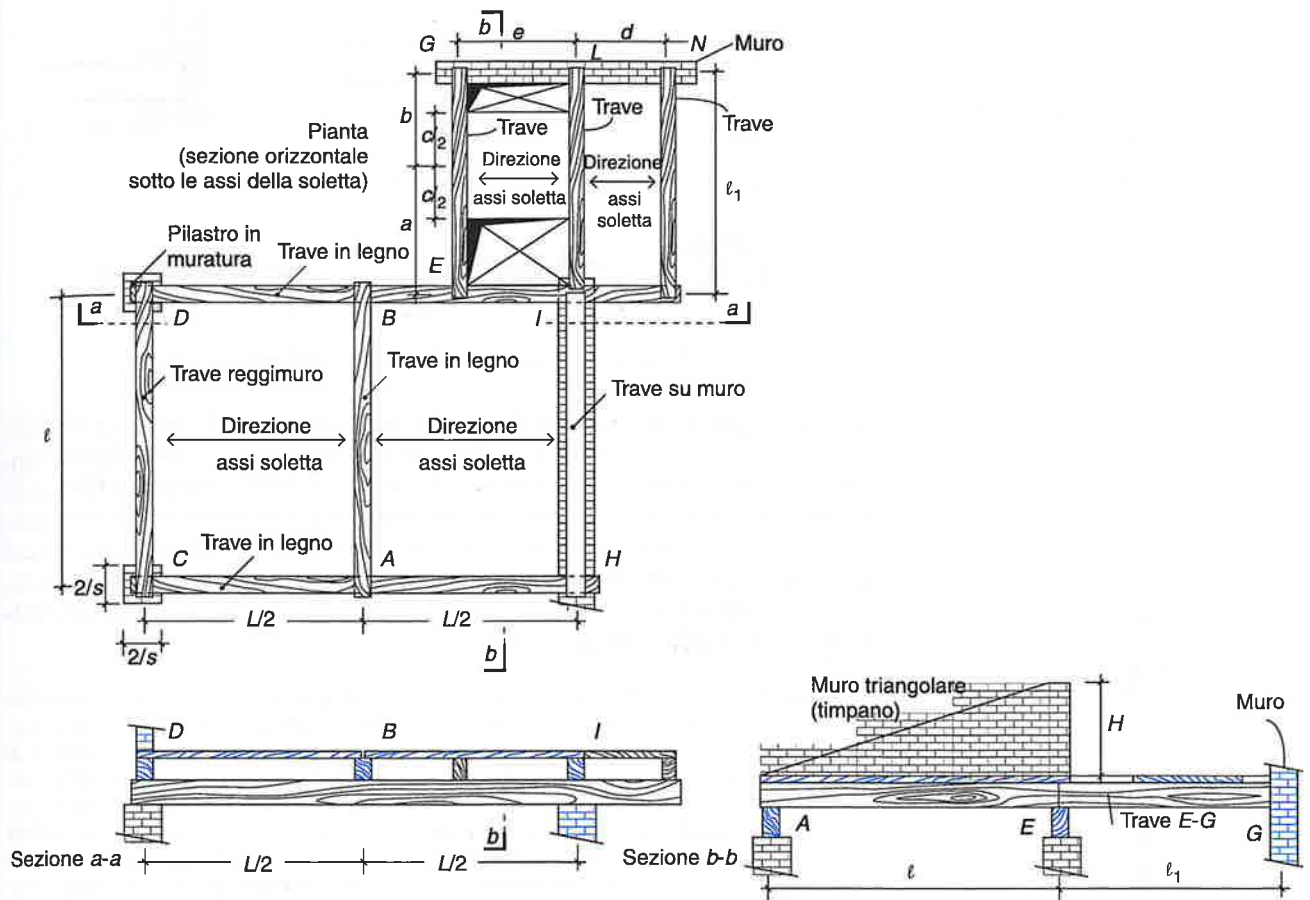


Figura 6.5

- due travi nella direzione  $a-a$ , sulle quali appoggiano le precedenti;
- due pilastri in muratura, sui quali appoggia la trave che porta il timpano;
- alcuni muri.

Le travi sono tutte orizzontali, in legno, ad asse rettilineo e sezione trasversale costante; i pilastri sono verticali, ad asse rettilineo e sezione trasversale rettangolare costante; i muri sono verticali, piani e a spessore costante.

Per valutare, in modo attendibile, la distribuzione delle forze interne in questa struttura è necessario costruirne un "modello strutturale" semplificato ma "fedele". La prima semplificazione che qui è possibile fare è la trasformazione della struttura, spaziale per sua natura, in più strutture piane mutuamente connesse e perciò interagenti: questa possibilità deriva da quella di sostituire le giunzioni reali con "vincoli ideali" dal comportamento noto.

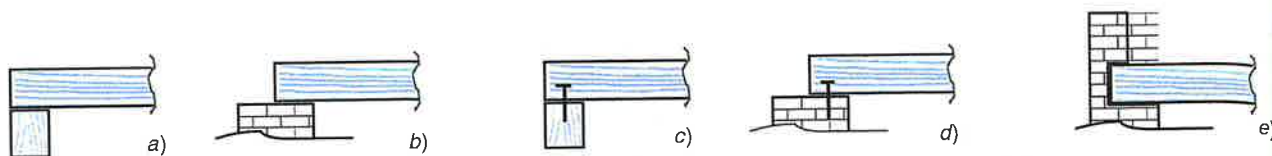


Questa modellazione, qui molto semplice, diventa più complessa quando c'è continuità del materiale, come per esempio nelle strutture in calcestruzzo armato.

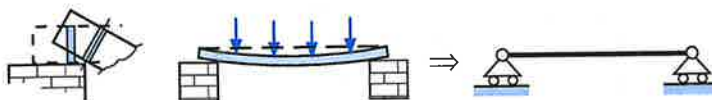
Nella struttura che qui è esaminata tutte le connessioni tra travi e travi e tra travi e muri hanno comportamento simile e possono quindi essere modellate dallo stesso vincolo ideale.

Per comprendere il comportamento della connessione, si può ragionare in termini di spostamenti impediti oppure in termini di forze che la connessione è in grado di trasmettere, come si è visto nel Capitolo 4.

*Schematizzazione della struttura in complesso*



In a) e b) la traslazione orizzontale è libera, in c), d) ed e) è "pochissimo" impedita; in tutti è libera la rotazione.



La sezione in corrispondenza del vincolo può traslare e ruotare.

Figura 6.6

Esemplificando le tecniche con le quali potrebbe essere realizzata la giunzione (solo appoggio, malta, chiodi, muro che continua superiormente o no: Figura 6.6), si vede che lo scorrimento orizzontale è libero o quasi e che certamente libera è la rotazione del concio di trave vincolato, spostamenti questi dovuti alla deformazione della trave e resi possibili sia dalla piccolezza della zona vincolata, sia dal cedimento degli eventuali elementi usati per realizzare la giunzione (mattoni, malta, chiodi): quindi il vincolo che è più corretto ipotizzare è il carrello a retta di scorrimento orizzontale (vedi Parentesi 5).

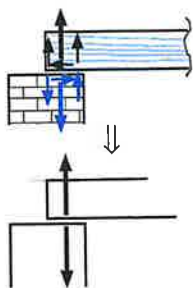


Figura 6.7

**Parentesi 5** Si arriva alla stessa conclusione ragionando in termini di forze che la connessione è in grado di trasmettere (Figura 6.7). È indubbio che attraverso la superficie di appoggio si trasmettono forze verticali; più azzardato è ipotizzare che l'eventuale sistema di connessione (mattoni, malta, chiodi) riesca a trasferire forze orizzontali apprezzabili; ancora più improbabile il trasferimento di momenti, che comunque richiederebbe sia un adeguato sistema di giunzione, sia una maggiore estensione della zona vincolata. Si conclude che la risultante di queste forze è essenzialmente una forza verticale, trascurando la piccola eventuale forza orizzontale e la piccola eventuale coppia. (Si veda in proposito anche la Parentesi 10 del Problema II.1).

In definitiva tutti i vincoli mutui, che collegano cioè le travi tra di loro o ai pilastri, sono schematizzabili come carrelli a retta di scorrimento orizzontale (i vincoli esterni di pilastri e muri sono discussi in seguito); questa schematizzazione consente senz'altro di analizzare le travi una per volta, iniziando naturalmente da quelle sulle quali agiscono le forze esterne note.



Non si può per esempio analizzare la trave C-H se prima non sono state determinate le reazioni trasmesse dalla trave A-B.

### 6.5.1 Problema I.1: trave A-B

*Descrizione delle forze attive*

Le forze attive che gravano su questa trave sono:

- il peso proprio che, essendo la trave a sezione rettangolare  $b \times h$  costante e di materiale che si può ritenere (con buona approssimazione) con peso specifico  $\gamma$  costante, è verticale, uniformemente distribuito e di intensità indicata con  $p = bh\gamma$ ;
- il peso trasmesso dalle assi della soletta che, avendo queste tutte la stessa lunghezza e trovandosi tutte nella stessa condizione di carico, si traduce in un carico verticale, uniformemente distribuito e di intensità indicata con  $q_0$  (Parentesi 6).

**Parentesi 6** Sulla soletta gravano sia il peso proprio, che è ragionevolmente distribuito uniformemente su tutta la sua superficie, sia il peso di persone e oggetti, che, pur occupando in generale solo una zona di essa, sono considerati per sicurezza nella condizione più