

Figura 4.51

- b) *Punto vincolato a una superficie.* Due sono i g.d.l. e le c.l. sono due, giacché l'equazione della superficie (Figura 4.52) è una relazione che lega fra loro le tre coordinate di P . Essa è l'equazione di vincolo.

In alcuni, peraltro notevolissimi, casi l'interesse è direttamente volto alle due c.l., essendo sottinteso che il punto ha da stare sulla superficie. Tipici sono i problemi geografici e astronomici: latitudine e longitudine sono le due coordinate che vengono assunte per individuare un punto sulla superficie terrestre; declinazione e ascensione retta sono le due coordinate che vengono assunte per individuare un astro sulla sfera celeste. Non dissimilmente, nel caso che abbiamo detto piano si sono direttamente individuate le due coordinate del punto sul piano.

Lo spostamento di P è individuato da due componenti scalari indipendenti.

- c) *Punto vincolato a una linea.* Uno solo è in questo caso il g.d.l. del punto, una la sua c.l. e una la componente che individua lo spostamento, in quanto le equazioni di una linea (nello spazio come nel piano) lasciano una variabile indipendente (per esempio l'ascissa curvilinea). Un modo di assegnare una linea nello spazio è di darle le equazioni in funzione di un parametro (s nella Figura 4.53) oppure di individuarla come intersezione di due superfici (sistema fra due equazioni in x, y, z). Le equazioni della linea (una coordinata indipendente qualunque ne sia la formulazione) sono le equazioni di vincolo.

- d) *Punto vincolato con tre pendoli (non complanari).* Ogni pendolo (o biella) vincola il punto alla superficie sferica di raggio uguale alla lunghezza del pendolo e toglie un g.d.l.

I tre pendoli vincolano perciò completamente la posizione del punto che geometricamente è individuata dall'intersezione fra tre superfici sferiche; analiticamente dal sistema che ne rappresenta le equazioni (tre equazioni di vincolo per le tre coordinate di P).

Il punto non ha g.d.l. ed è in condizioni isostatiche se le tre sfere non sono fra di loro tangenti.

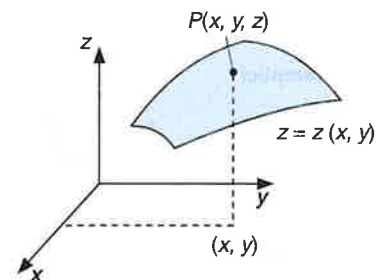


Figura 4.52

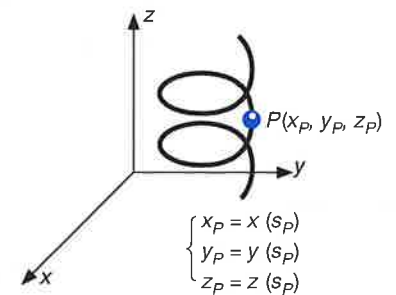


Figura 4.53

4.5 Vincoli e gradi di libertà: il corpo rigido e le strutture articolate

Dopo aver esaminato il caso del punto materiale, applichiamo gli stessi strumenti analitici al corpo rigido e alle strutture articolate.

Nel piano

- a) *Corpo rigido libero.* Si è già visto in modo intuitivo che un corpo rigido libero nel piano possiede tre g.d.l.

In termini più generali diremo che la configurazione di un corpo rigido nel piano, rispetto a un sistema di riferimento fisso OXY , è definita qualora sia definita la configurazione di una coppia d'assi $O'X'Y'$ solidali con il corpo rigido (Figura 4.54). Ciò significa assegnare le due coordinate dell'origine O' e i coseni direttori, di cui uno solo indipendente, degli assi X', Y' rispetto agli assi XY .

Ragionando in termini di spostamento, abbiamo già visto che tre sono le componenti dello spostamento rigido nel piano. Lo spostamento del libro (Figura 4.54), o di qualunque figura piana, si può realizzare con la traslazione $O'-O$ (due componenti) e con la rotazione φ attorno a O' (un componente).

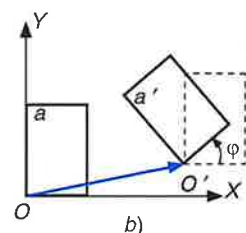
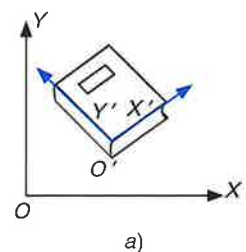
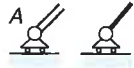

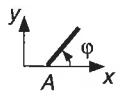
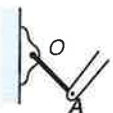
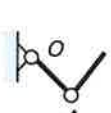
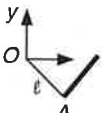







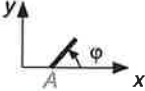
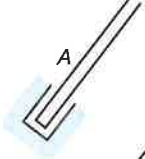


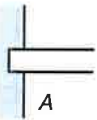




Figura 4.54

b) *Vincoli notevoli.* Nella Tabella 4.1 sono rappresentati alcuni vincoli notevoli nella loro schematizzazione grafica e analitica e nella loro funzione limitante la mobilità del corpo rigido tramite il numero di g.d.l. che a esso tolgono. Il corpo rigido è rappresentato con la parte iniziale di un'asta AB , ma potrebbe trattarsi di un qualunque corpo rigido nel piano. L'angolo φ va inteso come

Tabella 4.1

Vincolo	Schematizzazione grafica	Schematizzazione analitica	g.d.l. tolti
Vincoli semplici			
Carrello in A	 	 $y_A = 0$	1
Pendolo o biella OA	 	 $x_A^2 + y_A^2 = l^2 = \text{cost}$	1
Vincoli doppi			
Cerniera in A	  	 $\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}$	2
Pattino	  	 $\begin{cases} y_A = 0 \\ \varphi = \bar{\varphi} \end{cases}$	2
Manicotto	 	 $\begin{cases} y_A = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$	2
Vincolo triplo			
Incastro	 	 $\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$	3

vincoli notevoli
ne limitante
so tolgono. Il
ma potrebbe
u inteso come

g.d.l. tolti

angolo che una direzione solidale con il corpo rigido forma con una direzione fissa. È bene notare esplicitamente che la formulazione analitica dipende qualitativamente dal sistema di riferimento scelto, fermo restando il numero dei g.d.l. tolti al sistema.

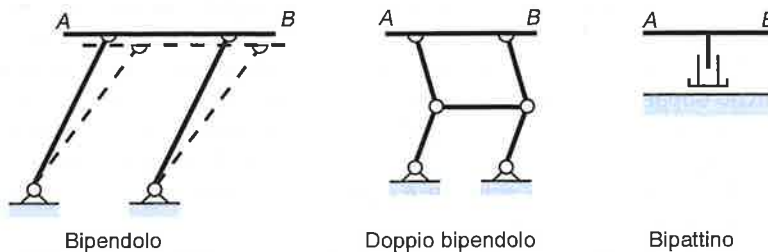
In relazione al numero di g.d.l. tolti, il carrello, la biella, il pendolo si diranno vincoli semplici; la cerniera, il pattino, il manicotto si diranno vincoli doppi; l'incastro vincolo triplo.

Un corpo rigido nel piano necessita di tre vincoli semplici, oppure di uno doppio e di uno semplice, oppure ancora di un vincolo triplo per essere posto in condizioni isostatiche (zero g.d.l.).

Connessioni meno usuali ma che possono convenientemente essere utilizzate in certi casi sono il *bipendolo* e il *doppio bipendolo* o *bipattino* (Figura 4.55). Il bipendolo consiste in due pendoli affiancati di ugual lunghezza; esso impedisce al corpo rigido sia di ruotare sia di traslare (virtualmente) nella direzione dei pendoli. È un vincolo doppio.

In questo senso il bipendolo è simile al pattino: per il pattino può essere c.l. l'ascissa di A, per il bipendolo la sua ascissa curvilinea.

Il doppio bipendolo o bipattino impedisce invece al corpo rigido (asta AB nella figura) solo la rotazione, lasciando libera ogni possibile traslazione. È un vincolo semplice. Possono assumersi come c.l. le due coordinate di un punto A. Il meccanismo del doppio bipendolo è del tutto simile a quello del tecnigrafo che consente il tracciamento di rette parallele.



Occorrono tre vincoli semplici per mettere in condizioni isostatiche un corpo rigido nel piano

Figura 4.55

c) *Strutture articolate e vincoli interni nel piano.* Considerazioni del tutto analoghe a quelle ora svolte valgono per i vincoli interni che collegano fra loro più corpi rigidi componenti una struttura articolata.

Anche una cerniera che colleghi fra loro due aste di una struttura è un vincolo doppio. Infatti, una volta assegnata la configurazione della prima asta, non occorre assegnare la posizione di quel punto della seconda asta (due coordinate) che è collegato alla precedente tramite la cerniera.

Così per esempio la semplice struttura articolata introdotta nella Figura 4.10, composta da due aste fra loro incernierate, ha quattro g.d.l.

Si noti però che *non sempre una cerniera toglie due g.d.l. alla struttura*. Se nella cerniera convergono n aste (Figura 4.56) essa viene a togliere due g.d.l. a ognuna delle $n-1$ aste successive alla prima, se è vincolo interno (Figura 4.56a), mentre toglie due g.d.l. a ogni asta, se è vincolo esterno (Figura 4.56b).

Una cerniera interna toglie perciò $2(n-1)$ g.d.l. alla struttura, una cerniera esterna ne toglie $2n$.

Analogamente a quanto visto per la cerniera interna, troviamo che un carrello (o pendolo o biella) interno, un pattino (o un bipendolo) interno sono rispettivamente un vincolo semplice e un vincolo doppio se connettono due aste ecc. Una regola piuttosto generale per procedere al conteggio dei g.d.l. di una struttura potrà consistere in due passi successivi: dapprima si analizza la struttura svincolata da terra; poi si conteggiano i g.d.l. tolti dai vincoli a terra.

Così, per esempio, se vincoliamo con due cerniere a terra la struttura di Figura 4.10 le togliamo i quattro g.d.l. ottenendo la notevolissima struttura isostatica di Figura 4.11: l'arco a tre cerniere.

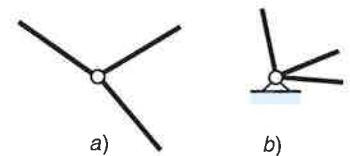


Figura 4.56

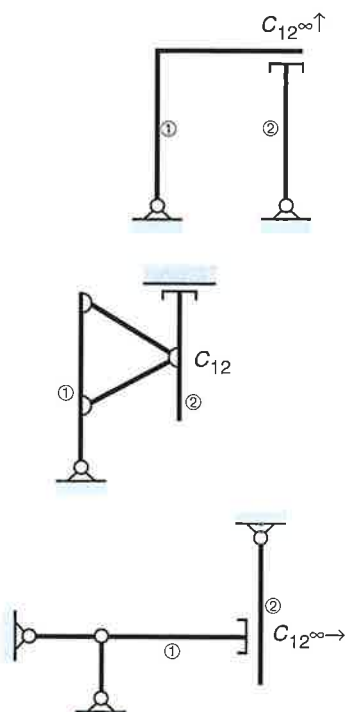


Figura 4.57

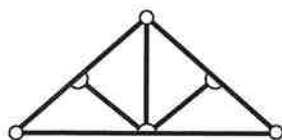


Figura 4.58

È sempre utilissimo, lo abbiamo già raccomandato, avere in mente alcune notevoli e ricorrenti tipologie strutturali. Una fra queste è certamente l'arco a tre cerniere ora ricordato. Si noti che qualora le tre cerniere fossero allineate la struttura sarebbe un arco a tre cerniere degenere, non più isostatico. Per esso varrebbero le considerazioni già svolte al Paragrafo 4.4, caso e): i vincoli sarebbero in condizioni di labilità.

Cinematicamente equivalente all'arco a tre cerniere, e quindi anch'essa isostatica, è una qualunque struttura articolata in cui si possano riconoscere due corpi rigidi vincolati rispettivamente a terra con vincolo doppio e fra di loro con un altro vincolo doppio. Così analizzate sono "archi a tre cerniere" le strutture di Figura 4.57, dove si è indicato con C_{12} la "cerniera" che collega i due corpi rigidi ① e ② componenti l'arco, nonché il portale di Figura 4.8. Un'altra notevole tipologia strutturale, cinematicamente equivalente a un corpo rigido, e quindi con tre g.d.l., è un insieme di tre corpi rigidi vincolati fra loro con tre vincoli doppi. Caso esemplare è la capriata, schematicamente già rappresentata nella Figura 4.4. Qualora si aggiungano vincoli interni, come nella Figura 4.58, la struttura conserva i suoi tre g.d.l. ma ha vincoli interni non "essenziali": diventa, come diremo, internamente iperstatica.

Altri esempi di strutture cinematicamente equivalenti a un solo corpo rigido sono rappresentate nella Figura 4.59. Le strutture *a*, *b*, *e*, *f*, hanno vincoli interni che sono essenziali e ben messi per conseguire la indeformabilità: si dicono *internamente isostatiche*. La struttura *a* è cinematicamente equivalente al triangolo di Figura 4.4: è costituita da tre aste rigide vincolate fra loro con tre vincoli doppi. Per brevità chiameremo "*anello isostatico*" una struttura siffatta qualunque siano la forma delle singole aste e la natura dei tre vincoli, purché doppi e ben messi. La struttura *a* si può vedere come un arco a tre cerniere *ABC* collegato all'asta rigida *AC*. La struttura *b* è costituita da un'asta rigida collegata all'altra con vincolo doppio e vincolo semplice. Anch'essa è "*anello isostatico*", così come lo è ogni circuito chiuso indeformabile, con vincoli interni "ben messi".

La struttura *e* è costituita da un arco a tre cerniere collegato a un anello isostatico; la struttura *f*, è costituita ancora da una struttura del tipo *e* su cui è impostato un successivo arco a tre cerniere: ha la configurazione tipica di una travatura reticolare.

Le strutture *c*, *d*, sono invece esempi in cui i vincoli interni sono sovrabbondanti per conseguire la indeformabilità: si dicono *internamente iperstatiche*.

La struttura *c* è costituita da un triangolo isostatico *ABC* a cui il corpo rigido *AC* è vincolato con due vincoli doppi; la struttura *d* è costituita da un solo corpo rigido che è vincolato (diciamo inutilmente) su se stesso.

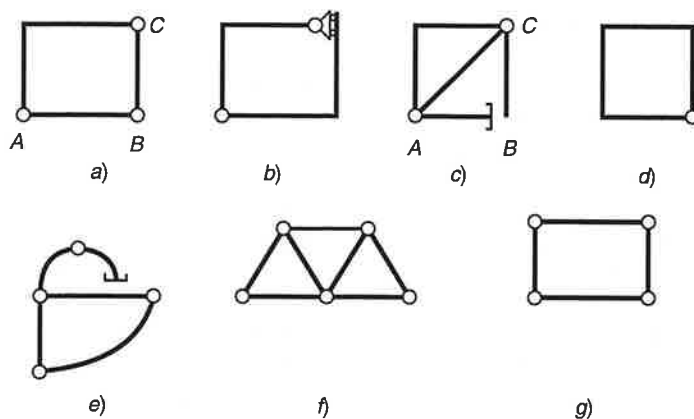


Figura 4.59

Tutte le strutture cinematicamente equivalenti a un sol corpo rigido, che siano internamente iso- o iper-statiche, hanno tre g.d.l. (nel piano). Per vincolarle a terra in modo che non abbiano più alcun g.d.l. occorrono, come per il singolo corpo rigido, tre vincoli semplici.

La differenza fra condizioni interne di vincolo iso- e iper-statiche si rileverà nella ricerca delle azioni interne.

La presenza di iperstaticità interna renderà impossibile la ricerca delle azioni interne (conservando l'ipotesi di rigidità dei componenti). E così accade anche per la ricerca delle reazioni vincolari esterne, nel caso di iperstaticità dei vincoli esterni.

La presenza di iperstaticità comporta sempre indeterminazione del problema statico nell'ipotesi di rigidità dei componenti strutturali.

Anelli del tipo g, costituiti da corpi rigidi vincolati in modo da non formare un tutt'uno rigido, si dicono *internamente ipostatici*.

Nello spazio

- a) *Corpo rigido libero*. Come per il caso piano, anche per il caso tridimensionale assegnare la configurazione significa assegnare un sistema di riferimento solidale con il corpo rigido rispetto a un sistema di riferimento fisso.

In tre dimensioni ciò significa assegnare l'origine, e cioè un punto (tre coordinate), e i nove angoli che gli assi formano con la terna fissa (ciascun asse è individuato da tre angoli), di cui solo tre sono indipendenti (vedi Appendice A). Il corpo rigido in tre dimensioni ha perciò sei g.d.l. In termini di spostamento abbiamo visto che sei sono le componenti di uno spostamento rigido generale (rototraslatorio).

Gli angoli più cospicui che si usa assumere come c.l. sono gli angoli di Eulero ψ , ϑ , ϕ che hanno rispettivamente i nomi di angolo di *precessione*, di *nutazione*, di *rotazione propria*.

Per portare la terna $OXYZ$ nella configurazione $OX'Y'Z'$ si può infatti ruotare la terna dapprima attorno all'asse Z di un angolo ψ , e con ciò l'asse X va su di un'asse che si dice asse dei nodi n (Figura 4.60); poi attorno all'asse dei nodi di un angolo ϑ , e con ciò l'asse Z va in Z' e il piano XY in un piano π che interseca il precedente secondo l'asse dei nodi; infine si aggiustano gli assi $X'Y'$ su tale piano ruotando attorno a Z' di un angolo ϕ .

Si pensi per esempio a una macchina fotografica montata su di un cavalletto. Per inquadrare il soggetto, la macchina deve essere posta nella configurazione a' , a partire dalla configurazione a (Figura 4.61).

Ciò può essere ottenuto in tre tempi con le tre rotazioni rappresentate in Figura 4.61. Si noti che queste tre rotazioni tengono fisso il punto O . La loro composizione è perciò ancora una rotazione. Non conoscendo in anticipo quale sia l'asse di rotazione essa è individuata da tre componenti scalari.

- b) *Vincoli notevoli*. La *cerniera sferica* (Figura 4.62) fissa un punto A lasciando liberi i tre angoli; consente cioè la più generale rotazione (attorno a un qualunque asse). Toglie tre g.d.l.

Per contrapposizione la *cerniera piana* (Figura 4.63) fissa un punto A e tutt'un asse con A lasciando libero un solo angolo; consente cioè solo la rotazione attorno a un

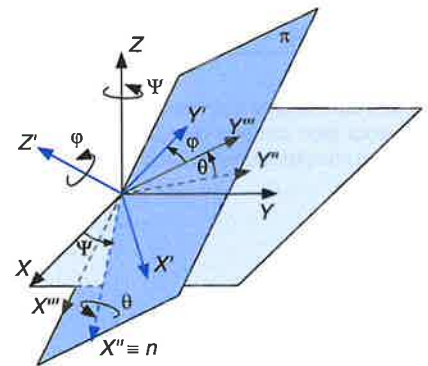


Figura 4.60

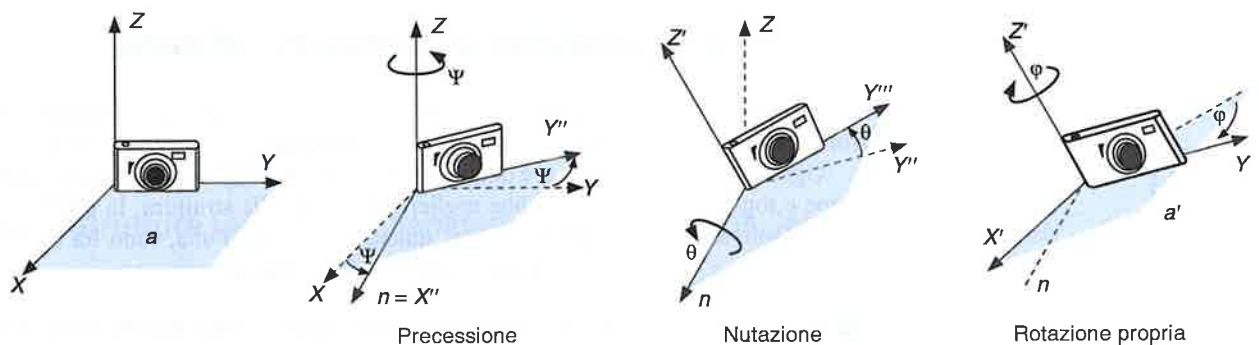


Figura 4.61



Figura 4.62

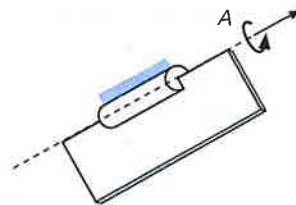


Figura 4.63

particolare asse fisso. Può essere realizzata con un perno infilato in un manicotto senza possibilità di scorrimento. Toglie cinque g.d.l.

Il *manicotto* e l'*incastro* possono definirsi anche in tre dimensioni. Il manicotto (Figura 4.64), come nel caso piano, lascia libera la coordinata di A lungo l'asse di scorrimento ma, a differenza che nel caso piano, anche l'angolo di rotazione attorno all'asse è c.l. Toglie quattro g.d.l. L'incastro (Figura 4.65) non lascia c.l. al corpo rigido. Toglie sei g.d.l.

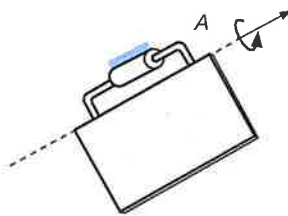


Figura 4.64

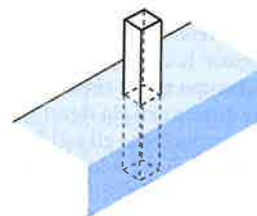


Figura 4.65



Asta (rettilinea)
in condizioni isostatiche

Figura 4.66

- c) *L'asta in tre dimensioni.* La configurazione di un'asta rettilinea nello spazio a tre dimensioni è identificata dalla posizione di un suo punto (tre coordinate) e dalla sua direzione, cioè dai tre angoli, di cui due indipendenti, che l'asta forma con gli assi di riferimento. L'asta ha cinque g.d.l.

In termini fisici di spostamento, osserviamo che l'asta, in quanto considerata perfettamente monodimensionale, manca di rotazione propria. L'asta perciò, in tre dimensioni, non è rappresentativa, a differenza di quanto accade in due dimensioni, di un qualunque corpo rigido.

Per quanto detto, l'asta vincolata con due cerniere sferiche è perciò in condizioni iperstatiche. È invece isostatica se vincolata per esempio con cerniera e un piano appoggio (Figura 4.66). Si noti che questo è il motivo per cui un corpo rigido nello spazio non è in condizioni isostatiche se vincolato con due cerniere sferiche: i vincoli sono in eccesso per fissare l'asse congiungente le due cerniere e lasciano libera una coordinata angolo di rotazione attorno all'asse. Il corpo rigido con asse fissato in due punti è ipostatico con vincoli in condizioni iperstatiche.



L'asta non rettilinea acquista per così dire un g.d.l.: essa ha rotazione propria significativa; ha sei g.d.l. (vedi Paragrafo 4.4).

4.6 Vincoli in condizioni di iperstaticità e di labilità

Precisiamo infine le due questioni relative ai vincoli, questioni cui abbiamo più volte accennato indicando casi di vincoli "sovrabbondanti" e di vincoli "ben messi".

Ogni vincolo (*olonomo*), si è detto, è analiticamente rappresentato da un'equazione e toglie (o meglio: vorrebbe togliere) un g.d.l. alla struttura. In effetti ciò accade solo se le equazioni di vincolo, quando siano più d'una, sono fra di loro indipendenti e formano un sistema di equazioni determinato.

Quando invece le equazioni di vincolo siano fra di loro dipendenti, i vincoli si dicono in condizioni di **iperstaticità** e i g.d.l. tolti alla struttura sono in numero minore del numero delle equazioni di vincolo.

Fisicamente ciò significa che alcuni vincoli verrebbero a togliere alla struttura g.d.l. già tolti da altri vincoli. In questo senso essi risultano sovrabbondanti. Ciò non significa affatto che essi siano sovrabbondanti nel senso di inutili al comportamento fisico (geometrico e statico) della struttura. Il fatto è che il modello rigido è, per così dire, incapace di apprezzare l'aiuto che la struttura riceve dai vincoli non "essenziali".

Solo tenendo conto della deformabilità della struttura si potrà capire come la struttura sappia fruire dell'apporto di vincoli aggiuntivi. Deformandosi essa "sa" come sollecitare il contributo statico di ciascun vincolo.

L'iperstaticità che è di interesse nell'analisi strutturale compete a strutture non aventi g.d.l. ($n = 0$) (Figura 4.67 casi a, b). Ma anche strutture ipostatiche aventi g.d.l. ($n \neq 0$), possono avere vincoli sovrabbondanti. Ciò accade ogni volta che i g.d.l. da essi tolti complessivamente sono in numero minore della somma dei g.d.l. che ciascun vincolo toglierebbe singolarmente (Figura 4.67c, d).

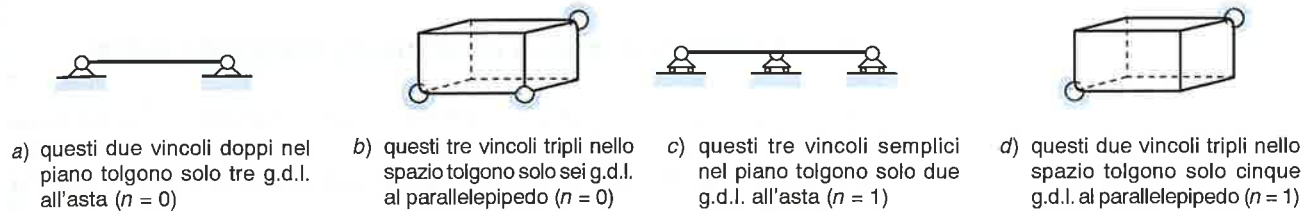


Figura 4.67

L'altra questione riguarda i vincoli "non ben messi".

■ Può accadere che i vincoli blocchino, sì, alcune coordinate ma ne consentano variazioni infinitesime del primo ordine, variazioni che corrispondono a spostamenti virtuali della struttura. Quando ciò accade si dice che i vincoli sono in condizioni di *labilità*.

In linguaggio matematico ciò significa che le equazioni che si ottengono differenziando le equazioni di vincolo, e cioè, come più brevemente diremo, le *equazioni differenziali di vincolo*, formano un sistema indeterminato; consentono cioè soluzioni arbitrarie diverse da zero per i differenziali di quelle coordinate che sono bloccate, nel finito, dai vincoli stessi (si riveda al Paragrafo 4.4 il caso e)).

Fisicamente ciò significa che qualche tipo di spostamento, pur non essendo possibile, ha un "accenno di possibilità iniziale".

Esempi di labilità sono rappresentati nella Figura 4.68.

Riassumendo: i vincoli sono in condizioni di labilità se consentono variazioni infinitesime a coordinate che sono bloccate nel finito dai vincoli stessi.

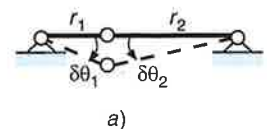
I vincoli sono in condizioni iperstatiche se (le equazioni che li rappresentano) sono in numero maggiore dei g.d.l. che essi tolgono alla struttura.

Nell'ipotesi di modello rigido degli elementi strutturali, entrambi i casi rendono indeterminato il problema statico.

4.7 Strutture ipostatiche, isostatiche, iperstatiche, labili

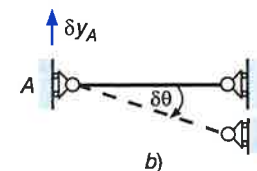
Nel paragrafo precedente abbiamo visto definizioni riguardanti le condizioni di vincolo. Vediamo ora definizioni che riguardano le strutture.

Si è visto che vincoli sovrabbondanti o in condizioni di labilità possono competere a strutture che abbiano oppure non abbiano g.d.l. Definiamo *ipostati-*



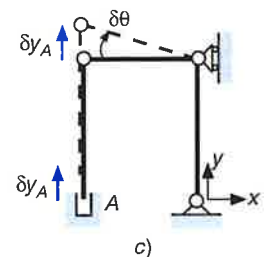
$$n = 0$$

$$\theta = 0; \delta\theta \neq 0$$



$$n = 1 \quad (y_A \text{ è c.l.})$$

$$\theta = 0; \delta\theta \neq 0$$



$$n = 0$$

$$y_A = 0; \delta y_A \neq 0$$

Figura 4.68

che le strutture che, qualunque siano le condizioni di vincolo, hanno qualche g.d.l.: $n \neq 0$. Definiamo *isostatiche* le strutture che, con vincoli che non sono né in condizioni di labilità né sovrabbondanti, non posseggono g.d.l.: $n = 0$. Definiamo *iperstatiche* le strutture che, con vincoli sovrabbondanti, non posseggono g.d.l.: $n = 0$. Definiamo *labili* le strutture che, con vincoli in condizioni di labilità, non posseggono g.d.l.: $n = 0$.

Con queste definizioni le strutture *a* e *c* di Figura 4.68 sono labili; l'asta *b* è ipostatica; inoltre *b* presenta labilità e *c* iperstaticità nelle condizioni di vincolo. Le strutture ipostatiche o labili si usano chiamare anche *meccanismi o catene cinematiche*.

■ Con le suddette definizioni le strutture isostatiche e iperstatiche (nell'ipotesi di componenti rigide) non hanno possibilità di spostamento alcuno né nel finito né nell'infinitesimo e sono pertanto equilibrate per ogni situazione di carico.

4.8 Analisi cinematica di strutture articolate piane

Nel Capitolo 3 si è già affrontato il problema statico per strutture articolate piane isostatiche, ma solo ora disponiamo dello strumento per analizzare se la struttura sia in condizioni isostatiche. Esso consiste nell'*analisi degli spostamenti o analisi cinematica*.

Ricordiamo che

■ lo spostamento virtuale piano di ogni componente rigido, qualora sussista, è rotatorio attorno a un punto che si dice centro di istantanea rotazione e che può essere eventualmente all'infinito (lo è se lo spostamento è traslatorio). Tale centro non subisce spostamento virtuale: esso si comporta, istantaneamente, come una "cerniera", eventualmente una "cerniera fittizia", che può appartenere oppure no al corpo rigido ma è comunque solidale con esso.

Così l'asta *CD* di Figura 4.7, le aste *CD* ed *EF* di Figura 4.9, la panchina panoramica di Figura 4.25 hanno c.i.r. ("cerniera fittizia") all'infinito in direzione verticale; le aste *AB* delle Figure 4.39 e 4.43 hanno, istantaneamente, una "cerniera" in *C*. Il pattino (Tabella 4.1) costituisce per il corpo rigido una "cerniera" all'infinito in direzione normale alla retta di scorrimento del pattino. In questo senso ogni vincolo doppio costituisce una "cerniera". Così anche due bielle costituiscono, istantaneamente, per il corpo rigido che esse vincolano, una "cerniera". Per esempio le due bielle *AC* e *BD* di Figura 4.69 costituiscono, per il corpo ①, una "cerniera" in C_1 , nel senso che l'atto di moto di ① è rotatorio attorno a C_1 .



Con il termine "biella", nell'analisi cinematica, si intende un vincolo semplice costituito da un'asta che collega due cerniere, anche nel caso in cui qualche cerniera sia all'infinito.

Per esempio nella Figura 4.69b, *AC* è "biella" fra le due cerniere *A* e $C_\infty \uparrow$ (il pattino in *C* è equivalente a una cerniera in $C_\infty \uparrow$); la "biella" *AC* determina la direzione dello spostamento δA di *A*, così come la biella *BD* determina la direzione dello spostamento δB di *B*. Le due "bielle" costituiscono, per il corpo ①, una "cerniera" in C_1 .

Dall'analisi cinematica, lo si ricordi, è esclusa ogni valutazione sulle forze. Si osservi ora l'insieme di due componenti rigidi di una struttura.

Alcuni vincoli, invece, tipicamente il semplice appoggio, impediscono solo variazioni di coordinate di un dato segno e non di segno opposto; in termini fisici, impediscono spostamenti di punti in certe direzioni solo con un verso e non con verso opposto.

Per esempio, se per un'asta, in un punto A , sussiste un vincolo di *semplice appoggio* al suolo, essa può essere sostenuta dall'appoggio ma non trattenuta da esso. In termini di costrizione geometrica ciò si esprime, nel sistema di riferimento di Figura 4.74a, con la disequazione $y_A \geq 0$: l'asta potrebbe sollevarsi e il vincolo venir meno. Finché il vincolo sussiste è $y_A = 0$; quando fosse $y_A > 0$ il vincolo non sussisterebbe più.

Analogamente se il pendolo è realizzato con un filo inestensibile AO , esso impedisce al punto A (Figura 4.74b) di allontanarsi da O , ma non può impedirgli di avvicinarsi. Nel sistema di riferimento polare della figura, se l è la lunghezza del filo finché il vincolo sussiste è $r = l$; quando fosse $r < l$ il vincolo non sussisterebbe più.

Anche in termini di variazioni (infinitesime) di coordinate i vincoli unilateri si esprimono con disequazioni. Per gli esempi di Figura 4.74

$$dy_A \geq 0 \quad \text{e} \quad dr_A \leq 0 \quad \text{sono variazioni concesse dal vincolo}$$

$$dy_A < 0 \quad \text{e} \quad dr_A > 0 \quad \text{sono variazioni impedita dal vincolo.}$$

Alle suddette disequazioni riguardanti la funzione geometrica dei vincoli unilateri, vedremo corrispondere disequazioni riguardanti la funzione statica: i vincoli unilateri possono intervenire con forze (reazioni vincolari) aventi un verso e non il verso opposto. La situazione limite, al di là della quale il vincolo e l'equilibrio vengono meno, è data ponendo il segno di eguaglianza.

D'ora in poi i vincoli si intenderanno bilateri a meno che non sia esplicitamente detto che si tratta di vincoli unilateri.

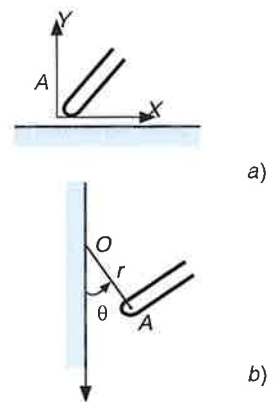


Figura 4.74

4.10 Vincoli e reazioni vincolari

Nei precedenti paragrafi si è studiata la funzione geometrica dei vincoli: quale costrizione alla mobilità del sistema essi esercitino. Vediamone ora l'aspetto statico. In altre parole: come fanno i vincoli a realizzare la costrizione geometrica che essi impongono al sistema materiale?

Accettiamo come postulato (lo si è già enunciato e applicato nei Capitoli 2 e 3) che essi esercitino delle forze, forze che diciamo *reazioni vincolari* (r.v.): "reazioni", in quanto esse non hanno valore predeterminato ma dipendono dalla sollecitazione (attiva) con cui vengono chiamate in causa. Se inoltre i vincoli sono più d'uno il valore delle r.v. dipende anche da come i vincoli si distribuiscono i compiti per far fronte, tutti assieme, alla sollecitazione attiva.

Si è man mano argomentato che ogni vincolo (olonomo) per riuscire, diciamo così, nell'intento di togliere un g.d.l. fornisce una componente (scalare) di reazione vincolare. Con ciò una componente scalare di spostamento rigido viene bloccata.

Quest'ultima affermazione è però da intendersi con qualche cautela. È certamente valida istante per istante nell'intorno di ogni possibile configurazione. Potrebbe però non essere valida nel campo degli spostamenti finiti (si veda il prossimo caso b).

È più precisa la seguente affermazione: *ogni vincolo (olonomo), considerato singolarmente, toglie un g.d.l. e conseguentemente una componente (almeno virtuale) di spostamento rigido; con ciò fornisce una componente (a priori incognita) di reazione vincolare.*

Vediamo in particolare come ciò accada per i vincoli già passati in rassegna. Indicheremo con X_i la generica componente (incognita) di r.v.; assumeremo un'asta AB come esempio di corpo rigido nel piano (Tabella 4.2).

Nel piano

- a) Il *carrello* toglie all'asta AB un g.d.l. e fornisce una forza reattiva di direzione nota, quella perpendicolare alla retta di scorrimento del carrello, e cioè fornisce una componente (scalare) di reazione vincolare incognita: X_1 . Viene bloccata la componente di traslazione perpendicolare alla retta di scorrimento.

Al corpo rigido restano due c.l., per esempio x_A e α (vedi Tabelle 4.1 e 4.2), cui corrispondono le due componenti di spostamento: traslatorio nella direzione y ; rotatorio attorno all'asse per A perpendicolare al piano (attorno ad A , come si usa dire brevemente).

Ragionando in termini di unico spostamento rotatorio cui lo spostamento dell'asta AB può sempre ridursi, osserviamo che il carrello impone al centro di istantanea rotazione dell'asta di appartenere alla retta a perpendicolare per A alla retta di scorrimento del carrello, cosicché anche per questa via constatiamo che all'asta AB restano ∞^2 possibilità di spostamenti: infinite rotazioni attorno a infiniti possibili centri appartenenti alla retta a (vedi Tabella 4.2).

- b) Il *pendolo o biella*, non dissimilmente dal carrello, toglie all'asta AB un g.d.l. e fornisce una forza reattiva di direzione nota, quella del vincolo stesso, e cioè fornisce una componente (scalare) di reazione vincolare incognita: X_1 . Viene bloccata la componente di traslazione virtuale nella direzione del vincolo. L'interesse di rivolgere l'attenzione agli spostamenti infinitesimi appare chiaramente da questo esempio (Figura 4.75).

All'asta AB il pendolo OA certamente non impedisce rotazioni, ma neppure impedisce traslazione alcuna, nel finito (compatibilmente con la lunghezza del pendolo). L'asta AB può traslare in $A'B'$ oppure anche in $A''B''$ se la traslazione è finita. La traslazione può avere direzione qualunque, in corrispondenza a tutte le possibili rotazioni della biella OA . Quel che il vincolo OA non consente all'asta è una traslazione virtuale in direzione OA da AB ad A^*B^* e cioè: a partire da ogni configurazione una biella impedisce una traslazione virtuale nella sua direzione.

In corrispondenza a ciò il vincolo fornisce una forza diretta come il pendolo stesso; essa è di direzione nota ma non costante. In ogni configurazione uno spostamento elementare di direzione nota viene bloccato. Al corpo rigido restano due c.l., per esempio gli angoli α e β di Tabella 4.2; a essi corrispondono due componenti scalari di spostamento per l'asta: un incremento $\delta\alpha$ (fermo restando β) è per l'asta una traslazione $r\delta\alpha$ in direzione normale al pendolo (se r è la lunghezza del pendolo); un incremento $\delta\beta$ (fermo restando α) è una rotazione virtuale attorno ad A .

Ragionando in termini di unico spostamento rotatorio cui lo spostamento virtuale dell'asta può ridursi, poiché dA è perpendicolare a OA , il pendolo impone al c.i.r. dell'asta di appartenere alla retta OA ma non ne individua la posizione, cosicché anche per questa via constatiamo che all'asta AB restano ∞^2 possibilità di spostamenti: infinite rotazioni attorno a infiniti possibili centri situati su OA .

- c) La *cerniera* toglie due g.d.l. e interviene con due componenti di r.v. All'asta AB resta un c.l., per esempio l'angolo α (Tabella 4.2), le cui variazioni danno spostamenti rotatori attorno ad A , mentre vengono vietate entrambe le componenti di traslazione.
- d) Il *pattino* toglie due g.d.l. e interviene con due componenti di r.v. (Tabella 4.2). Per rendersene conto si può immaginare il pattino realizzato con due carrelli affiancati e capaci quindi di fornire due forze parallele entrambe perpendicolari alla comune retta di scorrimento dei carrelli. Queste due forze sono equivalenti a un'unica forza, sempre con la stessa direzione, più un momento. All'asta AB resta una c.l., per esempio l'ascissa del punto A , le cui variazioni danno traslazioni in direzione della retta di scorrimento del pattino.

Si noti che, pur indicando le componenti di r.v. come applicate in A , è necessario che il pattino sia realizzato con una certa estensione attorno ad A per garantire la generazione di un momento da parte del pattino.

Se poi i punti attraverso cui il pattino fa pervenire le forze, anziché due, sono un segmento continuo, le conclusioni non cambiano. L'insieme (continuo) di forze esplicitate dal pattino è equivalente a una forza in $A(X_1)$ e a un momento rispetto ad $A(X_2)$. L'estensione del pattino attorno ad A è, si è detto, indispensabile per giustificare il momento fornito dal pattino; se infatti le forze fornite dal vincolo fossero rigoro-

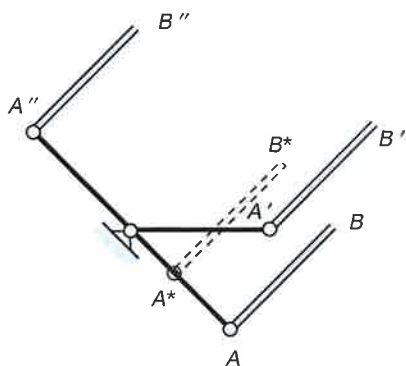
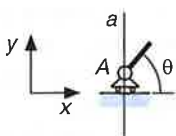

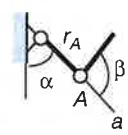


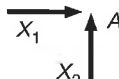
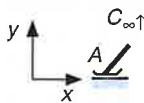
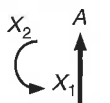
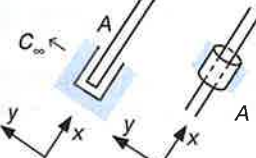
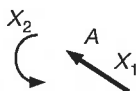
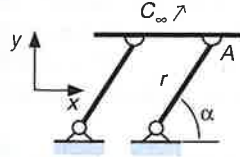
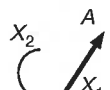
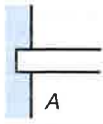
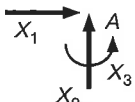


Figura 4.75

Tabella 4.2 Funzione statica e geometrica dei vincoli: vincolo singolo, caso rigido piano.

Vincolo (in due dimensioni)	Componenti incognite di r.v.	g.d.l. c.l.	Componenti di spostamento virtuali (eventualmente finite)	
			Impedite	Concesse
Vincoli semplici (tolgono un g.d.l.)				
		2 per esempio x_A, ϑ	Traslazione normale alla retta di scorrimento del carrello (1)	Traslazione orizzontale + rotazione attorno ad A; riducibili a unica rotazione $\delta\vartheta$ attorno a un punto di a
		2 per esempio α, β	Traslazione nella direzione della biella (1)	Traslazione $r\delta\alpha$ normale alla biella + rotazione $\delta\beta$ attorno ad A; riducibili a unica rotazione $\delta\beta$ attorno a un punto di a
Vincoli doppi (tolgono due g.d.l.)				
		1 per esempio α	Qualunque traslazione (2)	Rotazione attorno ad A
		1 per esempio x_A	Traslazione normale a x + qualunque rotazione (2)	Traslazione parallela a x ovvero rotazione attorno a $C_{\infty}\uparrow$
		1 per esempio x_A	Traslazione normale a x + qualunque rotazione (2)	Traslazione parallela a x ovvero rotazione attorno a $C_{\infty}\nwarrow$
		1 per esempio $x_A (= r \cos \alpha)$	Traslazione δr nella direzione dei pendoli + rotazione(2)	Traslazione $r\delta\alpha$ normale ai pendoli ovvero rotazione virtuale attorno a $C_{\infty}\nearrow$
Vincolo triplo (toglie tre g.d.l.)				
		0	Traslazioni + rotazioni (3)	Nessuna

mente applicate in un sol punto A non potrebbero avere momento rispetto a esso. È tuttavia da notare, inoltre, che ogni vincolo ha necessariamente una certa estensione. Quelle che chiamiamo reazioni vincolari sono, come detto all'inizio, le caratteristiche globali delle forze distribuite sulla regione di contatto fra vincolo e struttura: la risultante e il momento rispetto al punto a cui il vincolo è ridotto.

Del tutto analoga a quella del pattino è la funzione del *manicotto*, nonché quella del *bipendolo*, con la sola differenza, per quest'ultimo, che la direzione della forza segue quella dei pendoli.

- e) L'*incastro* toglie tre g.d.l. e interviene con tre componenti di r.v. La funzione dell'incastro generalizza quella dei vincoli precedenti. L'incastro sa fornire il più generale sistema di forze che è rappresentabile, per l'equivalenza, con una forza e un momento.

Riassumendo: quel che accade in questi esempi è del tutto generale. Ogni vincolo semplice (olonomo) toglie un g.d.l. e fornisce una componente di r.v. (incognita); toglie una componente scalare di spostamento virtuale. Tale componente di spostamento può eventualmente essere finita e non solo virtuale. Ciò di solito accade se la direzione della r.v. è indipendente dalla posizione. Va inoltre precisato che per "componente scalare" di r.v. deve intendersi sia una componente di forza che una componente di momento. Esse sono coniugate, rispettivamente, a una coordinata lineare e a una coordinata angolare. La Meccanica analitica le tratta unitariamente come componenti generalizzate di sollecitazione (vedi Paragrafo 4.12). Il motivo fisico sostanziale del perché ciò accada si capirà alla luce del principio dei lavori virtuali (Paragrafo 4.12).

4.11 Attrito, vincoli lisci, vincoli perfetti

L'attrito è una particolare forma di vincolo, nel senso che esso esercita una certa costrizione alla mobilità. Non diminuisce tuttavia i g.d.l. del sistema.

Se per esempio un punto è vincolato a una linea scabra esso viene, sì, ostacolato nel suo eventuale spostamento lungo la linea, ma tale spostamento continua a essere possibile. Il punto possiede un g.d.l. e una c.l., senonché la c.l. non è, per così dire, del tutto libera e non sempre può essere utilizzata. In termini di forze ciò significa che il vincolo è in grado di fornire non solo un componente di forza X_n normale al vincolo ma anche un componente X_t a esso tangente. L'esperienza mostra che l'entità di tale forza tangente dipende da quanto il punto è premuto contro la guida dalle forze attive, nonché dalla natura dei corpi a contatto.

Lo stesso dicasi se il vincolo è rappresentato da una superficie: una componente tangente alla superficie può insorgere e potrà essere tanto più grande quanto maggiore è la compressione contro la parete.

Ben sappiamo per esempio che quando da una libreria preleviamo tutt'assieme una fila di libri stringendola orizzontalmente fra le mani dobbiamo tenere ben pressati i libri l'un contro l'altro se non vogliamo che caschino. Con ciò facciamo affidamento sull'attrito che si esercita fra le nostre mani e i libri e fra libro e libro e cerchiamo di non allentare la presa proprio per garantire forze d'attrito sufficienti (Figura 4.76).

D'altronde, l'esperienza mostra che X_t non può superare una certa frazione di X_n , dipendente dalla scabrosità del vincolo.

In formule, dalle esperienze di Coulomb e di Morin in poi, la relazione (empirica) di compatibilità fra le due componenti della reazione vincolare si scrive

$$|X_t| \leq \mu |X_n| \quad (4.12)$$

Il coefficiente di proporzionalità μ (adimensionale) dipende dalla natura dei corpi a contatto e cresce con le loro rugosità. In Tabella 4.3 sono riportati alcuni valori di μ , che si è sempre sperimentalmente riscontrato essere < 1 .

Si noti tuttavia che non sussistono veti concettuali ad accettare valori $\mu > 1$. Anzi, qualora la rugosità fra le superfici a contatto sia molto elevata, tanto da realizzare qualcosa di simile a un ingranaggio, i valori di μ sarebbero ben maggiori di 1.

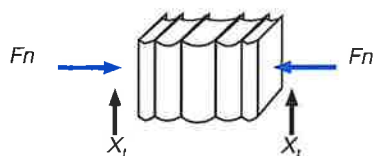


Figura 4.76

Tabella

Terra-ca
Sabbie,
Terre ve
Detriti r
Pietre-p
Mattoni
Metallo-
Metallo-
Acciaio-

La (4.1
come n
essa p
certam

Sp
come t
dichia

Si i
contatt

La

cono d
della c
di equi
narsi r
giunge

Un'ult
brio. Il
dire le
tangen

come s
strisci
più so

riacqu
di vinc

Ne

senza
svolge
reazio
nibili"
richie
drà sia

No

condo

O meg

non po

scabra

re), to

rotazi

stame

intuiti

to δO

Se

disco

non sa

Tabella 4.3 Coefficienti d'attrito statico (valori medi).

Terra-calcestruzzo	
Sabbie, argille	0,3
Terre vegetali (asciutte)	0,4
Detriti rocciosi	0,6
Pietre-pietre calcaree rugose	0,75
Mattone-mattone	0,5
Metallo-metallo o metallo-legno (levigati)	0,2
Metallo-metallo (lubrificati)	0,07
Acciaio-ghiaccio	0,03

La (4.12) può essere descritta geometricamente: la reazione vincolare \mathbf{X} non è, come nel caso di vincolo liscio, perpendicolare alla superficie (o linea) di contatto; essa può essere inclinata; non più però di un certo angolo α che, con $\mu < 1$, è certamente $< 45^\circ$ (Figura 4.77).

Spingendo oltre l'interpretazione geometrica della (4.12), si interpreti μ come tangente trigonometrica di un angolo chiamato *angolo d'attrito* che indichiamo con φ (Figura 4.78).

Si individui il cono circolare retto avente per asse la normale alla superficie di contatto e di apertura φ : esso si chiama cono d'attrito.

La (4.12) sta a significare che la reazione vincolare \mathbf{X} non può essere esterna al cono d'attrito. Per una data componente della sollecitazione normale, al crescere della componente tangente della sollecitazione attiva, deve crescere, in condizioni di equilibrio, la componente X_t della reazione vincolare, e cioè la r.v. \mathbf{X} deve inclinarsi rispetto alla normale n alla superficie di contatto. Quando l'inclinazione raggiunge quella delle generatrici del cono, la situazione di equilibrio è quella limite. Un'ulteriore, sia pur leggero, incremento di forza attiva tangente rompe l'equilibrio. Il punto di contatto può allora spostarsi lungo il vincolo e riacquista per così dire le sue coordinate libere lungo la superficie di contatto. Finché la forza attiva tangente non pretende di infrangere la (4.12) il vincolo si comporta, localmente, come se fosse una cerniera (istante per istante). In altre parole non può esserci strisciamento fra le due superfici a contatto. Qualora invece la (4.12) non sia più soddisfatta diventa possibile lo spostamento tangente: come se il punto riacquistasse la sua c.l. lungo la linea di vincolo (o le sue c.l. lungo la superficie di vincolo).

Nell'esame dei vincoli precedenti, lisci, avevamo descritto le reazioni vincolari senza preoccuparci del valore (in modulo) che esse avrebbero assunto e senza svolgere considerazione alcuna sull'equilibrio. Ciò in quanto le componenti di reazione vincolare sono, nel caso di vincoli lisci olonomi, completamente "disponibili": assumeranno il valore che lo stato di sollecitazione generale del sistema richiederà e bloccheranno in ogni caso alcune coordinate; e, fra l'altro, così accadrà sia in condizioni di quiete che in condizione di moto del sistema.

Non così accade per i vincoli scabri, per la cui analisi siamo stati naturalmente condotti a qualche considerazione sull'equilibrio. Essi non sono vincoli olonomi. O meglio lo sono "a tratti". Si pensi per esempio al disco, nel piano, che possa o non possa strisciare lungo la guida (Figura 4.14). Se la guida fosse "idealmente" scabra, quasi a realizzare una specie di cremagliera per il disco (μ grande a piacere), toglierebbe due g.d.l. al disco. Il punto di contatto sarebbe centro di istantanea rotazione per il disco (con spostamento virtuale nullo istante per istante). Lo spostamento virtuale del disco sarebbe in ogni istante individuato (come si era detto intuitivamente all'inizio del capitolo) dall'angolo di rotazione $\delta\varphi$ e lo spostamento $\delta\mathbf{O}$ del centro O del disco sarebbe uguale a $r\delta\varphi$ (Figura 4.14).

Se la guida fosse liscia toglierebbe un solo g.d.l. e lo spostamento virtuale del disco sarebbe individuato da due componenti indipendenti: lo spostamento $\delta\mathbf{O}$ non sarebbe più legato alla rotazione $\delta\varphi$. Il disco avrebbe due g.d.l.

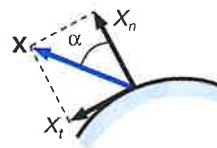


Figura 4.77

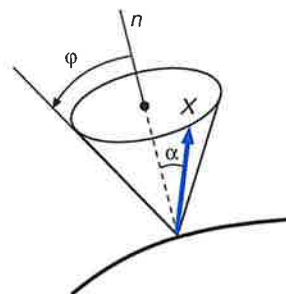


Figura 4.78

Se la guida è scabra, ma con i soliti valori di $\mu < 1$, essa permetterà o no di slittare (e cioè toglierà uno o due g.d.l.) a seconda delle forze impresse. Ben sappiamo infatti che guidando su strada ghiacciata dobbiamo accelerare molto delicatamente per non slittare!

Oppure ancora, per continuare con qualche divagazione non strettamente necessaria alla comprensione della Statica ma utile, sì, a capire fenomeni meccanici della vita di tutti i giorni e, magari, a migliorare i nostri comportamenti di guida, chiediamoci cosa accade quando si “sgomma” su strada (Figura 4.79). Si pretende dall’attrito, accelerando troppo, quella componente tangente che esso non è in grado di fornire, col risultato che la ruota acquista un g.d.l. e slitta sulla strada entrando in regime d’attrito dinamico (con velocità relativa non nulla nel “punto” di contatto fra ruota e pavimento stradale). Si noti fra l’altro che il tutto è quanto mai deleterio perché, oltre a produrre uno spiacevole stridio e a consumare i copertoni, non dà affatto giovamento alla velocità di avanzamento, in quanto il coefficiente d’attrito dinamico è minore di quello statico! Perciò la preziosa componente tangente (è lei che garantisce l’avanzamento del veicolo) è minore quando si “sgomma”!

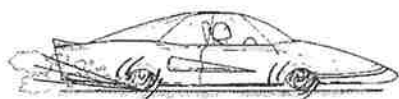


Figura 4.79

Tornando a più scolastiche riflessioni sui vincoli, diciamo che i vincoli scabri sviluppano forze che non sono completamente disponibili a fornire le componenti che sarebbero richieste dalle forze attive. Ciò a differenza dei vincoli lisci olonomi, i quali garantiscono a priori certe componenti di reazioni vincolari nonché l’annullarsi di certe componenti di spostamento, indipendentemente dal fatto che il sistema sia in equilibrio oppure no.

Tuttavia, ricordiamolo, nell’effettivo comportamento della struttura, sarà da tenere in conto il fatto che tutti i vincoli non hanno una illimitata capacità di resistenza. Potranno avere cedimenti o addirittura venir meno se eccessivamente sollecitati. L’analisi di tali comportamenti coinvolge considerazioni diverse da quelle finora svolte: considerazioni inerenti la diffusione degli sforzi nella struttura e nei sistemi materiali che realizzano i vincoli. Esse saranno oggetto di un ulteriore passo nell’analisi strutturale.

Abbiamo preso per esempio di vincolo scabro il vincolo di un semplice appoggio, a una linea o a una superficie, in quanto esso è il più significativo da tenere in conto nella Statica delle costruzioni. Si pensi per esempio a quei materiali non solidi, in cui è debole la connessione fra elemento ed elemento, come la sabbia o la terra. La tipica forma a cono che essi assumono quando assemblati è dovuta proprio alle forze d’attrito che si esercitano fra granello e granello di sabbia, fra zolla e zolla di terra, che possono essere considerati semplicemente appoggiati l’uno sull’altro. La forma a cono assunta è l’immagine stessa del cono d’attrito del materiale.

Problemi tipici della Statica delle costruzioni che coinvolgono valutazioni sull’attrito sorgono proprio laddove la costruzione è a contatto con materiale terroso, oppure è essa stessa costituita di tale materiale (si pensi alle dighe in terra) o di materiali scarsamente legati fra loro, come accade per le vecchie costruzioni.

Le fondazioni, per esempio di un normale edificio, sono “appoggiate” sul terreno. La sollecitazione orizzontale F_t che l’edificio riceve, e che esso trasmette al terreno, è sostanzialmente contrastata dall’attrito fra il terreno e la base del plinto di fondazione (Figura 4.80). Inoltre l’assestamento che il terreno fa, in verticale, sotto la pressione dell’edificio è contrastata, all’interno del terreno, grazie all’attrito fra granello e granello.

Un muro di contenimento (Figura 4.81) deve contrastare la “spinta delle terre”, che ha componente orizzontale diversa da zero; componente che dipende dal coefficiente d’attrito proprio del terreno.

Le vecchie costruzioni in muratura presentano scarsa coesione in verticale fra mattone e mattone (Figura 4.82). Esse sopportano spinte orizzontali (e le soppor-

tano m
mente
Nel
dell’att
favore
Una
una for
patibili
dal coe
Cur
visibile
fare aff
cernier
tuno “c
cernier

o no di slittare
Ben sappiamo
o delicatamen-

rettamente ne-
neni meccanici
menti di guida,
(9). Si pretende
esso non è in
tta sulla strada
lla nel "punto"
l tutto è quanto
onsumare i co-
o, in quanto il
preziosa com-
è minore quan-

i vincoli scabri
le componenti
i lisci olonomi,
ri nonché l'an-
dal fatto che il

uttura, sarà da
apacità di resi-
sivamente sol-
verse da quelle
a struttura e nei
di un ulteriore

emplice appog-
vo da tenere in
i materiali non
ne la sabbia o la
i è dovuta pro-
abbia, fra zolla
ppoggiati l'uno
'attrito del ma-

ono valutazio-
o con materiale
i alle dighe in
vecchie costru-

ggiate" sul ter-
so trasmette al
e la base del
l terreno fa, in
el terreno, gra-

ta delle terre",
ne dipende dal

in verticale fra
li (e le soppor-

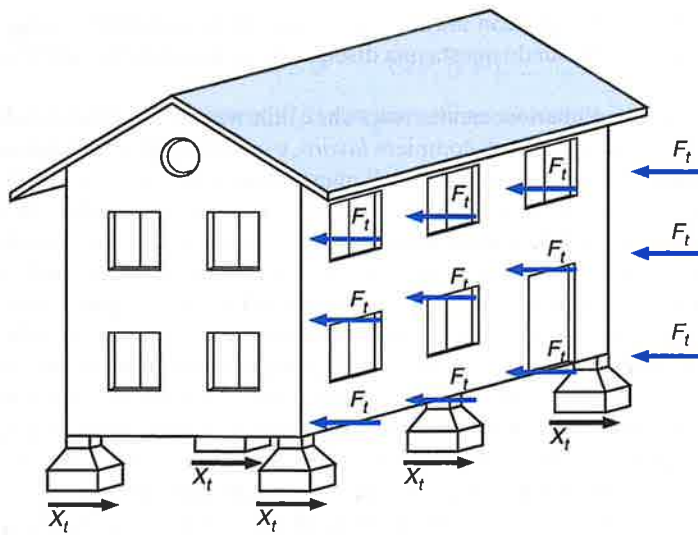


Figura 4.80

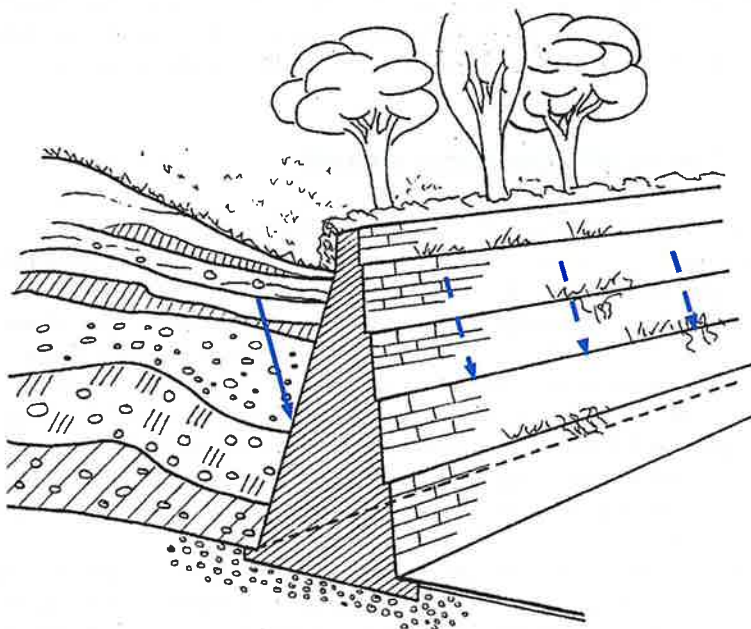


Figura 4.81

tano male) in gran parte grazie all'attrito fra mattone e mattone, in modo concettualmente non dissimile dal comportamento della pila di libri di Figura 4.76.

Nell'analisi strutturale potrà anche in qualche caso essere importante tener conto dell'attrito dei vincoli interni alla struttura. Esso infatti, se sussiste, può agire a favore o a sfavore dell'assetto statico della struttura.

Una cerniera con attrito per esempio può fornire anche un momento oltre che una forza X ; ma, in modo del tutto analogo alla (4.12), vale una relazione di compatibilità per cui il momento non può superare un certo valore dipendente da X e dal coefficiente d'attrito.

Curioso è l'esempio offerto dal Tower Bridge di Londra (Figura 4.83). È ben visibile la sua struttura, consistente in arco a tre cerniere (rovesciato), che vuol fare affidamento, nelle sue piccole deformazioni, sul perfetto funzionamento della cerniera intermedia. Posto in bell'evidenza nei suoi dipressi, sta infatti un opportuno "oliatore", il quale provvede a mantenere la qualità di vincolo liscio alla cerniera di mezz'aria!

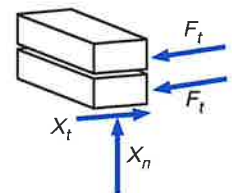


Figura 4.82

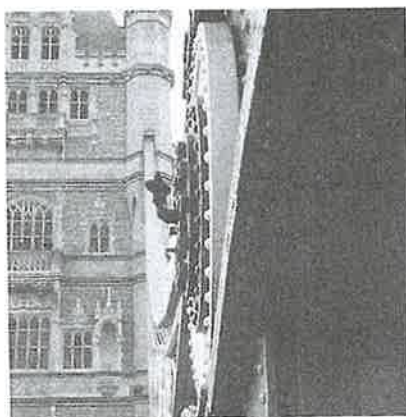


Figura 4.83

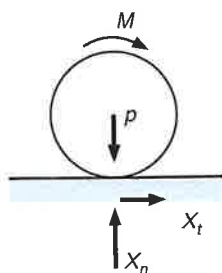


Figura 4.84

In presenza di appoggio con attrito, alle equazioni di equilibrio va aggiunta la condizione (4.12); essendo questa una disequazione, le soluzioni equilibrate sono infinite.

Vediamo ora un'ulteriore caratteristica che è utile mettere in evidenza nell'analisi dei vincoli: la loro capacità di compiere *lavoro*, e quindi il loro coinvolgimento nel bilancio energetico. A considerazioni di questo genere si è implicitamente accennato commentando l'usura del copertone, nonché lo stridio, in fase di "sgommamento". Tali fenomeni infatti altro non sono che dissipazione d'energia attraverso i vincoli. In Statica l'interesse verso un eventuale lavoro delle reazioni vincolari appare nel principio dei lavori virtuali (PLV) che fra poco enunceremo. Dicesi *vincolo perfetto* un vincolo che non possa compiere lavoro virtuale alcuno. Le due categorie che ora si vengono a configurare (vincoli perfetti o no) non coincidono con le due precedenti categorie (vincoli lisci o scabri). Accade sempre che i vincoli lisci non possano compiere lavoro virtuale alcuno e quindi siano perfetti. Ma anche qualche vincolo scabro può essere perfetto. Esempio significativo è quello del disco che rotola senza strisciare, introdotto nella Figura 4.14 e qui rappresentato nella Figura 4.84 sotto l'azione di un sistema di forze che possono rappresentare la situazione della ruota di un veicolo in fase di avvio. Se la scabrosità e l'entità delle forze impresse garantiscono il puro rotolamento, il punto di contatto C è c.i.r. per il disco e perciò il lavoro della r.v. X è nullo per spostamento virtuale. Il vincolo di appoggio con puro rotolamento è scabro e perfetto.

4.12 Il principio dei lavori virtuali

Siamo ora in grado di affrontare in termini rigorosi e generali il problema dell'equilibrio dei sistemi materiali grazie a un principio che governa l'equilibrio di qualsivoglia sistema materiale. È il principio dei lavori virtuali (PLV): esso vede coniugati assieme i concetti geometrici che abbiamo esaminato (spostamenti virtuali) e i concetti statici (forze) nel fornire generalissime condizioni di equilibrio. Esso rappresenta un metodo alternativo, rispetto alle equazioni cardinali, dell'analisi dell'equilibrio: anziché valutare il contrastarsi delle forze, il PLV "saggia" il comportamento del sistema "immaginando" uno spostamento dalla sua configurazione, uno spostamento virtuale. Se e solo se, per tale spostamento, le forze non hanno modo di compiere lavoro positivo, dirà il PLV, la configurazione "saggiata" è di equilibrio.

Il PLV è, appunto, un *principio*: un'affermazione "vera" che trova conferma nell'esperienza e nella constatazione che, in tutti i casi in cui si conoscano le condizioni di equilibrio, il principio implica tali condizioni e viceversa. È singolare ed estremamente interessante la storia della conquista di questo principio.

La sua validità non appare a prima vista così "ragionevole ed evidente" come per quei postulati che, essendo propri di specifici sistemi materiali, appaiono di maggior evidenza sperimentale. Tuttavia, sia pur in modo impreciso, il PLV si palesa nella storia della Meccanica fin dai suoi primordi. Esso si può intravedere addirittura nella trattazione che Archimede fa dell'equilibrio della leva. Si è andato poi sviluppando nei secoli a opera di Giordano Memorario, Stevino, Galileo, Torricelli, Cartesio e Wallis.

La scoperta della applicabilità generale del PLV a qualunque problema di equilibrio è dovuta a Jean Bernoulli (1717), che ne scrisse in una lettera a Varignon. L'enunciato che ora diamo del principio è quello proprio della Meccanica Analitica, dovuta nella sua formulazione matura al Lagrange (1736-1783).

■ Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di ogni sistema materiale a vincoli perfetti è che non sia positivo il lavoro virtuale delle forze attive per il più generale spostamento virtuale.