

Distribuzione continua di forze e continui deformabili 5

In questo capitolo si prendono in considerazione le forze distribuite con continuità e si introducono i continui deformabili.

- Si definisce il concetto di densità di forza: forza per unità di volume, di superficie, di lunghezza, e si commentano in particolare i concetti di sforzo e di pressione.
- Si estende al caso continuo il calcolo dei baricentri e si enunciano i teoremi di Pappo-Guldino.
- Si risolvono i problemi statici già affrontati nel caso di forze concentrate; in particolare si calcolano reazioni vincolari e azioni interne di strutture isostatiche.
- Si introducono alcuni concetti base della Statica dei continui deformabili. Si enuncia il teorema di Cauchy e si definisce il tensore degli sforzi.

5.1 Densità di forza e sforzo

Si è già più volte avuto occasione di dire che le forze, così come sono effettivamente applicate alle strutture, non sono concentrate in punti, bensì distribuite su zone che hanno una certa estensione e che possono consistere in linee, superfici o volumi. Tali zone, o campi, di applicazione delle forze saranno unitariamente indicate con C e sono porzioni del sistema materiale, il quale va pensato come il *continuo* definito nel Paragrafo 2.3.

Esempio cospicuo sono le forze peso; esse sono distribuite con continuità in tutto il volume C occupato dal corpo. *Agli effetti dell'equilibrio del corpo rigido* esse possono, sì, essere sostituite dal peso totale applicato in un punto, il baricentro; non in quanto tale forza concentrata esista, ma in quanto essa è "equivalente" alle forze peso distribuite.

Anche in altri casi è utile e fisicamente sensato pensare a forze concentrate, ma se vogliamo studiare lo stato di salute del sistema al suo interno, gli sforzi e le deformazioni messe in atto per sopportare le forze, le forze stesse vanno esaminate nella loro distribuzione continua.

Per questo, da Cauchy in poi, noi analizziamo un continuo materiale C pensandolo scomposto in infinite parti infinitesime dC , ciascuna sottoposta a una forza infinitesima $d\mathbf{F}$. Il linguaggio è quello dell'analisi infinitesimale.

Nel modello continuo la sollecitazione è un "insieme di infinite forze infinitesime" $d\mathbf{F}$ e non più un insieme di forze finite \mathbf{F}_i come accadeva nel caso discreto. Mentre nel caso discreto le forze \mathbf{F}_i sono applicate in punti P_i che formano un insieme discreto, nel caso continuo le forze $d\mathbf{F}$ competono a elementi infinitesimi di campo dC che nel loro insieme formano un campo continuo C .

Per forze distribuite le densità, lineare o superficiale o di volume, sono anche dette forze per unità di lunghezza o di superficie o di volume. È anche usato il termine intensità come sinonimo di densità

A ogni punto P non è più associata una forza bensì una densità di forza. Precisamente:

■ si consideri un elemento di campo ΔC e la forza ΔF che a esso compete; il limite del loro rapporto quando la misura di ΔC tende a zero, per il rinserrarsi di ΔC attorno a un sol punto P , è una grandezza finita f che si dice densità di forza; in formule

$$\lim_{\Delta C \rightarrow P} \frac{\Delta F}{\Delta C} = \frac{dF}{dC} = f(P). \quad (5.1)$$

Ciò significa che in ipotesi di continuità la forza e l'elemento di campo cui essa compete sono infinitesimi dello stesso ordine. Si noti che all'elemento infinitesimo dC abbiamo associato forze infinitesime, non coppie. Ciò coerentemente alla concezione Newtoniana di continuo che nell'operazione di limite riduce l'elemento infinitesimo a un punto e non permette di pensare al braccio di una coppia (vedi il Paragrafo 2.3). Sono però anche studiati in letteratura modelli di continui cosiddetti polari in cui possono aver luogo coppie infinitesime di volume.

La densità di forza viene ad avere significati e dimensioni diverse a seconda di quale sia il campo C di applicazione delle forze. Le dimensioni di $f(f)$ sono $[FL^{-3}]$, $[FL^{-2}]$, $[FL^{-1}]$ a seconda che C sia volume, superficie, linea ed f a volte viene anche detta intensità della forza oppure forza per unità di volume, superficie e lunghezza. La (5.1) si scrive anche, ovviamente,

$$dF = f(P)dC. \quad (5.2)$$

La densità f ha un notevolissimo significato nel caso di forze superficiali, cioè applicate ad aree: essa è lo sforzo, in P , relativo all'areola dC su cui la forza $f(P)dC$ insiste.

Casi tipici di forze superficiali sono le forze applicate con continuità sulla superficie di contorno di un corpo, che si dicono, appunto, forze di superficie. Ma sono forze superficiali anche, e di precipuo interesse, quelle forze interne che da una parte all'altra due porzioni contigue di un qualunque sistema materiale si trasmettono attraverso l'area di confine. Anzi, per lo speciale interesse che le forze interne rivestono nella meccanica dei continui la loro densità superficiale viene spesso identificata con la nomenclatura specifica di tensione e indicata con $t(P)$.

Nel caso di aste (o travi) le azioni interne che abbiamo analizzato sulle sezioni trasversali altro non sono che risultante e momento (rispetto al baricentro della sezione) di tutte le forze interne infinitesime $f(P)dC$ (o $t(P)dC$) che attraverso le areole dC della sezione le due parti di trave si trasmettono.

Nel caso tridimensionale ha interesse considerare tutte le possibili superfici elementari passanti per ogni punto P , ciascuna con la propria giacitura. In generale le forze di scambio attraverso tali diverse superfici elementari, a due a due uguali e contrarie, cambiano al cambiare dell'areola passante per P . Cosicché il concetto di vettore sforzo è associato, oltre che al punto P , anche alla giacitura della superficie elementare o, il che è equivalente, alla normale \mathbf{n} alla sezione (Figura 5.1). La normale \mathbf{n} , volta secondo una convenzione scelta, individua un'areola dC attorno a P attraverso la quale si scambiano due forze infinitesime opposte, entrambe di modulo $f^{(n)}(P)dC$. Occorre specificare quale di due vettori sforzo, opposti, si intenda individuare con $\mathbf{f}^{(n)}(P)$. Individuato il versore \mathbf{n} in modo arbitrario, lo si pensi materialmente applicato in P ; è convenzione generale intendere che $\mathbf{f}^{(n)}$ sia lo sforzo che, attraverso l'areola, la parte contenente \mathbf{n} esercita sulla parte che non contiene \mathbf{n} .

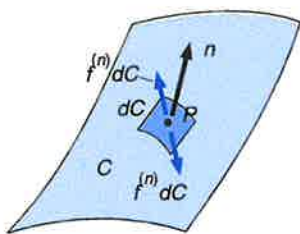


Figura 5.1

i forza. Precisa-

esso compete; il
per il rinserrarsi
dice densità di

(5.1)

campo cui essa
mento infinite-
coerentemen-
di limite riduce
il braccio di una
atura modelli di
nitesime di vo-

re a seconda di
[f] sono $[FL^{-3}]$,
f a volte viene
ne, superficie e

(5.2)

superficiali, cioè
la forza $f(P)dC$

continuità sulla
re di superficie.
le forze interne
è sistema mate-
eciale interesse
oro densità su-
ca di tensione e

ato sulle sezioni
baricentro della
che attraverso le

ssibili superfici
citura. In gene-
ari, a due a due
r P . Cosicché il
e alla giacitura
e n alla sezione
elta, individua
rte infinitesime
ale di due vettor-
o il versore n in
venzione gene-
arte contenente

Ovviamente non occorre pensare il versore come un oggetto materiale e in modo più accademico si usa identificare $f^{(n)}$ (o $t^{(n)}$) come lo sforzo che la parte che vede n entrante esercita sulla parte che vede n uscente.

Si osservi ancora che, con la convenzione adottata, se l'angolo tra n e $f^{(n)}(P)$ è acuto oppure ottuso lo stato di sforzo ha carattere di tensione oppure di compressione.

■ Vengono individuati infiniti vettori sforzo (o tensioni) in ogni punto P che, presi nel loro insieme, definiscono lo stato di sforzo in P e che impareremo a descrivere sinteticamente con un tensore, il tensore degli sforzi (vedi Paragrafo 5.10).

Se il punto P appartiene alla superficie di contorno, fra le infinite areole per P c'è l'areola tangente la superficie di contorno. Essa non seziona il corpo: attraverso a essa la forza infinitesima proveniente dall'interno si oppone a quella porzione infinitesima di forza di superficie proveniente dall'esterno.

Se quest'ultima è nulla (superficie libera) è nullo anche il relativo sforzo $f^{(n)}(P)$.

Notevole caso particolare è quello dei fluidi perfetti, in cui il tensore degli sforzi diventa isotropo; in cui cioè tutti i valori $f^{(n)}(P)$ sono uguali fra loro. Tutti i vettori sforzo $f^{(n)}(P)$ hanno carattere di compressione. Il concetto di sforzo si particolarizza nel concetto di pressione:

$$f^{(n)}(P) = -pn \quad \forall n \quad (5.3)$$

Essa assume carattere scalare, essendo il modulo p comune agli infiniti vettori $f^{(n)}$ in P .

È questo particolare sforzo che familiari strumenti misurano quando controllano la pressione sanguigna di un paziente o la pressione nelle gomme di un'automobile. Sono anche familiari esempi di sforzo la pressione nell'atmosfera o in una massa acquosa.



Il fatto che le forze di scambio attraverso una sezione siano opposte è conseguenza immediata del terzo postulato di Newton, non dell'equilibrio. Il principio di azione e reazione vale anche in Dinamica! Ovviamente i valori degli sforzi in condizioni di moto sono diversi da quelli in condizioni di equilibrio.

Qualunque sia il continuo materiale considerato, lo sforzo (o pressione come caso particolare) ha dimensioni $[FL^{-2}]$; è, come si usa anche dire, una forza per unità di superficie.

La densità di forza $f(P)$ è invece forza per unità di lunghezza qualora si tratti di forze distribuite con continuità su elementi monodimensionali, tipicamente su aste. A proposito di aste vale la pena sottolineare, per evitare confusioni, che il peso proprio è sempre una forza esterna distribuita nel volume e il modulo della sua densità (scalare) per unità di volume è il peso specifico p_s . Ma è comodo fare riferimento anche alla densità del peso proprio per unità di lunghezza (o densità lineare del peso) pur essendo ovviamente definita e non nulla l'area A della sezione. Tale densità spesso indicata con la lettera q anziché f (sempre in modulo) è legata come segue al peso specifico p_s , al peso totale p e alla lunghezza l dell'asta

$$f = q = p_s A = p/l \quad (5.4)$$

in caso di omogeneità. La (5.4) verrà ancora discussa nel Paragrafo 5.10.3.

Nella Figura 5.2 è rappresentato un carico distribuito con continuità lungo un'asta di lunghezza l : carico uniforme (caso a), carico triangolare (caso b), ca-

Sforzo in un punto P di una superficie è il limite del rapporto tra la forza agente sulla superficie e l'area stessa quando l'area tende a zero rinserrandosi attorno a P

La pressione è un caso particolare di sforzo

rico distribuito con legge qualunque, continua (caso c). Il punto P in cui è definita la densità di forza è individuato dalla sola ascissa x . Nel caso, di precipuo interesse, in cui il carico sia costituito da forze parallele equiverse (carichi verticali) la formulazione vettoriale diviene superflua: del vettore \mathbf{f} si dà solo il modulo ed è consuetudine che esso venga indicato, come la densità lineare del peso proprio, con q (ma anche diversamente; sovente anche con la stessa lettera p con cui è d'uso indicare i pesi). Cosicché la formulazione vettoriale $\mathbf{f}(P)dC$ dà luogo alla semplice formulazione scalare $q(x)dx$: è questo il carico che compete all'elemento dx (Figura 5.2e). L'affermazione resta valida ovviamente anche se l'asta è disposta verticalmente (Figura 5.2d) o secondo altra direzione. nella formulazione scalare si continuerà a chiamare densità (lineare) della forza il modulo $q(x)$ del vettore densità $\mathbf{f}(P)$.

Nel caso generale di forze non parallele occorrerà far riferimento alla formulazione vettoriale mettendo in evidenza le due componenti di \mathbf{f} (due, se il problema è piano). Anche le componenti scalari si continueranno a chiamare densità.

5.2 Risultante, momento, centro di distribuzioni continue

Le grandezze già definite per sistemi discreti di forze (risultante, momento, centro di forze parallele, ...) restano concettualmente le stesse, ma il loro calcolo avviene secondo gli algoritmi dell'Analisi infinitesimale anziché dell'Algebra. Così per esempio la risultante è un integrale anziché una sommatoria:

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(P) dC; \quad (5.5)$$

■ nella forma scalare idonea a trattare il caso di forze unidirezionali, come per esempio nella Figura 5.2, è

$$R = \int_0^l q(x) dx. \quad (5.6)$$

Anche il momento rispetto a un punto O è un integrale

$$\mathbf{M}_O = \int_C (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{f}(P) dC; \quad (5.7)$$

■ nella formulazione scalare idonea a trattare il caso piano, come per esempio nella Figura 5.2, se O è l'estremo sinistro dell'asta, è

$$M_O = \int_0^l x q(x) dx \quad (5.8)$$

Il *centro delle forze parallele* di Figura 5.2 è (con origine nell'estremo sinistro dell'asta)

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x q(x) dx}{\int_0^l q(x) dx}. \quad (5.9)$$

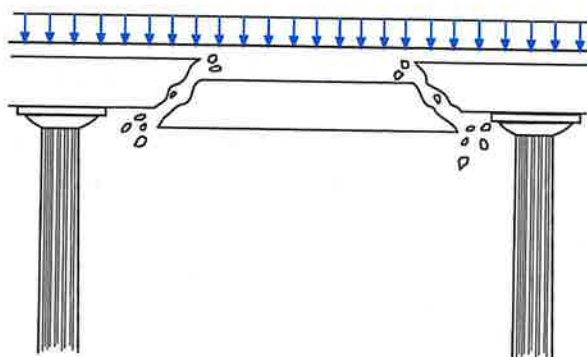


Figura 5.22

a)

b)

5.10.3 Riassumendo

Nell'avvicinarci all'analisi del continuo abbiamo parlato di distribuzione continua di materia (*densità di massa*) e di distribuzione continua di forze (*densità di forza*).

Abbiamo incontrato due categorie di densità di forza: 1) relativa alle *forze esterne* (il peso o altre forze di volume con la loro densità di dimensioni $[FL^{-3}]$, le forze superficiali al contorno con la loro densità di dimensioni $[FL^{-2}]$); 2) relativa alle *forze interne* (le forze attraverso un'area interna al continuo con la loro densità di dimensioni $[FL^{-2}]$). È la densità superficiale di queste forze interne che si chiama *sforzo* nel continuo.

In questa seconda categoria di particolare interesse per la Meccanica delle strutture è la densità delle forze interne attraverso la sezione normale dei continui monodimensionali (aste o travi) e cioè *gli sforzi sulla generica sezione della trave definiti in ogni suo punto*.

La densità delle forze esterne, integrata su tutta la trave in esame, dà luogo alle sue caratteristiche globali R^{est} M^{est} . La densità delle forze interne sulla generica sezione di una trave, cioè gli sforzi come funzione del punto, integrati su tutta la sezione, danno luogo alle caratteristiche globali N T M .

È utile notare che nella trattazione della trave anche il peso proprio* viene spesso integrato sull'area di sezione. Infatti, in termini precisi, è un integrale che conduce alla relazione già incontrata (5.4): il peso del volumetto $dV = dx dy dz$, è $p_s dV$ (Figura 5.23a) se p_s è il peso specifico; integrato sull'area, dà luogo alla (5.4)

$$\int_A p_s dy dz = q \quad (\text{se la trave è omogenea } q \text{ è uguale a } p_s A).$$

Il peso che compete a un tronchetto di trave di spessore dx è $q dx$ e non può che disegnarsi esternamente alla trave quando essa è rappresentata in forma monodimensionale (Figura 5.23b).

5.10.4 L'equazione indefinita della Statica dei continui

Vediamo ora come, nelle linee generali, viene impostato il problema dell'equilibrio dei continui deformabili.

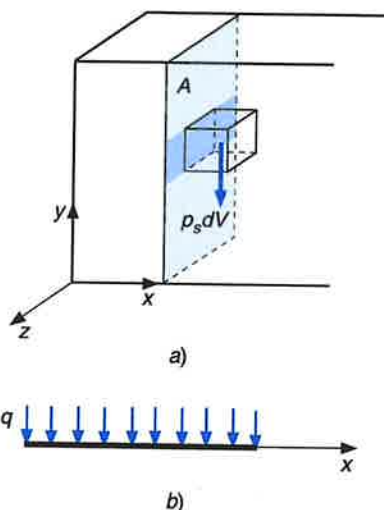


Figura 5.23

* Si ricordi che il peso è forza esterna (dovuta alla gravitazione) distribuita all'interno del volume (vedi Paragrafo 2.7).

5.11 Il ruolo della deformabilità elastica nelle strutture di elementi monodimensionali

Abbiamo in questo capitolo parlato di continuo deformabile.

E le strutture che abbiamo analizzato nei Capitoli 3 e 4 nell'ipotesi di elementi monodimensionali rigidi? La loro analisi cinematica? Il conteggio delle c.l. e dei g.d.l. che non hanno più cittadinanza nel continuo?

Tutti questi concetti trovano ancora utilizzo nell'analisi di strutture deformabili.

Accenniamo come, sempre nell'ipotesi di elasticità lineare, rimandando la ricerca degli sforzi e deformazioni al Capitolo 8.

Lo studio di una struttura deformabile si presenta certamente più complesso che la semplice ricerca delle azioni interne in una struttura isostatica, problema risolto sfruttando unicamente le equazioni di equilibrio. Peraltro, solo tenendo conto della deformabilità è possibile analizzare le strutture iperstatiche che, come sappiamo, esaminate alla luce del solo equilibrio, risultano staticamente indeterminate. Faremo riferimento a due categorie di strutture: le *strutture reticolari* e strutture composte da elementi rigidi e bielle elastiche, che denominiamo *strutture miste*.

Entrambe queste categorie di strutture sono caratterizzate da un comportamento meccanico facile da cogliere anche intuitivamente e consentono di esprimere in modo formalmente assai semplice i tre ingredienti sopra menzionati, cioè *l'equilibrio*, *il legame costitutivo elastico lineare* e *la congruenza*. Infatti, riferendoci per esempio alla categoria delle strutture reticolari, il primo ingrediente si sostanzia in equazioni di equilibrio nodale, il secondo dà luogo a un semplice modello deformabile di biella in cui azione assiale e variazione di lunghezza della biella stessa sono direttamente proporzionali, e il terzo consiste in relazioni che legano le variazioni di lunghezza delle aste agli spostamenti nodali.

Per illustrare alcuni aspetti qualitativi del comportamento di una struttura elastica alla quale si applichino dei carichi, si consideri la struttura reticolare rappresentata, in configurazione indeformata, nella Figura 5.28. La figura evidenzia due carichi nodali; si intende che essi vengano applicati in modo graduale, con

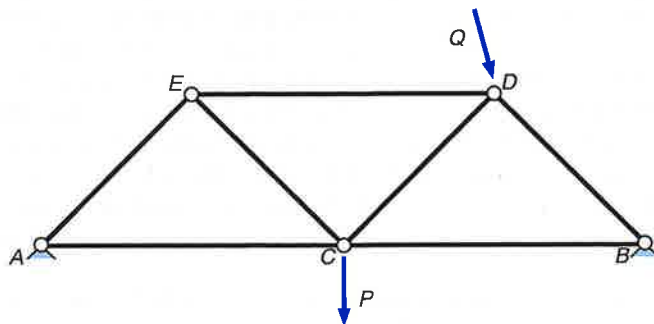


Figura 5.28

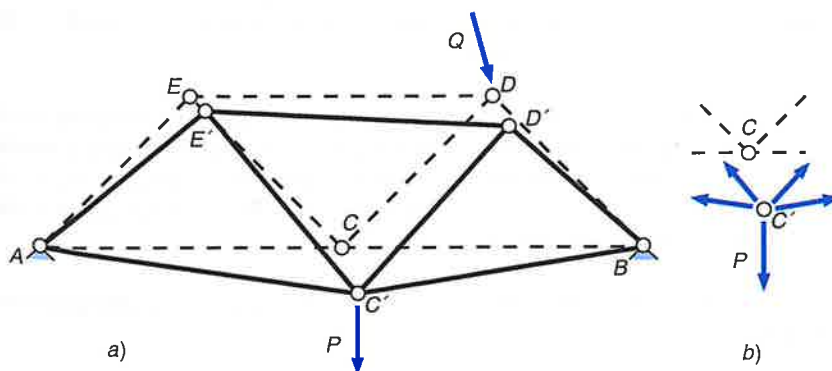


Figura 5.29

valori crescenti da zero ai valori finali P e Q . In virtù della deformabilità delle aste, durante tale “processo di carico” la struttura si deforma, transitando attraverso varie configurazioni intermedie, fino a portarsi nella configurazione di equilibrio finale corrispondente ai valori finali P e Q dei carichi. La Figura 5.29a mostra a tratto pieno la configurazione deformata finale e indica a tratteggio quella iniziale, indeformata, corrispondente a carichi nulli. In virtù dell’ipotesi di elasticità lineare (e dell’ipotesi di piccoli spostamenti, che andremo chiarendo nel prosieguo) risulta che la configurazione deformata finale e i corrispondenti valori di azione assiale nelle aste dipendono esclusivamente dai valori finali P e Q dei carichi e sono invece indipendenti dalla modalità di applicazione dei due carichi nodali. Due diversi processi di carico sono per esempio i seguenti.

- a) Si inizia ad applicare il carico verticale al nodo C , facendolo crescere da zero al valore finale P ; successivamente si applica anche il carico obliquo al nodo D , facendolo crescere da zero al valore finale Q .
- b) Si applica dapprima il carico obliquo in D , poi il carico verticale in C . Entrambi, nelle ipotesi fatte, comportano un’unica risposta strutturale finale.

L’indipendenza della risposta strutturale dalla modalità di applicazione dei carichi implica tra l’altro che, se dopo aver applicato i carichi P e Q indicati nella figura essi vengono gradualmente rimossi (fino ad azzerarli), la struttura ritorna nella situazione iniziale indeformata. Ciò significa che le deformazioni subite dalle aste durante il processo di carico sono reversibili secondo il modello costitutivo elastico.

Inoltre, vi è un importante aspetto metodologico-operativo che concerne il procedimento di analisi di strutture elastiche (e più in generale di strutture deformabili) che merita fin d’ora un commento: tale aspetto riguarda l’imposizione delle equazioni di equilibrio in configurazione indeformata. Cosa si intende con ciò può essere facilmente spiegato nel caso della struttura di Figura 5.29 facendo mente locale alle equazioni di equilibrio nodale di un generico nodo libero, per esempio il nodo C (C' in configurazione deformata). Tali equazioni (di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale) coinvolgono le azioni assiali che si instaurano nella configurazione deformata d’equilibrio e il valore finale P della forza esterna applicata al nodo. Esse andrebbero quindi scritte con riferimento alla configurazione finale. Le forze che le aste esercitano sul nodo C sarebbero da considerare dirette come la aste stesse in configurazione deformata (Figura 5.29b). Di fatto invece, nel procedimento di analisi correntemente adottato, l’equilibrio nodale viene scritto fingendo che le forze trasmesse al nodo dalle aste agiscano secondo le direzioni (note) delle aste a struttura indeformata anziché secondo le direzioni (incognite) assunte dalle aste a struttura deformata.

È facile intravedere a quali complicazioni si andrebbe incontro volendo rinunciare all’approssimazione descritta. Ciò risulta comunque inevitabile per scrivere correttamente le equazioni di equilibrio nel caso di una struttura che risulti molto deformabile sotto i carichi assegnati.



L’ipotesi che legittima la procedura approssimata correntemente adottata è spesso denominata *ipotesi di piccoli spostamenti*. Essa consiste nell’assumere che spostamenti e deformazioni siano così piccoli da autorizzare la scrittura delle equazioni di equilibrio con riferimento alla configurazione indeformata.

Con ciò diviene lecito, inoltre, svolgere l’analisi cinematica come abbiamo visto nel Capitolo 4.

Le strutture si diranno ancora *isostatiche*, *iperstatiche*, *ipostatiche* o *labili* (Paragrafo 4.7) quando lo siano se pensate composte da elementi rigidi.

Il principale interesse dell'analisi cinematica, ancora grazie all'ipotesi di piccoli spostamenti, consiste nel poter assicurare che le strutture isostatiche e iperstatiche necessariamente soddisfino le equazioni di equilibrio. In particolare devono soddisfare il PLV per spostamenti virtuali che divengono possibili grazie alla deformabilità.

Il lavoro che avevamo svolto nei Capitoli 3 e 4 analizzando le strutture isostatiche nell'ipotesi di componenti rigidi non è dunque affatto inutile. È primo passo essenziale per l'analisi di strutture iperstatiche. Inoltre lo schema isostatico può essere rappresentativo, sia pur in via approssimata, del comportamento strutturale.

A schemi isostatici di costruzioni reali è dedicato il prossimo capitolo.

Consapevole di dover apprendere i nuovi necessari strumenti teorici, lo Studente si alleni a "leggere" una costruzione nella sua struttura con gli strumenti finora acquisiti.