

# Corpo rigido e strutture isostatiche 3

In questo capitolo

- si definiscono le *operazioni invariantive* sulle forze e l'*equivalenza* fra sistemi di forze;
- si introducono i *postulati* della Statica del corpo rigido, le *equazioni cardinali* e il concetto di azioni interne;
- viene trattata la Statica del *corpo rigido* e di semplici *strutture isostatiche piane*, dando risposta, in termini elementari, alle domande
  - a) sussiste l'*equilibrio*?
  - b) quanto valgono le *reazioni vincolari*?
  - c) quanto valgono le *azioni interne*?
- si mettono in luce le *condizioni grafiche di equilibrio*.

## 3.1 Momento di una forza rispetto a un punto, a un asse

“Datemi un punto d'appoggio e solleverò il mondo”. Così si vuol fare esprimere ad Archimede l'entusiasmo per la sua scoperta sull'efficacia che una forza acquista quando disponga di un notevole braccio (Figura 3.1).

Nasce il concetto di *momento di una forza rispetto a un punto* e viene a chiarirsi il funzionamento di una delle più antiche macchine della storia: *la leva*.

L'asta di Figura 3.1 altro infatti non è che una leva:  $F$  il fulcro,  $P$  la potenza,  $R$  la resistenza. Le due forze, pur essendo così diverse in intensità, realizzano l'equilibrio dell'asta, in quanto i loro “momenti” rispetto a  $F$  sono uguali. Che cosa debba intendersi per momento di una forza rispetto a un punto verrà man mano precisato in modo rigoroso. Per ora intendiamo che sia il prodotto del modulo della forza per la distanza della forza dal punto, distanza detta *braccio* della forza rispetto al punto.

Il concetto di momento interviene in modo essenziale quando dall'analisi del punto materiale si passi a esaminare un qualunque sistema materiale con dimensioni che non possano essere trascurate. La sollecitazione cui il sistema è sottoposto è influenzata dal *punto d'applicazione* delle forze. D'ora in poi ricorderemo esplicitamente quel che, nel caso del sistema puntiforme, veniva un po' sottinteso: una forza è sempre un *vettore applicato*. Nel caso del punto materiale è ovvio che il punto d'applicazione sia il punto stesso; negli altri casi la forza va sempre esplicitamente definita assieme al suo punto d'applicazione (il caso di forze distribuite verrà trattato nel Capitolo 5).

Come si era discorsivamente commentato nel Capitolo 1, mentre per l'equilibrio di un punto il problema statico consiste nel *convogliare forze* in certe direzioni (Figura 3.2a) e a questa operazione presiede il concetto di *risultante*, per l'equi-

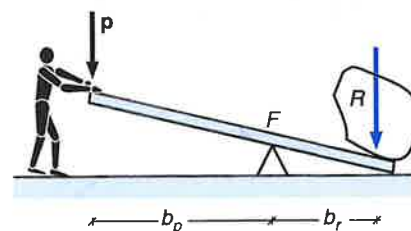


Figura 3.1

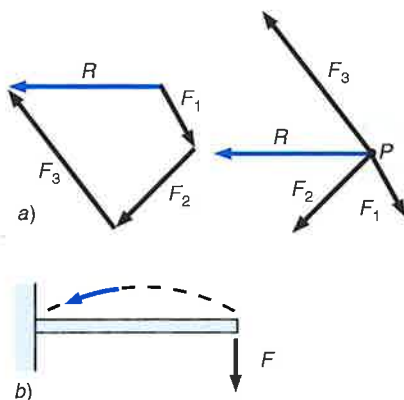


Figura 3.2

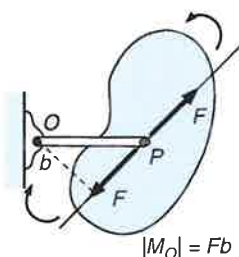


Figura 3.3

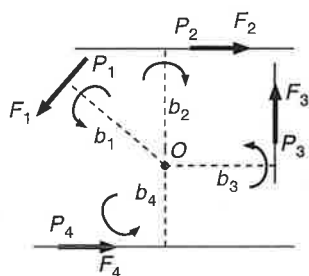


Figura 3.4

librio di un sistema materiale (e per ora pensiamo semplicemente a un corpo rigido) il problema consiste anche nel *trasportare forze* in modo che esse possano essere equilibrate in punti diversi da quelli di applicazione; tipicamente laddove la struttura può ricevere dall'ambiente esterno, attraverso ai vincoli, il contributo equilibrante (reazioni vincolari) (Figura 3.2b).

A questa operazione presiede il concetto di *momento di una forza rispetto a un polo*. Tale concetto tiene conto non solo dell'entità della forza ma anche della sua collocazione rispetto a un punto, che si chiama *polo*.

Vediamo la definizione di momento, dapprima in un'accezione elementare valida solo nel caso piano e poi nell'accezione generale.

Nel caso piano il momento si può introdurre molto semplicemente come già si è detto: uno scalare  $M_O$  il cui modulo sia il prodotto del modulo della forza  $F$  per il suo *braccio* essendo il braccio  $b$  definito come *distanza del polo  $O$  dalla retta d'applicazione di  $F$* . A tale scalare si deve poi dare un segno in modo che risultino distinguibili fra loro due situazioni opposte, del tipo rappresentato nella Figura 3.3. Due forze opposte, applicate nello stesso punto  $P$ , hanno in comune il modulo del momento  $M_O$ , ma producono effetti fisici opposti. Si immagini infatti il segmento  $OP$  non come un semplice elemento geometrico, bensì come un'asta rigida incernierata in  $O$  e cioè girevole attorno a  $O$ . La forza  $F$  tenderebbe a far ruotare l'asta in senso antiorario, la forza opposta  $-F$  in senso orario. Per questo ai due momenti si dà segno opposto, essendo arbitraria la convenzione se assumere come positivo il senso orario o quello antiorario.

Poiché le forze applicate a una struttura sono in generale più di una, si definisce, conformemente alle esperienze fisiche, *momento di un sistema di forze  $F_i$* , applicate nei punti  $P_i$ , rispetto a un polo  $O$ , la somma (algebrica) dei singoli momenti

$$M_O = \sum_i \pm F_i b_i \quad (3.1)$$

Per esempio, per le forze di Figura 3.4 è

$$M_O = F_1 b_1 + F_3 b_3 + F_4 b_4 - F_2 b_2$$

se si assume come positivo il verso antiorario.

Alla lettera  $M$ , che di solito si assume a indicare il momento, va dato, come si è visto, l'indice che individua il polo. L'indice potrà mancare solo qualora si intenda: qualunque sia il polo.

Che il momento sia correlato alle rotazioni è questione che vedremo nei suoi termini precisi nel Capitolo 4; è d'altronde l'idea stessa che sta alla base dell'intuizione archimedeica. È del resto ben evidente che, qualora la forza si pensi applicata a un corpo rigido girevole attorno a  $O$  (Figura 3.3), il corpo riceve un "incentivo alla rotazione" solo se la forza ha un braccio rispetto a  $O$  diverso da zero.

È questo l'ottimo motivo per cui a nessuno viene in mente per esempio che, per ruotare il volante di un'auto, occorra spingerlo o tirarlo lungo un raggio.

Tornando alla definizione proposta per il momento, notiamo che essa non regge per problemi tridimensionali. Le diverse forze, ciascuna con il suo punto di applicazione, e il polo  $O$  individuano piani diversi. Ogni momento è correlato a un "incentivo alla rotazione" in ciascuno di quei piani. E poiché ciascuno di quei piani, ognuno passante per  $O$ , può essere individuato dalla normale a esso spiccata da  $O$ , il momento in tre dimensioni sarà compiutamente definito non come scalare ma come vettore, perpendicolare, per ogni forza  $F_i$ , al piano che la forza individua assieme al polo  $O$ , in modulo essendo ancora definito come  $F_i b_i$ .

In formule ciò si scrive, per la generica forza  $F_i$ ,

$$\mathbf{M}_O^{(i)} = (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_i \quad (3.2)$$

Con ciò infatti ognuno dei vettori momento è completamente definito:

- in modulo è  $F_i b_i$
- in direzione è perpendicolare al piano di  $F_i, P_i, O$
- in verso è tale da individuare assieme a  $P_i - O$  ed  $F_i$  un avvitamento destro (Figure 3.5a, b, c).

Perciò, assieme al vettore, o addirittura in sua vece, si usa indicare una freccia rotante, associata al suo verso.

La rappresentazione vettoriale del momento è poi completamente legittimata dal fatto che il momento globale  $\mathbf{M}_O$  di tutte le forze è definito, conformemente alle esperienze fisiche, come somma (vettoriale, appunto) dei singoli momenti. È

$$\mathbf{M}_O = \sum_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_i \quad (3.3)$$



La definizione ora data di momento non individua un punto di applicazione del vettore momento. È tuttavia uso generale rappresentare il vettore  $\mathbf{M}_O$  spiccato dal polo  $O$ ; ciò per visualizzare un effetto che, proprio nei confronti del punto  $O$ , le forze provocano; inoltre così si avrà da fare nell'operazione di "riduzione a un punto" che fra poco vedremo.

Nel caso piano, assumendo come piano  $xy$  il piano direttore, tutte le forze  $\mathbf{F}_i$ , i loro punti di applicazione  $P_i$  e il polo  $O$  individuano lo stesso piano  $xy$  e tutti i vettori momento,  $\mathbf{M}_{O_i}^{(i)}$  ed  $\mathbf{M}_O$ , sono diretti come l'asse  $z$  e sono concordi o discordi con esso a seconda dell'avvitamento associato. Lo scalare fornito dalla (3.1) altro non è che la componente del momento sull'asse  $z$ . Visto così il segno della (3.1) non è arbitrario (vedi Appendice A). Nei problemi piani tuttavia la scelta del segno non ha influenza e non occorre far riferimento al prodotto vettoriale; basterà far riferimento alla (3.1).

Le (3.2) e (3.3) mettono in luce alcune notevoli proprietà del momento.

- Il momento di una forza rispetto a un polo non varia se si fa scorrere la forza lungo la sua retta d'applicazione (Figura 3.6).

La constatazione è immediata in quanto con tale scorrimento non variano né il vettore forza, né il braccio, né il verso di rotazione associato.

Se invece cambia il polo  $O$ , a meno che esso non venga spostato parallelamente alla  $\mathbf{F}$ , il momento cambia. Vediamo come. Poiché ogni vettore  $\mathbf{P} - \mathbf{O}'$  si può esprimere come somma di due vettori (Figura 3.7)

$$\mathbf{P} - \mathbf{O}' = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + (\mathbf{O} - \mathbf{O}'), \quad (3.4)$$

- il variar del momento al variare del polo si esprime

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + (\mathbf{O} - \mathbf{O}') \wedge \mathbf{F}. \quad (3.5)$$

Il secondo addendo delle (3.5) ha a sua volta la stessa formulazione che compete a un momento: il momento che avrebbe la forza  $\mathbf{F}$ , se fosse applicata in  $O$ , rispetto a  $O'$ . Pertanto la (3.5) si può commentare come *regola di trasporto* del momento:

- il momento di una forza rispetto a un nuovo polo  $O'$  è somma (vettoriale) del vecchio momento rispetto a  $O$  più il momento che avrebbe la forza, rispetto a  $O'$ , se fosse applicata in  $O$ .

Vediamo ora quale aspetto assume la (3.5) in caso di più forze.

Per la definizione (3.3) e ancora tenendo conto della (3.4), che è valida per ogni punto  $P_i$ , il momento rispetto a un nuovo polo  $O'$  si esprime

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}') \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_i + (\mathbf{O} - \mathbf{O}') \wedge \sum \mathbf{F}_i$$

cioè

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + (\mathbf{O} - \mathbf{O}') \wedge \mathbf{R}. \quad (3.6)$$

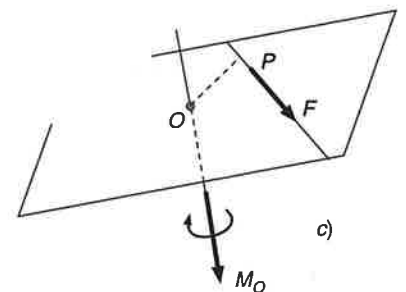
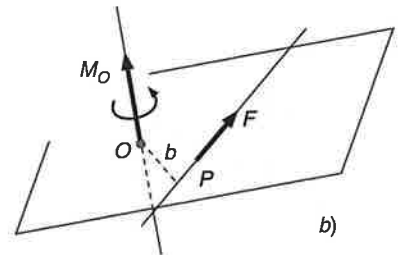
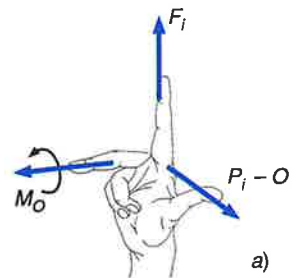


Figura 3.5

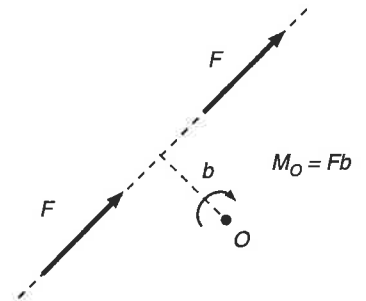


Figura 3.6

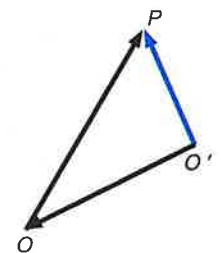


Figura 3.7

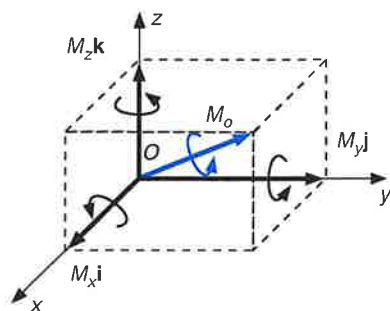


Figura 3.8

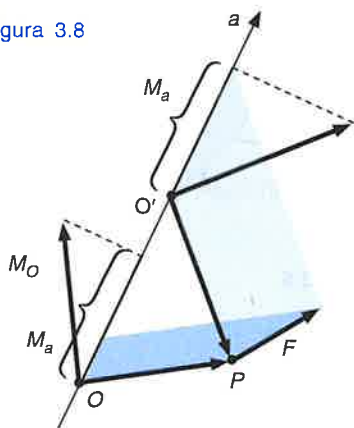


Figura 3.9

*Il momento di un sistema di forze è la somma dei singoli momenti. Non ha senso dire che è il momento della risultante se non si precisa dove e come la si possa applicare (v. Paragrafi 3.7 e 3.8)*

L'interesse della (3.6) consiste nell'esprimere un momento in funzione dell'altro e nell'evidenziare le grandezze da cui dipende il variare del momento al variare del polo. È anch'essa una regola del trasporto, che contiene la precedente come caso particolare.

La (3.6) afferma che, a parità di forze applicate, in generale il momento varia al variare del polo, ma sussistono notevolissimi casi di invarianza del momento.

- Il momento di un sistema di forze a risultante nulla è invariante al variare del polo.
- Qualunque sia il sistema di forze il momento non varia se il polo si sposta parallelamente alla risultante.

In altre parole: se, rispetto a un qualunque polo  $O$ , il momento ha valore (vettoriale)  $\mathbf{M}_O$ , allora sussiste tutt'una retta rispetto ai cui punti il momento ha lo stesso valore: la retta per  $O$  parallela a  $\mathbf{R}$ .

L'espressione cartesiana del momento fa uso, come ogni prodotto vettoriale, del determinante costruito con le componenti dei due vettori  $\mathbf{P}-\mathbf{O}$  ed  $\mathbf{F}$ , fattori del prodotto (vedi Appendice A). Lo sviluppo del determinante mette in luce le componenti scalari del momento  $M_x, M_y, M_z$ :

$$\mathbf{M}_O = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}. \quad (3.7)$$

Esse hanno un interessante significato fisico. Si definisce infatti *momento rispetto a un asse* la proiezione ortogonale, su quell'asse, del vettore momento calcolato rispetto a un punto qualunque dell'asse. Tale momento rispetto all'asse, che è uno scalare per come è definito, rappresenta per così dire l'incentivo parziale alla rotazione che, nei confronti di quel particolare asse, le forze provocano. Così, nell'espressione cartesiana (3.7) gli scalari  $M_x, M_y, M_z$  sono i momenti rispetto agli assi cartesiani (Figura 3.8).

Due osservazioni vanno fatte a proposito del momento rispetto a un asse.

La prima assicura la correttezza della definizione: essa non dipende dalla scelta del polo  $O$  sull'asse. Infatti il momento, rispetto a un qualunque asse  $a$ , è secondo la definizione, indifferentemente,

$$M_a = \mathbf{M}_O \times \text{vers } a \quad \text{oppure} \quad M_a = \mathbf{M}_{O'} \times \text{vers } a, \quad (3.8)$$

espressioni che, grazie alla (3.6), coincidono (Figura 3.9). Per questo motivo nel simbolo  $M_a$ , che indica il momento rispetto a un asse  $a$ , non compare traccia del polo  $O$ : i due momenti rispetto ai due poli  $O$  e  $O'$  sono diversi fra loro ma le loro proiezioni sull'asse  $OO'$  coincidono.

La seconda osservazione commenta ulteriormente il significato fisico del momento di una forza rispetto a un asse. Esso è nullo solo in due casi: o la forza è incidente l'asse o è a esso parallela (la dimostrazione è immediata). Solo in tali casi infatti la forza non induce alcun incentivo alla rotazione attorno all'asse: la forza viene a essere contenuta in un piano passante per l'asse stesso, il vettore momento  $\mathbf{M}_O$  risulta perpendicolare all'asse  $a$  e nulla la sua componente sull'asse.

Si pensi a un corpo rigido girevole attorno a un asse fisso, per esempio a una porta impernata sui suoi cardini. Sarebbe inutile, per farla girare, spingere o tirare con una forza nel piano della porta; occorre fornire una forza, dislocata rispetto ai cardini, avente componente perpendicolare al piano contenente l'asse e il punto d'applicazione della forza.

Si noti che la grandezza scalare definita dalla (3.1) nel caso piano altro non è che il momento rispetto all'asse  $z$ : essa è l'unica componente cartesiana non nulla del momento nel caso piano.

Infine, rivolgendo la nostra attenzione alla (3.3), possiamo stabilire il

- **teorema di Varignon:** il momento di più forze che siano tutte applicate in un sol punto  $P$  eguaglia il momento della risultante  $\mathbf{R}$ , applicata nello stesso punto.

È infatti in tal caso

$$\mathbf{M}_O = \sum_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{F}_i = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \sum_i \mathbf{F}_i = (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{R}. \quad (3.9)$$

La (3.9) riveste un notevole interesse pratico: riconduce il calcolo del momento globale, anziché alla somma di tanti momenti, al calcolo di un solo momento, quello della risultante.



Chiediamoci ora se una simile semplificazione di calcolo sia possibile in altre circostanze e non solo quando le forze siano tutte applicate nello stesso punto. Dal punto di vista fisico ciò significa chiedersi se l'incentivo alla rotazione provocato da un sistema di forze sia quello stesso provocato dalla sola  $\mathbf{R}$  opportunamente applicata.

Per rispondere al quesito occorre introdurre il concetto di equivalenza fra sistemi di forze.

### 3.2 Operazioni invariantive. Equivalenza fra sistemi di forze

L'esperienza mostra che *un corpo rigido* non cambia il suo stato di quiete o di moto se una qualunque delle forze su di esso agenti scorre lungo la sua retta d'azione. Che tale affermazione non valga per un qualunque corpo ma solo per corpi rigidi è ben comprensibile. Basti pensare al diverso immaginabile effetto che una forza avrebbe se fatta scorrere su di una struttura articolata del tipo illustrato in Figura 3.10a o anche su di una molla (3.10b) o su di un qualunque corpo deformabile.

Si può invece capire che, agli effetti dell'equilibrio o del moto, una barra d'acciaio  $AB$  del tipo illustrato nella Figura 3.10c non risenta dello scorrere della forza.

■ Si definisce (seconda) *operazione invariantiva* lo scorrimento di una forza lungo la sua retta d'azione. L'invarianza riguarda l'equilibrio o lo stato di moto di un *corpo rigido*.



In nessun caso invece lo scorrimento assicura l'invarianza dello stato di sforzo *interno* che il corpo oppone alla forza. Senza pensare alla drammatica differenza fra lo stato di sforzo (e di deformazione) nel corpo di una persona sostenuta dalla rassicurante forza che il pavimento le fornisce piuttosto che dalla stessa forza trasmessa dal cappio che la impicca alla forza (Figura 3.10d), dobbiamo ammettere che anche la barra d'acciaio non sia insensibile, per quanto riguarda l'assetto delle forze interne, allo scorrimento della forza (si vedano teoria ed esempi al Paragrafo 3.12).

Questa operazione invariantiva, riguardante lo scorrimento della forza, si aggiunge all'altra operazione invariantiva, di portata più generale, che si è introdotta al Capitolo 2, che assicura l'invarianza dell'equilibrio (o del moto) di un *qualunque* sistema materiale per composizione o decomposizione di forze *in un punto*.

*Ridurre un sistema di forze a un altro comporta lasciarne inalterati  $\mathbf{R}$  ed  $\mathbf{M}$  (rispetto a qualunque polo)*

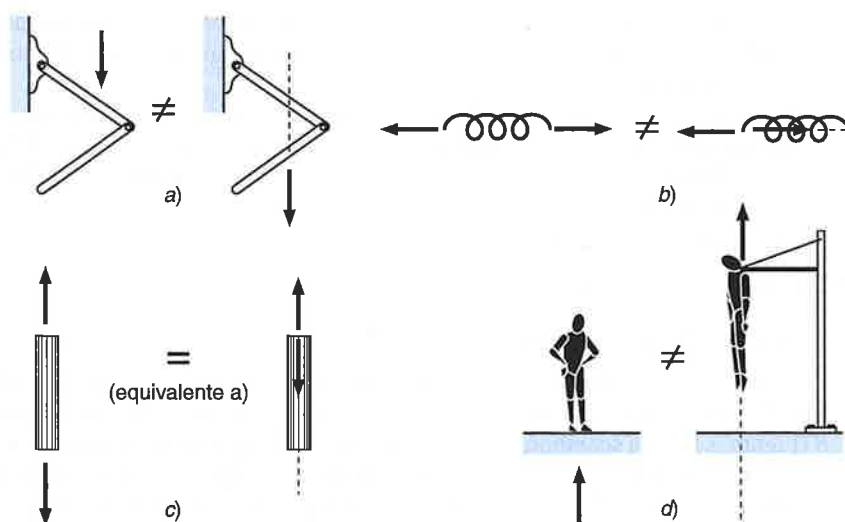


Figura 3.10

Le due operazioni verranno rispettivamente chiamate nel seguito *prima e seconda operazione invariante*. L'insieme delle due permette di definire *sistemi equivalenti di forze*.

■ Diconsi equivalenti due sistemi di forze ottenibili l'uno dall'altro con sole operazioni invarianti. Essi sono sostituibili l'uno all'altro per quanto riguarda l'equilibrio (e il movimento) del corpo rigido.

■ *Trasformare in modo equivalente* un sistema di forze in un altro significa applicare una o più volte le due operazioni invarianti. I due sistemi di forze si dicono *riducibili* l'uno all'altro. L'operazione composta di sole operazioni invarianti si dice *riduzione* (di un sistema di forze a un altro).

Constatiamo che le operazioni invarianti non alterano né risultante né momento. In altre parole: una condizione necessaria per l'equivalenza è l'uguaglianza di risultante e momento (rispetto a un qualunque polo).

Che in ciò consista anche la condizione sufficiente? In tal caso l'uguaglianza di  $\mathbf{R}$  ed  $\mathbf{M}$  sarebbero condizioni caratteristiche per l'equivalenza. Così in effetti accade; ma rendersi conto che due sistemi di forze, purché con ugual risultante e momento (rispetto a un generico polo), siano ottenibili l'uno dall'altro con sole operazioni invarianti non è di immediata constatazione. Argomentiamo l'affermazione per passi successivi.

### 3.3 Equivalenza fra coppie di ugual momento

Dicesi *coppia* l'insieme di due forze opposte non allineate (Figura 3.11).

Dicesi *braccio* della coppia la distanza  $b$  fra le rette d'azione delle due forze componenti la coppia. Poiché la risultante della coppia è nulla *il momento della coppia è invariante*.

Esso è un vettore perpendicolare al piano della coppia con verso tale da definire il solito avvvitamento destro; il suo modulo è

$$M = Fb$$

come si constata immediatamente assumendo per esempio come polo uno dei due punti d'applicazione delle forze. Data la sua indipendenza dal polo, spesso il momento della coppia si indica solo con una freccia rotante nel piano della coppia stessa (Figura 3.11), spiccata da un qualsiasi punto.

Sono infinite le coppie che dan luogo allo stesso momento. Le forze costituenti possono essere: di minore intensità purché più lontane fra loro; con direzioni diverse purché il verso di rotazione associato resti inalterato; anche su piani diversi purché fra loro paralleli.

Per esempio nella Figura 3.12 sono rappresentate tre coppie di ugual momento. Se la scala delle lunghezze è 1 m per ogni quadretto e quello delle forze 10 N per ogni quadretto, le 3 coppie hanno tutte momento antiorario uguale a 80 Nm, perpendicolare al piano comune alle coppie.

Vogliamo ora mostrare che

■ tutte le coppie di ugual momento sono equivalenti.

A tale scopo analizziamo alcune *riduzioni notevoli*.

1) *Più forze piane sono riducibili a due forze applicate in due punti assegnati A e B.* Infatti si congiunga il punto  $P_i$  di applicazione di ciascuna forza  $F_i$  con A e con B (Figura 3.13) e si scomponga (prima operazione invariante) la forza secondo le due rette  $a$  e  $b$  così ottenute. Si trasportino le due forze così ottenute (seconda operazione invariante) in A e in B. Ripetendo l'operazione per cia-

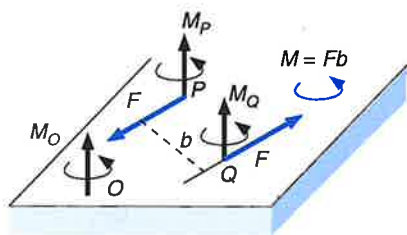


Figura 3.11

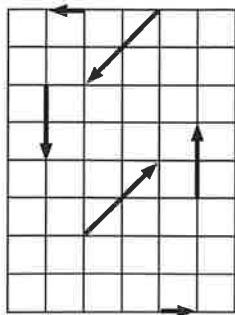


Figura 3.12

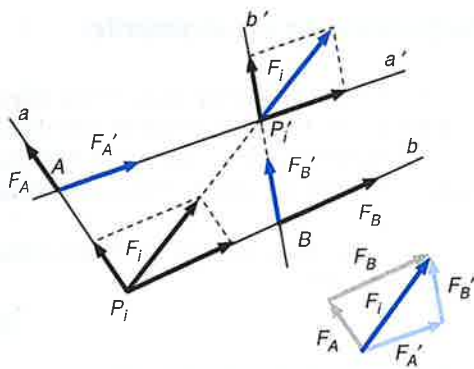


Figura 3.13

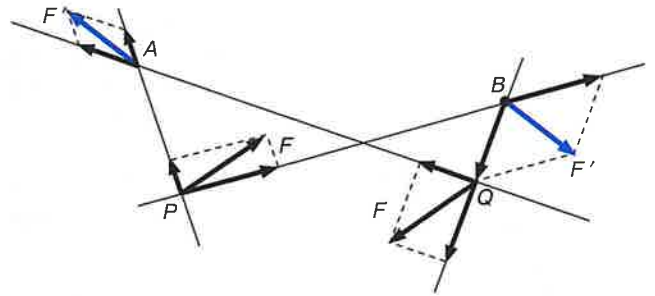


Figura 3.14

scuna forza si ottengono tante forze in  $A$  e altrettante in  $B$ , equivalenti nel loro insieme alle forze date. Si compongano rispettivamente fra di loro (prima operazione invariante) ottenendo una sola forza in  $A$  e una in  $B$ .

Tale riduzione si può ottenere in infiniti modi: ogni forza si può far scorrere lungo la propria retta d'azione, cosicché le due rette secondo cui scomporre cambiano (nella Figura 3.13 da  $a, b$  ad  $a'$  e  $b'$ ).

- 2) Una coppia è riducibile a infinite altre dello stesso piano tutte con punti di applicazione assegnati  $A$  e  $B$ . L'affermazione è contenuta nella precedente come caso particolare. Nella Figura 3.14 la coppia  $F, -F$  con punti di applicazione  $P, Q$  si è ridotta alla coppia  $F', -F'$  con punti di applicazione  $A, B$ . Che da coppia ( $R = 0$ ) si giunga a coppia ( $R = 0$ ) è conseguenza necessaria della riduzione.

- 3) Ogni coppia è riducibile a una e una sola coppia "retta", con forze perpendicolari alla congiungente i punti di applicazione  $A$  e  $B$  assegnati.

Infatti siano  $F$  e  $-F$  le forze componenti la coppia, applicate nei punti  $A$  e  $B$ . Si scompongano secondo la retta  $AB$  e le sue perpendicolari in  $A$  e in  $B$  (Figura 3.15). Le componenti su  $AB$  si elidono; quelle a esse perpendicolari,  $F'$  e  $-F'$  formano la coppia retta voluta.

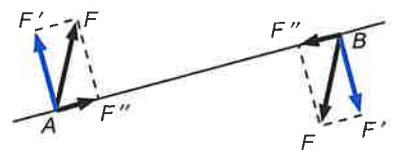


Figura 3.15

Con ciò si è verificato che tutte le coppie di ugual momento (in un piano) sono riducibili alla stessa coppia.

- 4) Coppie di ugual momento, situate su piani diversi, sono equivalenti.

Mostriamo che la coppia  $F_1, -F_1$  del piano  $\pi_1$  è equivalente alla coppia  $F_2, -F_2$  del piano  $\pi_2$  e cioè solo operazioni invariantive trasformano la prima nella seconda. Siano le due coppie uguali e sovrapponibili per traslazione di un piano sull'altro in direzione a essi perpendicolare (Figura 3.16); ciò si può sempre realizzare, per quel che siamo venuti dicendo, con sole operazioni invariantive, anche se le coppie assegnate, di ugual momento, non sono così allineate in partenza.

Si considerino i due piani  $a$  e  $b$  individuati rispettivamente dalle coppie  $F_1, -F_2$  e  $-F_1, F_2$ . Sulla loro retta intersezione  $r$  si applichino due forze opposte  $F_3, -F_3$ , anche esse in modulo uguali a tutte le precedenti. Con ciò alla coppia originaria di  $\pi_1$  si è aggiunto un sistema nullo in un punto (operazione invariante). Sul piano  $a$  la coppia  $F_1, -F_3$  è equivalente alla coppia  $F_3, -F_2$  (per quanto detto al punto 2)); analogamente sul piano  $b$  la coppia  $F_3, -F_1$  è equivalente alla coppia  $F_2, -F_3$ . Si è così trasformata la coppia originaria del piano  $\pi$ , nelle due coppie  $F_3, -F_2$  e  $F_2, -F_3$ . Togliendo adesso il sistema nullo  $F_3, -F_3$  ci si è ricondotti, con sole operazioni invariantive alla coppia  $F_2, -F_2$  del piano  $\pi_2$ .

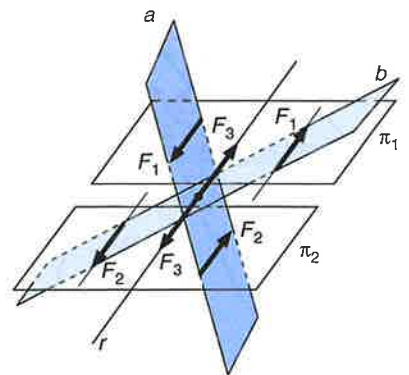


Figura 3.16

È infine dimostrata la proposizione: tutte le coppie di ugual momento sono equivalenti. Ciò legittima la raffigurazione di una coppia tramite il solo vettore momento o la freccia rotante.

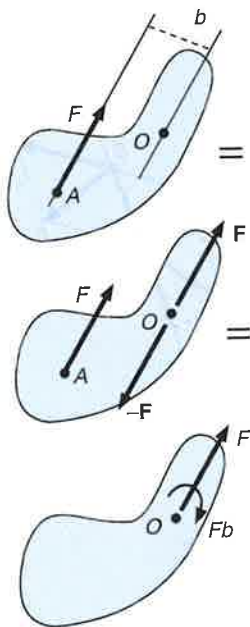


Figura 3.17

### 3.4 Per trasportare una forza occorre un momento

Sia  $F$  una forza applicata in un punto  $A$  e la si voglia trasportare in un altro punto  $O$ . Si aggiunga in  $O$  il sistema nullo  $F, -F$ . Ci si è così ridotti alla forza  $F$  in  $O$  e alla coppia  $F, -F$ . Cioè la forza in  $A$  è equivalente alla stessa forza in  $O$  più una coppia di momento  $M$  uguale al momento che la forza originaria aveva rispetto a  $O$ .

Poiché tutte le coppie d'ugual momento sono equivalenti la trasformazione ora esposta si rappresenta come nella Figura 3.17.

### 3.5 Qualunque sistema di forze è equivalente a forza più coppia

L'affermazione contenuta nel titolo è conseguenza quasi immediata delle proposizioni precedenti. Si ripeta infatti, per ogni forza del sistema, l'operazione di trasporto in  $O$ . Ci si riduce così ad avere tutte le forze applicate in  $O$ , più tante coppie, ciascuna situata nel piano che ogni forza forma con  $O$ , ciascuna di momento (vettoriale) uguale al momento di quella singola forza rispetto a  $O$ . E perciò (sommando vettorialmente fra loro le forze e fra loro i momenti):

■ qualunque sistema di forze è equivalente alla risultante  $R$  applicata in  $O$  più una coppia di momento uguale al momento globale del sistema rispetto a  $O$ .

In termini fisici ciò significa che l'equilibrio (o il moto) di un *corpo rigido* è invariante per sostituzione dell'effettivo sistema di forze cui il corpo è soggetto con una forza e una coppia: la forza deve essere la risultante  $R$ , applicata in un punto qualunque  $O$ , e la coppia una qualunque delle infinite coppie aventi momento  $M_O$  uguale a quello che il sistema originario ha rispetto a  $O$ .

L'operazione, espressa nella Figura 3.18, che mette in evidenza questo fatto applicando in  $O$  i due vettori  $R$  ed  $M_O$ , si dice *riduzione al punto O*.

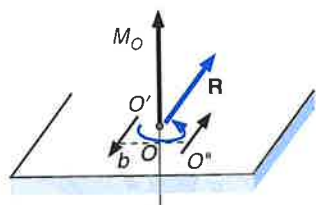


Figura 3.18



Si noti che, mentre il vettore momento può pensarsi spiccato da  $O$ , la coppia che lo genera, per definizione stessa, non può ridursi al solo punto  $O$ . Comunque essa sia scelta, necessita di un braccio. Tale braccio potrà eventualmente essere piccolo, in modo che le due forze componenti la coppia siano entrambe abbastanza vicine a  $O$  (le forze dovranno avere modulo sufficientemente elevato). In particolare la coppia può essere la coppia retta le cui forze componenti siano applicate in due punti definiti  $O'$  e  $O''$  (Figura 3.18), cosicché ogni sistema di forze si può ridurre a *forza + coppia, entrambe univocamente definite*.

### 3.6 Condizioni caratteristiche per l'equivalenza

Siamo finalmente in grado di rispondere alla domanda se l'uguaglianza di risultante e momento sia condizione caratteristica (necessaria e sufficiente) per l'equivalenza. La risposta alla domanda, affermativa, consegue dalle equivalenze che siamo venuti esaminando.

Che la condizione sia necessaria è, si è già detto, conseguenza immediata dell'equivalenza.

La condizione è anche sufficiente. Infatti se due sistemi di forze hanno ugual risultante  $R$  e ugual momento  $M_O$  rispetto a un particolare punto  $O$  essi, con sole operazioni invariantive, sono riducibili alla stessa forza  $R$  applicata in  $O$  e a una stessa coppia di momento  $M_O$ .

*Equivalenza non significa sostituibilità a tutti gli effetti!*



## mento

are in un altro  
dotti alla forza  
stessa forza in  
za originaria  
trasformazione

## a forza

ta delle propo-  
l'operazione di  
in  $O$ , più tante  
ciascuna di mo-  
mento a  $O$ . E per-  
nti):

applicata in  $O$  più  
a rispetto a  $O$ .

corpo rigido è  
corpo è soggetto  
applicata in un  
ppie aventi mo-  
 $O$ .

nza questo fatto  
 $O$ .

piccato da  $O$ , la  
ò ridursi al sol  
n braccio. Tale  
che le due forze  
ne a  $O$  (le forze  
rticolare la cop-  
ano applicate in  
sistema di forze  
ente definite.

## za

glianza di risul-  
ente) per l'equi-  
equivalenze che

a immediata del-

ze hanno ugual  
 $O$  essi, con sole  
cata in  $O$  e a una

Eseguiamo infatti nel seguente ordine le operazioni invariantive: dal primo sistema di forze ci si riduca al sistema forza + coppia e poi da questo, per così dire all'indietro, si torni al secondo dei due sistemi di forze. Si è così giunti dall'uno all'altro con sole operazioni invariantive.

Infine osserviamo che l'argomentazione non dipende dal particolare punto  $O$ . Infatti la (3.6) assicura che i due sistemi di forze, avendo ugual risultante e ugual momento rispetto a un particolare polo  $O$ , avranno anche ugual momento rispetto a qualunque altro polo.

Possiamo infine enunciare il seguente teorema.

- Condizione caratteristica affinché due sistemi di forze siano equivalenti è che abbiano ugual risultante e ugual momento (rispetto a un arbitrario punto  $O$ ).

In termini fisici ciò significa che qualunque sistema di forze può essere sostituito, agli effetti dell'*equilibrio* (o *moto*) di un corpo rigido, da un altro con ugual risultante e momento, in particolare dalla forza  $\mathbf{R}$  applicata in un punto  $O$  e dalla coppia di momento  $\mathbf{M}_O$  (riduzione al punto  $O$ ).

### 3.7 Riduzione a un punto e invariante scalare

Accade peraltro che in qualche caso la riduzione a un punto sia più drastica pervenendo o alla sola forza, o alla sola coppia. Vediamo quando ciò accade. Sia dapprima  $\mathbf{R} \neq 0$ . Allora

- se esiste un polo  $O$ , per così dire privilegiato, rispetto al quale il momento sia nullo, il sistema di forze è equivalente alla sola risultante  $\mathbf{R}$  applicata in  $O$ .

Si dice che in tal caso esiste *retta d'applicazione della risultante* ( $\mathbf{R}$  può scorrere, una volta applicata in  $O$ , lungo la sua retta d'azione per la seconda operazione invariantiva), che si chiama *asse centrale*.

- È subito constatato che per ogni sistema *piano* di forze a risultante non nullo esiste retta di applicazione di  $\mathbf{R}$ . Valgono infatti le seguenti proposizioni.

- 1) Due forze convergenti sono equivalenti alla loro risultante  $\mathbf{R}$  applicata nel punto d'intersezione delle loro rette d'azione (Figura 3.19); la retta  $r$  è retta d'applicazione della risultante.
- 2) Due forze parallele  $\mathbf{F}_1'$  e  $\mathbf{F}_2'$  (Figura 3.20), a risultante non nulla, sono riducibili a due forze convergenti  $\mathbf{F}_1$  ed  $\mathbf{F}_2$  aggiungendo le due forze opposte allineate  $\mathbf{F}$  e  $-\mathbf{F}$ , e perciò esiste retta d'applicazione della risultante passante per il punto d'intersezione  $\bar{O}$ .
- 3) Più forze nel piano a risultante non nulla sono riducibili alla loro risultante  $\mathbf{R}$  applicata in un punto  $\bar{O}$  applicando più volte il metodo precedente. Le prime due sono riducibili alla loro risultante  $\mathbf{R}_1$  applicata nel loro punto d'intersezione  $O_1$ . Tale risultante e la terza forza sono analogamente riducibili alla loro risultante  $\mathbf{R}_2$  e così via (Figura 3.21).

È quindi evidente che ogni sistema di forze piano (con  $\mathbf{R} \neq 0$ ) è riducibile alla sola forza  $\mathbf{R}$ , applicata su una ben determinata retta  $r$ . Rispetto a tutti i suoi punti di tale retta il momento del sistema di forze originario è nullo.

Se invece, sempre rimanendo nel caso piano, il sistema di forze ha risultante nulla, allora il sistema è riducibile a una coppia, di momento uguale a quello del sistema originario rispetto a un punto qualunque ( $\mathbf{M}$  in questo caso è invariante).

Basta a tal fine ridurre il sistema a due punti  $A$  e  $B$  (riduzione 1 del Paragrafo 3.3).

Si è così individuato qualche caso in cui accade quel che si diceva all'inizio del paragrafo: la riduzione può condurre o alla sola forza o alla sola coppia. Vediamo

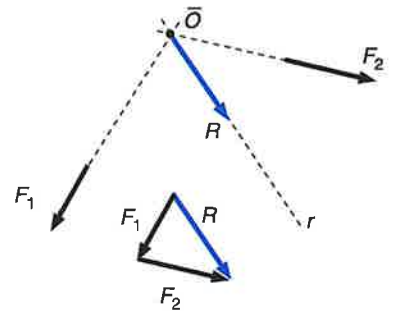


Figura 3.19

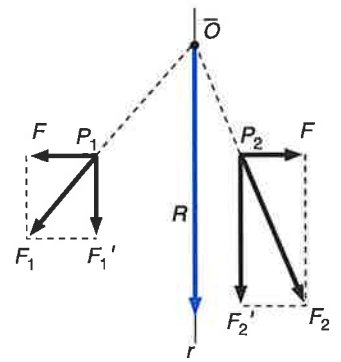


Figura 3.20

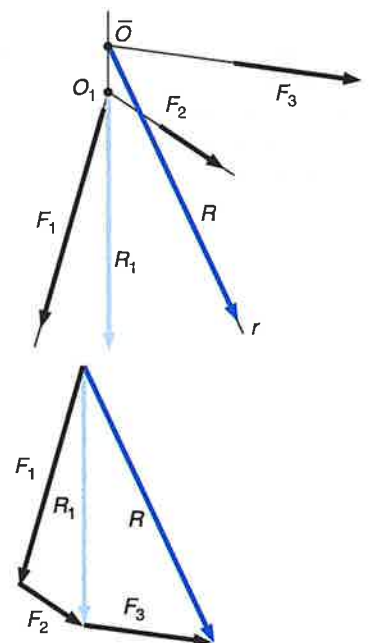


Figura 3.21

ora come e quando ciò accada, non per constatazione caso per caso, ma per trattazione teorica.

La (3.6) afferma che, al variar del polo, non varia la proiezione ortogonale  $M_R$  di  $\mathbf{M}$  nella direzione di  $\mathbf{R}$ . Infatti moltiplicando scalarmente per il versore di  $\mathbf{R}$  si ottiene

$$M_R = \mathbf{M}_O \times \text{vers } \mathbf{R} = \mathbf{M}_{O'} \times \text{vers } \mathbf{R} \quad (3.10)$$

e cioè tale componente è ineliminabile, qualunque sia il polo cui ci si riduca. In altre parole, il momento varia al variare del polo solo nella sua componente  $M_n$  normale a  $\mathbf{R}$ , mentre resta invariata l'altra componente  $M_R$ , che è pertanto una caratteristica del sistema di forze ed è anche il valore minimo che il momento può assumere (Figura 3.22). Potrà pertanto sussistere un polo  $O$  privilegiato rispetto al quale il momento si annulli solo se è  $M_R = 0$ . Altrimenti la riduzione più drastica che si possa operare consiste nel ridurre il sistema di forze alla loro risultante  $\mathbf{R}$  applicata in un punto (pur sempre privilegiato)  $O$  rispetto al quale sia  $M_n = 0$  più quella coppia di momento minimo  $M_R$  che agisce in un piano perpendicolare a  $\mathbf{R}$  (riduzione elicoidale).

La retta parallela a  $\mathbf{R}$  rispetto ai punti  $O$  della quale il momento è minimo si dice *asse centrale*. La riduzione all'asse centrale è di tipo elicoidale. Qualora sia  $M_R = 0$  (con  $R \neq 0$ ) l'asse centrale diviene retta d'applicazione della risultante.

È opportuno ora riassumere e discutere tutti i casi possibili introducendo la seguente grandezza:

$$I = \mathbf{M} \times \mathbf{R} = M_R R.$$

Essa si chiama *invariante scalare* ed è, appunto, anch'essa invariante al variar del polo. Se è  $I \neq 0$  è anche  $M_R \neq 0$  e pertanto non esiste alcun polo rispetto al quale il momento si annulli.

Se è invece  $I = 0$ , ciò può essere o perché è  $R = 0$ , e in tal caso il sistema è riducibile a una coppia, o perché è  $M_R = 0$  (con  $R \neq 0$ ), e in tal caso il sistema è riducibile alla sola risultante.

Se poi sono nulli sia  $R$  che  $M_R$  il sistema è equivalente al sistema nullo e si dice *sistema equilibrato*.

- **Asse centrale** è sempre luogo di momento minimo. Diviene luogo di momento nullo se l'*invariante scalare*

$$I = \mathbf{M} \times \mathbf{R}$$

è nullo con  $\mathbf{R} \neq 0$ .

*Un sistema di forze a risultante e momento nulli si dice sistema di forze equilibrato, ma ciò non garantisce l'equilibrio del sistema materiale a meno che non sia un corpo rigido, come fra poco vedremo*

La Tabella 3.1 riassume le possibili riducibilità di sistemi di forze, a seconda dei valori dell'*invariante scalare*.

Quindi possiamo affermare che

- se l'*invariante scalare* è nullo, con  $R \neq 0$ , il sistema di forze è equivalente alla sola risultante applicata in un punto qualsiasi  $O$  dell'asse centrale.

Siamo venuti con ciò a rispondere al quesito posto alla fine del Paragrafo 3.1. È possibile calcolare il momento di un sistema di forze come momento della risultante? La risposta è affermativa se  $I = 0$ , perchè con  $R \neq 0$ , l'asse centrale diventa retta d'applicazione della risultante. È questo il modo di estendere il Teorema di Varignon.

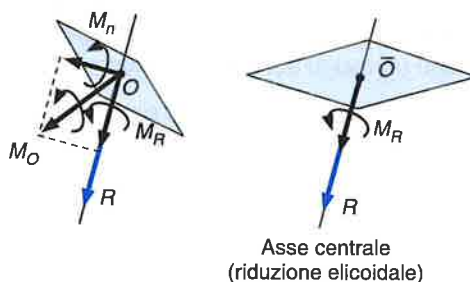
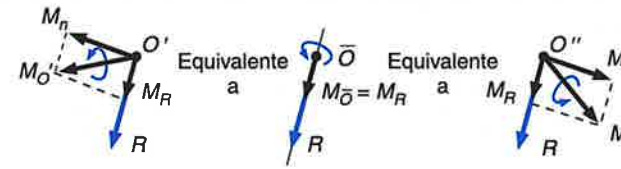
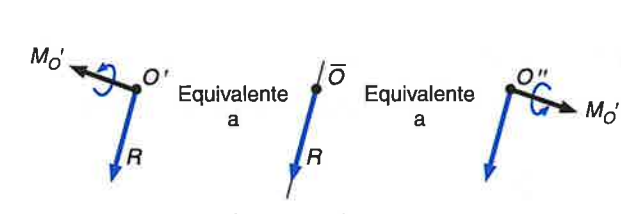
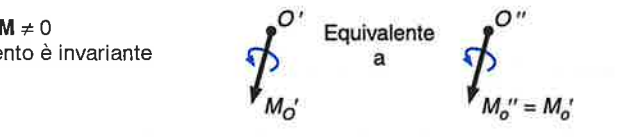


Figura 3.22

Tabella 3.1

$\mathbf{M} \times \mathbf{R} = I \neq 0$	 <p>Asse centrale</p>	<p>Il sistema è riducibile a elicoidale, ma <math>\mathbf{M}</math> non è nullo rispetto ad alcun polo.</p>
$\mathbf{R} \neq 0$	 <p>Asse centrale</p>	<p>Il sistema è riducibile a sola forza, la risultante <math>\mathbf{R}</math> applicata sull'asse centrale.</p>
$\mathbf{M} \times \mathbf{R} = I = 0$	<p><math>\mathbf{R} = 0 ; \mathbf{M} \neq 0</math> il momento è invariante</p>  <p>Asse centrale</p>	<p>Il sistema è riducibile a coppia. La coppia è la situazione limite di due forze parallele contrarie di moduli tendenti a divenire uguali: la risultante diviene sempre più piccola e l'asse centrale va all'infinito.</p>
<p><math>\mathbf{R} = 0 ; \mathbf{M} = 0</math> il sistema di forze si dice equilibrato</p>		<p>Il sistema si riduce in ogni punto al sistema nullo.</p>

### 3.8 Forze parallele e forze piane. Baricentri e poligono funicolare

Due notevolissimi sistemi di forze hanno invariante scalare nullo: *forze piane* e *forze parallele*. In tali casi, infatti, momento e risultante (quando siano diversi da zero) sono fra di loro perpendicolari.

Si è già visto nel caso di forze piane (Figura 3.21) un metodo grafico, per così dire artigianale, atto a trovare la retta d'applicazione della risultante (nel caso in cui sia  $R \neq 0$ ): componendo dapprima due forze, poi la loro risultante con la terza e così via. Ciò vale anche nel caso di forze parallele comunque disposte (Figura 3.20); anch'esse si potranno comporre di due in due, in quanto ogni coppia di forze parallele individua un piano. Cosicché, sia pur operando di volta in volta su piani diversi, si giungerà alla retta di applicazione della risultante (Figura 3.23).

Per quanto siamo venuti dicendo possiamo ora definire analiticamente la retta di applicazione della risultante (quando esiste) tramite un suo punto  $\bar{O}$ , la direzione essendo quella  $\mathbf{R}$ . È

$$\Sigma (\bar{P}_i - \bar{O}) \wedge \mathbf{F}_i = (\bar{O} - \bar{O}) \wedge \mathbf{R}. \quad (3.11)$$

La (3.11) esprime analiticamente la suddetta ultima proposizione. Inoltre, nel caso di forze parallele, essa contiene un'altra preziosa informazione (per la dimostrazione vedi appresso):

- comunque si ruoti un sistema di forze parallele  $\mathbf{F}_i$  (ovviamente tutte dello stesso angolo), un punto  $\bar{O}$  della retta d'applicazione della risultante resta invariato; tale punto si dice *centro delle forze parallele*.

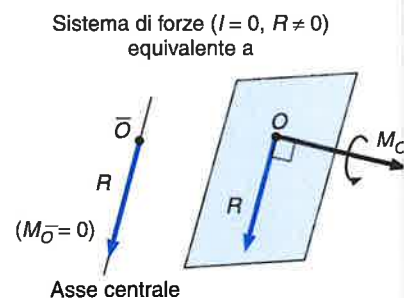


Figura 3.23

Esso quindi non dipende dalla direzione delle forze parallele; dipende dai loro moduli  $F_i$  e dai loro punti di applicazione  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  come appare dalle sue coordinate

$$\bar{x}_O = \frac{\sum_i x_i F_i}{R} \quad \bar{y}_O = \frac{\sum_i y_i F_i}{R} \quad \bar{z}_O = \frac{\sum_i z_i F_i}{R} \quad (3.12)$$

Nel caso notevolissimo in cui le forze parallele siano pesi  $p_i$  applicati nei punti  $P_i$

■ il centro delle forze peso si dice *baricentro*.

Lo si indica di solito con la lettera  $G$  e le sue coordinate, secondo le (3.12), sono

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i p_i}{p}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_i y_i p_i}{p}; \quad \bar{z} = \frac{\sum_i z_i p_i}{p} \quad (3.13)$$

Essendo  $p = \sum_i p_i$  il peso totale.

Veniamo al caso generale (tridimensionale) di più forze peso. Indicando con  $\mathbf{k}$  il versore verticale (ascendente o discendente che sia), con  $P_i$  il punto d'applicazione del generico peso  $p_i$  e con  $p = \sum_i p_i$  il peso totale, la (3.11) si può scrivere

$$[\sum_i (P_i - O)p_i] \wedge \mathbf{k} = [(\bar{O} - O)p] \wedge \mathbf{k} \quad (3.14)$$

il che significa:  $O$  deve essere tale che il parallelogramma costruito su  $\sum_i (P_i - O)p_i$  e  $\mathbf{k}$  e quello costruito su  $(\bar{O} - O)p$  e  $\mathbf{k}$  devono avere la stessa area (vedi Appendice A). Pertanto  $(\bar{O} - O)p$  coincide con  $\sum_i (P_i - O)p_i$  e in tal caso la (3.14) individua il ben definito punto (Figura 3.24)

$$G = \bar{O} - O = \frac{\sum_i (P_i - O)p_i}{p}, \quad (3.15)$$

che si chiama *baricentro* (il punto  $O$ , che non appare nella figura, è il polo che si intende origine del sistema di riferimento), oppure può differirne per un vettore parallelo a  $\mathbf{k}$  (di modulo arbitrario  $|\lambda|$ ) e in tal caso la (3.13) individua tutta una retta  $r$  di punti  $\bar{O}'$  che è retta d'applicazione del peso totale

$$\bar{O}' - O = \frac{\sum_i (P_i - O)p_i}{p} + \lambda \mathbf{k}.$$

Il particolare punto di tale retta definito dalla (3.14) è il *baricentro* delle forze peso, che preferiamo indicare con  $G$ , mentre tutta la retta individuata dalla (3.13) (o dalla (3.15) che ne è la soluzione generale) altro non è che l'asse centrale delle forze peso. Nel caso di forze parallele generiche la (3.14) ne definisce il *centro*.

Vediamo alcune proprietà del baricentro, che ne mettono in luce il significato fisico. Intanto, per quanto si è detto,

■ il baricentro è invariante per rotazione delle forze peso.

Ciò rende conto del ben noto fatto che il baricentro di un qualunque oggetto non cambia quando l'oggetto ruota o (il che è equivalente) quando la verticale locale cambia direzione (nel passare per esempio dal Polo all'Equatore). La proprietà si usa anche enunciare come definitoria di  $G$ :

■ il baricentro è il punto comune agli assi centrali che si ottengono ruotando tutte le forze peso di uno stesso angolo.

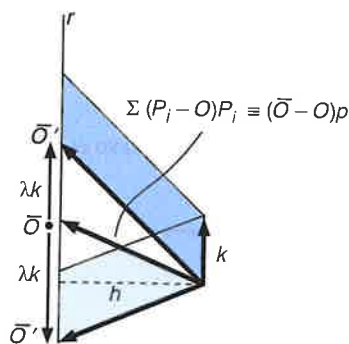


Figura 3.24



Un'altra notevole proprietà si legge nella (3.13) dividendo numeratore e denominatore per l'accelerazione di gravità  $g$ . Essendo

$$x_G = \frac{\sum_i x_i m_i}{m}; \quad y_G = \frac{\sum_i y_i m_i}{m}; \quad z_G = \frac{\sum_i z_i m_i}{m} \quad (3.16)$$

il baricentro non dipende dalla gravità.

Perciò esso si chiama anche *centro di massa*. Rimane inalterato passando dalla Terra ad altro pianeta. E resta anche inalterato cambiando le masse secondo un arbitrario coefficiente di proporzionalità. Perciò per la determinazione del baricentro basterà assegnare le masse in una scala arbitraria e i loro punti di localizzazione; nei grafici non sarà necessario disegnare i vettori peso. La (3.15) o le (3.16) forniscono la posizione di  $G$  in forma vettoriale o attraverso le coordinate cartesiane.

Sia nella forma scalare che nella forma vettoriale si legge:

il baricentro è la media "pesata" delle posizioni dove sono collocate le masse; le masse fungono da "pesi".



Applicare il peso totale nel baricentro significa *ridurre* al baricentro le forze peso e cioè lasciarne inalterate risultante e momento. Non altro! Non sempre "si può" mettere il peso totale nel baricentro.

### Esempio 3.1 Due masse puntiformi

Siano due masse puntiformi localizzate nei punti  $P_1$  e  $P_2$ .

Assumendo  $P_1$  come origine di un asse  $x$  congiungente  $P_1$  con  $P_2$  (Figura 3.25) le (3.16) divengono

$$x_G = \frac{x_2 m_2}{m_1 + m_2}; \quad y_G = 0; \quad z_G = 0$$

da cui

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{x_G}{x_2 - x_G} = \frac{x_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2}}{x_2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (3.17)$$

che afferma

il punto  $G$  divide il segmento  $P_1 P_2$  in parti inversamente proporzionali ai pesi.

La (3.17) è l'aspetto analitico della costruzione grafica di Figura 3.20.

Se le due masse sono uguali  $G$  dimezza  $P_1 P_2$ . La sua forma vettoriale (3.16) si può scrivere (sottintendendo una generica origine  $O$ )

$$G = \frac{P_1 + P_2}{2} \quad (3.18)$$

### Esempio 3.2 Tre masse puntiformi

Siano tre masse puntiformi localizzate in  $P_1 P_2 P_3$ . La costruzione grafica di  $G$  è rappresentata nella Figura 3.26. Analiticamente le coordinate di  $G$  sono date dalla (3.16) una volta note le coordinate di  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .

Se le tre masse sono uguali, assumendo come piano  $xy$  il piano delle tre masse, la determinazione analitica di  $G$  è

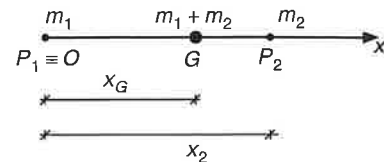


Figura 3.25

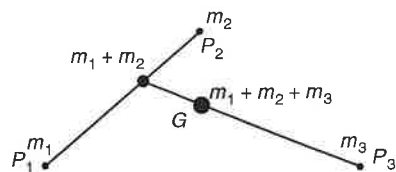


Figura 3.26

$$G = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} \quad \begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ z_G = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Esso altro non è che il *baricentro geometrico* del triangolo  $P_1P_2P_3$ , noto dalla geometria elementare come punto di intersezione delle tre mediane. ■

Le (3.18) e (3.19) affermano in casi particolari quella che è una proprietà generale dei baricentri:

■ se esistono piani o assi di *simmetria materiale* il baricentro vi appartiene.

Mentre rimandiamo all'Appendice C per un'analisi più estesa dei baricentri, enunciamo qui ancora un'altra notevole proprietà, la

■ *proprietà distributiva*: il baricentro di un sistema di masse è il baricentro di baricentri parziali dove siano collocate le masse parziali.

Anche questa proprietà è conseguenza quasi immediata della definizione. Infatti (limitiamoci al commento di una coordinata  $x_G$ ): le masse originariamente formanti un sistema  $S$  siano suddivise per esempio in due porzioni  $S_1$  ed  $S_2$ .

$$x_G = \frac{\sum_S m_i x_i}{m_S} = \frac{\sum_{S_1} m_i x_i + \sum_{S_2} m_i x_i}{m_{S_1} + m_{S_2}} = \frac{x_{G_1} m_{S_1} + x_{G_2} m_{S_2}}{m_{S_1} + m_{S_2}} \quad (3.20)$$

dove

$$x_{G_1} = \frac{\sum_{S_1} m_i x_i}{m_{S_1}}; \quad x_{G_2} = \frac{\sum_{S_2} m_i x_i}{m_{S_2}}.$$

La (3.20) mostra che, qualunque fosse la distribuzione originaria delle masse, il baricentro è baricentro di due sole masse collocate nei due baricentri parziali.

Il procedimento di Figura 3.26 ne è caso particolare. Per quanto le suddette proprietà siano state argomentate per masse puntiformi concentrate, la loro estensione al *continuo* è intuitiva (verrà precisata nel Capitolo 5). Accade cioè che: il baricentro di un segmento omogeneo sta nel suo punto di mezzo; il baricentro di una lamina triangolare omogenea sta nell'intersezione delle mediane; il baricentro dell'asta omogenea di Figura 3.27 si può cercare come baricentro dei baricentri parziali ecc.

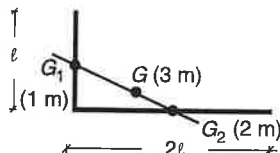


Figura 3.27



Le (3.13) restano valide anche quando le forze, parallele, non siano equiverse.

Le componenti  $p_i$  non sono in tal caso tutte positive e le  $\Sigma$  sono somme algebriche. Ciò è utile anche per la determinazione di baricentri di corpi forati: la mancanza di massa può essere trattata come massa "negativa" (si veda l'Appendice C).

Veniamo ora alla riduzione dell'altro notevole sistema di forze a invariante scalare nullo: le forze piane.

Anche per esse si è già visto come si possa giungere all'asse centrale per successiva composizione delle forze due a due. Anche per esse, procedendo analiticamente, si giunge alla determinazione dell'asse centrale esplicitando la (3.11). Vediamo ora un procedimento grafico generale e sintetico: il metodo del *polygono funicolare*.

Siano tre (per semplicità) le forze nel piano:  $F_1F_2F_3$  applicate rispettivamente in  $P_1P_2P_3$  (Figura 3.28). Si disegni a lato la poligonale delle forze (come vettori liberi) 0123 e da un polo  $O$  arbitrario se ne proiettino i vertici. Siano  $a' b' c' d'$  le

proiett  
le forz  
vertice  
b para  
tracci  
si trac  
nicola  
poligo  
poligo  
Inf  
lungo  
lente a  
è equiv  
Cosicc  
ste equ  
ridotto  
re. Ess  
Il meto  
piane,  
Au  
Nel  
e ultim  
risultar  
pia equ



Il polig  
proietta  
cessive  
dono (c  
pesa ag  
prio dal

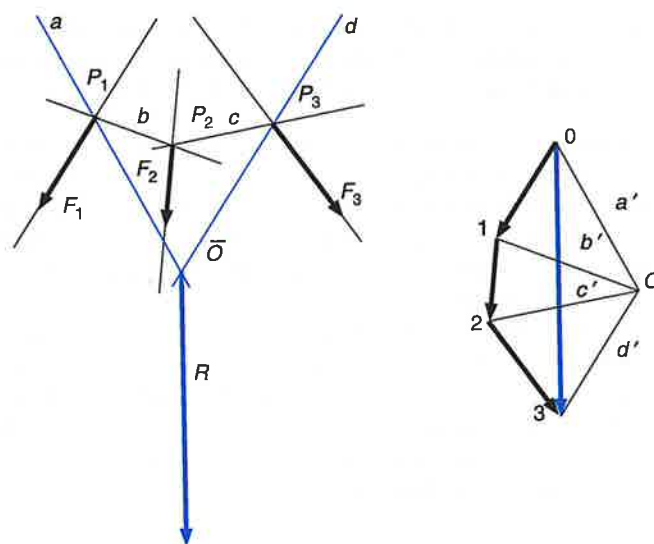


Figura 3.28

proiettanti i 4 vertici della poligonale. Si traccino poi le rette  $abcd$  che connettono le forze effettive: si tracci la retta  $a$  parallela alla retta  $a'$  che proietta il primo vertice 0 della poligonale; a partire dal punto in cui  $a$  incontra  $F_1$  si tracci la retta  $b$  parallela alla seconda proiettante  $b'$ ; a partire dal punto in cui  $b$  incontra  $F_2$  si tracci la retta  $c$  parallela alla proiettante  $c'$ ; a partire dal punto in cui  $c$  incontra  $F_3$  si tracci la retta  $d$  parallela alla proiettante  $d'$ . Il poligono  $abcd$  è il poligono funicolare. Il punto  $O$  di intersezione fra il primo lato  $a$  e l'ultimo lato  $d$  del poligono funicolare è un punto dell'asse centrale: la risultante  $R$  (da 0 a 3 nella poligonale) applicata in  $O$  è equivalente alle forze assegnate.

Infatti la prima forza  $F_1$  è equivalente alle due forze (non disegnate) agenti lungo  $a$  e  $b$ , uguali rispettivamente ai due vettori  $\vec{OO}$  e  $\vec{O1}$ ; la forza  $F_2$  è equivalente alle due forze agenti lungo  $b$  e  $c$ , uguali rispettivamente a  $\vec{1O}$  e a  $\vec{O2}$ ; la forza  $F_3$  è equivalente alle due forze agenti lungo  $c$  e  $d$ , uguali rispettivamente a  $\vec{2O}$  e a  $\vec{O3}$ . Cosicché sui lati interni  $b$  e  $c$  del poligono funicolare si sono applicate forze opposte equilibrate (equivalenti al sistema nullo) e il sistema di forze originario si è ridotto a due sole forze agenti secondo primo e ultimo lato del poligono funicolare. Esso è perciò equivalente alla risultante applicata nel loro punto di intersezione. Il metodo è affatto generale e può applicarsi a un qualsivoglia sistema di forze piane, convergenti o parallele.

Aumentando il numero delle forze aumentano i lati del poligono funicolare.

Nel caso in cui la risultante sia nulla, la poligonale delle forze è chiusa; primo e ultimo vertice coincidono, cosicché primo e ultimo lato del poligono funicolare risultano paralleli e sono rette d'azione delle due forze che costituiscono una coppia equivalente al sistema originario.



La retta d'applicazione della risultante è determinata in modo univoco dal metodo del poligono funicolare ma infinite sono le scelte del poligono funicolare che connette il sistema di forze originario.

A questo importante fatto si collegano le osservazioni che già si sono avanzate nel Capitolo 1 (e che saranno riprese nel Capitolo 7) circa la "miglior" progettazione di un arco che debba sopportare certi carichi.

Il poligono funicolare diviene poligono delle successive risultanti se come polo proiettante  $O$  si assume il primo vertice della poligonale. Nel poligono delle successive risultanti ogni lato è diretto come la risultante di tutte le forze che precedono (o che seguono); secondo tale poligono funicolare si attegga una fune appesa agli estremi; tale è la sua configurazione equilibrata quando sollecitata proprio dal sistema di forze, attive e reattive, che essa connette.

Il poligono delle successive risultanti

Come già discorsivamente introdotto nel Capitolo 1, la fune resistente solo a trazione si atteggia, in condizioni di equilibrio, in modo da essere funicolare dei carichi o poligono delle successive risultanti (vedi Capitolo 7).

**Riassumendo:** un sistema di forze a risultante  $\mathbf{R} \neq 0$  è equivalente alla sola risultante, applicata sull'asse centrale, se è l'invariante scalare  $I \neq 0$ .

Esempi cospicui ne sono le forze piane e le forze parallele. Per queste ultime è definito, sull'asse centrale, un punto detto *centro delle forze parallele* che dipende solo dal modulo e dal punto di applicazione delle forze, non dalla direzione, secondo la (3.14).

Nel caso in cui le forze parallele siano i pesi, tale centro si dice *baricentro*. Esso non dipende neppure dalla gravità. Si dice perciò anche *centro di massa* e per corpi omogenei coincide con il baricentro geometrico. In termini del tutto generali l'asse centrale (se è  $I = 0$ ) è definito dalle (3.11). Un metodo grafico nel piano per costruire la retta d'applicazione della risultante è costituito dal metodo del *poligono funicolare*.

*Il momento di un sistema di forze è il momento della risultante applicata sull'asse centrale, purché esso sia luogo di momento nullo*

### 3.9 Postulati della Statica del corpo rigido ed equazioni cardinali

Vediamo ora quali siano le condizioni caratteristiche per l'equilibrio di un corpo rigido, intendendo ancora, ovviamente, che *equilibrio significa mantenimento della quiete in un sistema di riferimento inerziale*.

Anche ora, come a proposito del punto materiale, dobbiamo fare affidamento su proposizioni assiomatiche iniziali che l'esperienza induce ad accettare come credibili ai fini dell'analisi che ci si propone di svolgere.

Non sarebbe necessario introdurre postulati specifici per il corpo rigido. Vedremo nel Capitolo 4 come la Statica del corpo rigido potrebbe trovare collocazione nella formulazione conseguente al Principio dei Lavori Virtuali; oppure essa potrebbe ricavarsi come caso particolare della Dinamica dei sistemi.

Tuttavia, per una trattazione semplice e vicina all'intuito fisico, la Statica del corpo rigido viene spesso introdotta con suoi specifici postulati. Sono i tre seguenti.

- 1) Se su di un corpo rigido in quiete non agisce *nessuna forza esterna*, il corpo persevera nel suo stato di quiete.
- 2) Se agisce *una sola forza esterna* il corpo non persevera nel suo stato di quiete.
- 3) Se agiscono due forze esterne, il corpo persevera nel suo stato di quiete *se e solo se le due forze sono opposte e allineate*.

Per quanto semplici e convincenti, anche questi postulati danno luogo a qualche considerazione critica, specialmente nei riguardi del primo, in quanto è ben difficile predisporre un'esperienza in assenza di qualunque forza. Tralasciando le questioni epistemologiche vediamo come questi postulati, assieme al teorema fondamentale sull'equivalenza, consentano di enunciare le

■ *condizioni caratteristiche per l'equilibrio di un corpo rigido libero:* consistono nell'essere nulli risultante e momento (rispetto a un generico punto  $A$ ) delle forze esterne applicate al corpo rigido:

$$\begin{cases} \mathbf{R} = 0 \\ \mathbf{M}_A = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$



La condizione è sufficiente: infatti se le (3.21) sono soddisfatte il sistema delle forze esterne è equivalente al sistema nullo e l'equilibrio sussiste per il primo postulato.

La condizione è necessaria: se infatti fosse

$$\mathbf{R} = 0 \text{ ed } \mathbf{M} \neq 0$$

il sistema sarebbe equivalente a una coppia e l'equilibrio non sussisterebbe per il terzo postulato; se fosse  $\mathbf{R} \neq 0$  il sistema potrebbe essere equivalente o a una sola forza o a forza più coppia; entrambi i casi non sarebbero di equilibrio per il secondo e per il terzo postulato (l'insieme di forza più coppia è equivalente a due forze che non sono opposte e allineate).



Se le (3.21) sono soddisfatte il momento è nullo rispetto a qualunque polo. Infatti, se è  $\mathbf{R} = 0$  il momento è invariante al variare del polo.

*Condizione caratteristica significa condizione necessaria e sufficiente*

- Le (3.21) si dicono *equazioni cardinali della Statica* (si indicheranno a volte con EC). Esse sono necessarie e sufficienti per l'equilibrio del corpo rigido libero; inoltre, sono necessarie per l'equilibrio di qualunque sistema materiale.

Vale infatti il *postulato dell'irrigidimento*:

- Se un qualunque sistema materiale è in equilibrio sotto l'azione di certe forze esterne, resta in equilibrio, sotto l'azione delle stesse forze, qualora si aggiunga il vincolo dell'irrigidimento.

### 3.10 Il caso isostatico

Se l'attenzione al corpo rigido *libero* è servita per enunciare condizioni caratteristiche per l'equilibrio, l'interesse pratico del progettista è rivolto alle *strutture vincolate* (al terreno o comunque all'ambiente esterno). Anzi il più delle volte vincolate in modo che, quando considerate nella loro effettiva deformabilità, esse non possano subire spostamenti se non quelli dovuti alla deformabilità propria della struttura e a eventuali (piccoli) cedimenti dei vincoli.

Restiamo per ora nell'ambito di strutture schematizzate da uno o più corpi rigidi variamente vincolati fra loro e con l'ambiente esterno. Se una siffatta struttura è vincolata in modo da non poter subire (come schema teorico) spostamento alcuno e se i vincoli non sono "sovrabbondanti" (in condizioni iperstatiche) essa è detta essere in condizioni *isostatiche*. Per tale struttura l'equilibrio sussiste grazie ai vincoli, qualunque sia il sistema di forze esterne attive applicate.

Questa constatazione, assieme alle equazioni cardinali e al postulato sulle reazioni vincolari (Paragrafo 2.6), consente il seguente enunciato delle equazioni cardinali (come condizione necessaria).

- Se l'equilibrio sussiste, risultante e momento (rispetto a un generico punto) di *tutte le forze esterne, attive e reattive*, deve essere uguale a zero:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{\text{est}} \begin{matrix} \text{att} \\ \text{realt} \end{matrix} = 0 \\ \mathbf{M}_A^{\text{est}} \begin{matrix} \text{att} \\ \text{realt} \end{matrix} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

In tali equazioni, se i vincoli non consentono spostamento alcuno alla struttura, sono solo le reazioni vincolari a fungere da incognite.

Quando si tratti di un sol corpo rigido in condizioni isostatiche la soluzione è unica. In tal caso infatti c'è pareggio fra numero di equazioni e numero di incognite e il sistema di equazioni (3.22) non è degenere.

(3.21)

Quando si tratti di una struttura formata da più corpi rigidi le (3.22), ancora necessarie, non sono in generale sufficienti a determinare le reazioni vincolari (vedi Paragrafo 3.13).

Per comprendere appieno queste affermazioni e per decidere se una struttura è in condizioni isostatiche occorre approfondire l'analisi dei vincoli e degli spostamenti possibili, il che sarà fatto nel prossimo capitolo. Per ora limitiamoci, nel caso piano, a constatare intuitivamente che alcune tipiche situazioni di vincolo realizzano condizioni isostatiche.

Nel caso piano, assumendo il piano direttore come piano  $xy$ , le (3.22) divengono

$$\begin{cases} R_x^{\text{est}} \leq \begin{matrix} \text{alt} \\ \text{realt} \end{matrix} = 0 \\ R_y^{\text{est}} \leq \begin{matrix} \text{alt} \\ \text{realt} \end{matrix} = 0 \\ M_A^{\text{est}} \leq \begin{matrix} \text{alt} \\ \text{realt} \end{matrix} = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Si noti che la terza equazione è in effetti una proiezione secondo l'asse  $z$ . Ma, come si è detto, nel caso piano è sufficiente far riferimento alla elementare definizione di momento (3.1).



Nell'uso delle (3.23) si tenga presente che una forza incognita equivale a due componenti scalari incognite, mentre una forza incognita di direzione nota equivale a una sola grandezza scalare incognita.

Le reazioni vincolari sono forze a priori incognite. Ma, come già si è visto a proposito del punto materiale, si può dire qualcosa a proposito di queste forze, qualcosa che le rende meno indeterminate, e che dipende dal tipo di vincolo.

Le reazioni vincolari sono forze di contatto. Il loro studio come interazione fra punti sarebbe quanto mai complicato; dipenderebbe da quanto le regioni di contatto si deformano per la reciproca influenza di contatto nel rispetto della non compenetrazione dei corpi.

Per fortuna nella maggior parte dei problemi della Statica è sufficiente tener conto delle caratteristiche globali (risultante e momento) delle forze generate nella regione di contatto. Sono tali caratteristiche globali che chiamiamo *reazioni vincolari*.

Confortati da evidenze sperimentali possiamo ritenere valido questo schema di comportamento di alcuni vincoli nel caso piano.

**L'incastro.** Realizza il collegamento rigido fra struttura e terreno o fra due componenti strutturali (Figura 3.29a). Si usa rappresentare come nella Figura 3.29b, garantisce l'assenza di qualunque spostamento rigido (assoluto, se l'incastro è a terra o relativo, se l'incastro collega due corpi rigidi). Ciò significa che esso è in grado di fornire il più generale sistema di forze, il quale si è visto essere equivalente a forza più coppia. Nel piano ciò equivale a dire che l'incastro fornisce tre componenti scalari  $X_1 X_2 X_3$  (Figura 3.29c) di reazioni vincolari\* che fungono da incognite nel sistema (3.31). L'incastro si dice pertanto vincolo triplo.

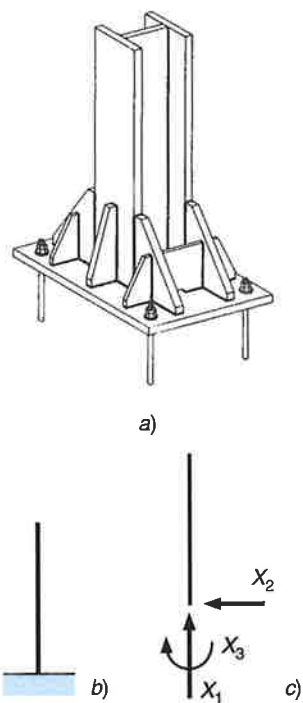


Figura 3.29

\* La dizione è impropria per il momento  $X_3$ , che non è una forza. Ci sembra tuttavia efficace metterne in evidenza il ruolo di incognita che il momento d'incastro svolge, al pari di  $X_1$  e  $X_2$ . Inoltre si vedrà (Capitolo 4) in qual senso anche i momenti siano componenti "generalizzate" di sollecitazione.

2), ancora neces-  
i vincolari (vedi  
se una struttura è  
vincoli e degli  
ora limitiamoci,  
azioni di vinco-

(3.22) divengono

(3.23)

do l'asse  $z$ . Ma,  
ementare defini-

cognita equivale  
ncognita di dire-  
gnita.

à si è visto a pro-  
ueste forze, qual-  
vincolo.

come interazione  
nto le regioni di  
rispetto della non

ciente tener conto  
te nella regione di  
i vincolari.

questo schema di

erreno o fra due  
ome nella Figura  
assoluto, se l'in-  
li). Ciò significa  
l quale si è visto  
dire che l'inca-  
azioni vincolari\*  
e pertanto vinco-

ora tuttavia efficace  
e, al pari di  $X_1$  e  $X_2$ .  
enti "generalizzate"

**La cerniera.** Realizza un collegamento che consente rotazioni (Figura 3.30a). Si usa rappresentare come nella Figura 3.30b; garantisce la fissità di un punto (assoluta o relativa), ma non è in grado di fornire momenti rispetto a quel punto. Ciò significa che è in grado di fornire una forza comunque diretta e volta, e cioè due componenti scalari  $X_1X_2$  (Figura 3.30c). Si dice vincolo doppio.

**Pattino o manicotto.** Realizza un collegamento che consente scorrimenti (assoluti o relativi) in una determinata direzione (Figura 3.31a). Si usa rappresentare come nella Figura 3.31b; garantisce l'assenza di rotazioni e la fissità di una coordinata di un punto, l'altra essendo libera poiché lo scorrimento è consentito. Fornisce una forza  $X_1$  nella direzione dello spostamento impedito e un momento  $X_2$  (Figura 3.31c). È vincolo doppio.

**Pendolo, biella, carrello, appoggio.** Realizzano collegamenti che impediscono solo spostamenti in una determinata direzione (assoluti o relativi) (Figura 3.32a). Si rappresentano come nella Figura 3.32b. Forniscono una forza  $X_1$  in quella direzione. Sono vincoli semplici (Figura 3.32c).



Le frecce usate per indicare le reazioni vincolari incognite sono per così dire "freccie di prova", in quanto il verso non è a priori noto. Sarà la soluzione delle (3.12) a dire se la freccia di prova è da confermare oppure da invertire (vedi Appendice A).

L'appoggio e il pendolo (se realizzato con una fune) presentano un'anomalia: il verso della forza da essi fornita non è disponibile. L'appoggio non può che reggere dal piano d'appoggio verso il corpo; il pendolo (se non rigido) non può che esercitare una trazione. Si dicono *vincoli unilateri* (vedi Capitolo 4). Se la soluzione richiedesse di invertire la freccia, ciò significherebbe che l'equilibrio non sussiste. Tuttavia il carrello è generalmente immaginato bilatero, come se le ruotine fossero impegnate nella gola di un binario.

Merita infine un commento l'applicazione della coppia che l'incastro o il pattino o il manicotto esercitano sull'asta "nel punto" in cui l'asta è vincolata. Vale a questo proposito l'osservazione introdotta nel Paragrafo 3.5. Nel caso dei vincoli ora ricordati il braccio della coppia è da immaginare ricavato nello spessore dell'asta, spessore esistente, anche se in genere non raffigurato nei disegni (Figura 3.33). Si noti che *agli effetti dell'equilibrio* del corpo rigido è ininfluente il "punto" d'applicazione della coppia.

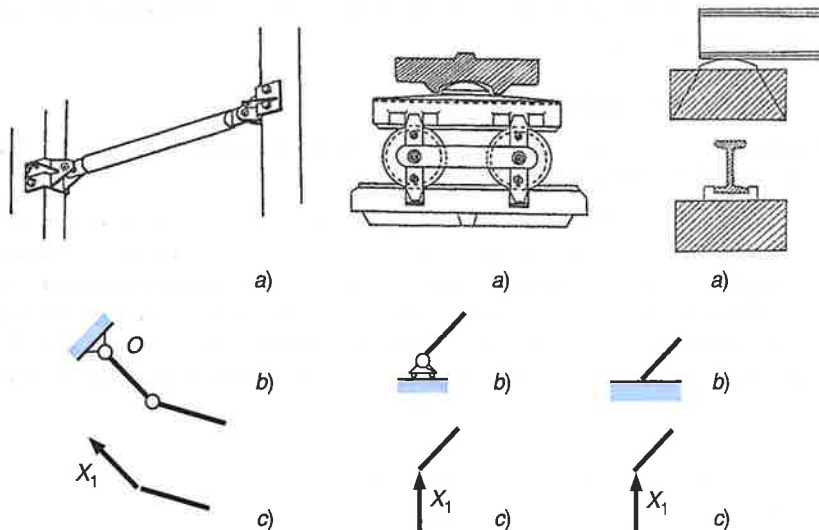
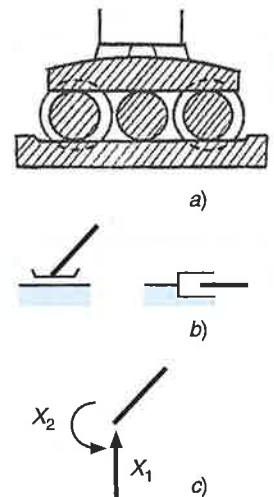
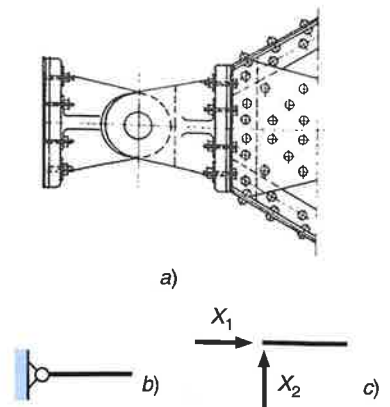


Figura 3.31

Figura 3.32

Figura 3.30



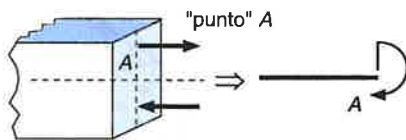


Figura 3.33

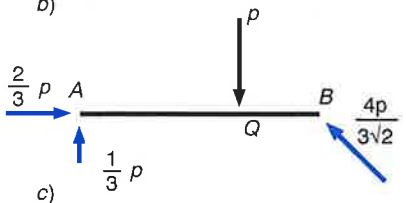
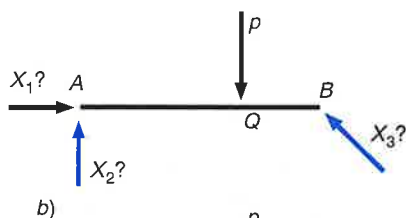
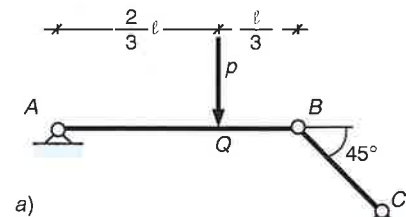


Figura 3.34

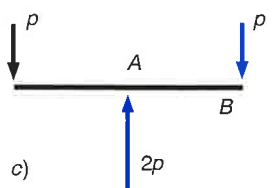
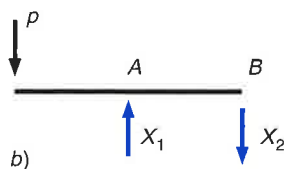
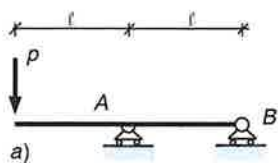


Figura 3.35

Dei vincoli passati in rassegna solo l'incastro è di per sé sufficiente a garantire l'equilibrio di un corpo rigido nel piano. Degli altri occorre fare una "corretta" combinazione per garantire al corpo rigido condizioni isostatiche. Come già detto, la trattazione esaustiva di come possa avvenire una "corretta" combinazione è rimandata al Capitolo 4. Ora affrontiamo direttamente qualche problema piano e ci renderemo conto man mano di quali problemi (con tre componenti incognite di reazioni vincolari) diano luogo a soluzione unica. Solo questi corrispondono a condizioni isostatiche. In essi il corpo rigido sarà vincolato o con vincolo triplo, o con vincolo doppio e vincolo semplice, o con tre vincoli semplici.

### Esempio 3.3 Asta con cerniera e biella

Un'asta  $AB$  è vincolata con cerniera in  $A$  e biella a  $45^\circ$  in  $B$ . Sia soggetta a un carico  $p$  applicato a  $2/3$  della sua lunghezza  $l$ . Trovare le tre componenti di reazione vincolare.

La soluzione è la seguente (Figura 3.34)

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = X_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X_2 + X_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = p \\ \frac{2}{3} pl = X_3 l \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{2}{3} p \\ X_2 = p - \frac{2}{3} p = \frac{1}{3} p \\ X_3 = \frac{4}{3\sqrt{2}} p \end{cases}$$



Riguardo alla convenzione sui segni conviene chiamare  $X_1, X_2, \dots$  i moduli delle reazioni incognite e ipotizzare un verso (freccia) per le reazioni vincolari incognite. Se l'ipotesi è giusta il risultato per  $X_1, X_2, \dots$  deve essere positivo (poiché sono i moduli); altrimenti la freccia ipotizzata è da invertire (definizioni più rigorose si possono trovare in Appendice A).

**Commento:** per cominciare a rendersi conto che non sempre i vincoli sono correttamente disposti (anche se danno luogo a tre componenti incognite di reazioni vincolari) si provi a risolvere il problema precedente se la biella  $BC$  è orizzontale. Il sistema di equazioni che si ottiene non ammette soluzioni. L'equilibrio non sussiste!

### Esempio 3.4 Un'equazione diventa identità

Un'asta sia vincolata con due carrelli orizzontali e soggetta a un carico  $p$  come nella Figura 3.35. Trovare le reazioni vincolari.

L'asta non è in condizioni isostatiche: potrebbe spostarsi orizzontalmente. I vincoli infatti forniscono solo due componenti di reazioni vincolari. Senonché la prima delle equazioni di equilibrio (3.12) è identicamente soddisfatta (non lo sarebbe se la forza attiva avesse componente orizzontale, e l'equilibrio non potrebbe sussistere!). Le altre due equazioni consentono di trovare  $X_1$  e  $X_2$  in quanto i due soli carrelli bastano a garantire l'equilibrio per il particolare tipo di sollecitazione.

$$\begin{cases} R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = X_2 + p \\ pl = X_2 l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 2p \\ X_2 = p \end{cases}$$



Si noti che la soluzione conferma la freccia verso il basso ipotizzata per  $X_2$ . Se il carrello in  $B$  fosse sostituito da un semplice appoggio l'equilibrio non sussisterebbe.



Se una struttura, per una data situazione di carichi, non “fruisce” di una libertà di spostamento concessa dai vincoli, accade sempre che una corrispondente equazione di equilibrio diviene un'identità (vedi Capitolo 4).

### Esempio 3.5 Tre vincoli semplici

Un'asta  $AB$  sia vincolata con tre bielle e sollecitata come nella Figura 3.36. Siano  $X_1, X_2, X_3$  i moduli delle tre reazioni vincolari.

La soluzione è la seguente

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = p \\ X_2 + X_3 = p \\ \frac{2}{3}pl = X_3l + pl \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = p \\ X_2 = \frac{4}{3}p \\ X_3 = -\frac{1}{3}p \end{cases}$$

Si usa dire che le due bielle convergenti in  $A$  equivalgono a una cerniera in  $A$ .

**Commenti:** si provi a risolvere il problema se la biella in  $B$  fosse orizzontale. L'asta  $AB$  non sarebbe in condizioni isostatiche. L'equilibrio non sussisterebbe.

Rappresentazioni del tipo di Figura 3.34c, 3.35c, 3.36c si dicono diagrammi di corpo libero.

### Esempio 3.6 Un incastro

Un'asta a  $T$  sia incastrata al piede e soggetta a due forze e a una coppia come nella Figura 3.37. Trovare le reazioni vincolari.

La soluzione è la seguente

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = p \\ X_2 = p \\ X_3 = pl \end{cases}$$

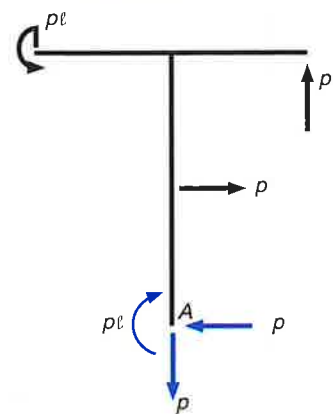
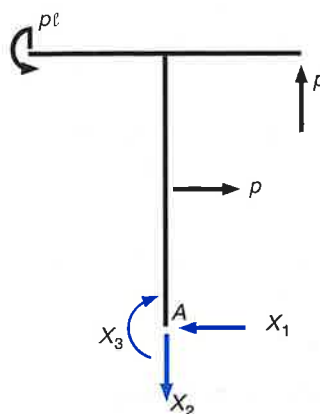
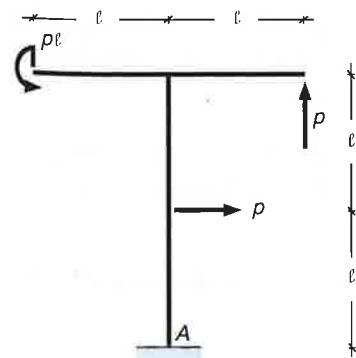


Figura 3.37

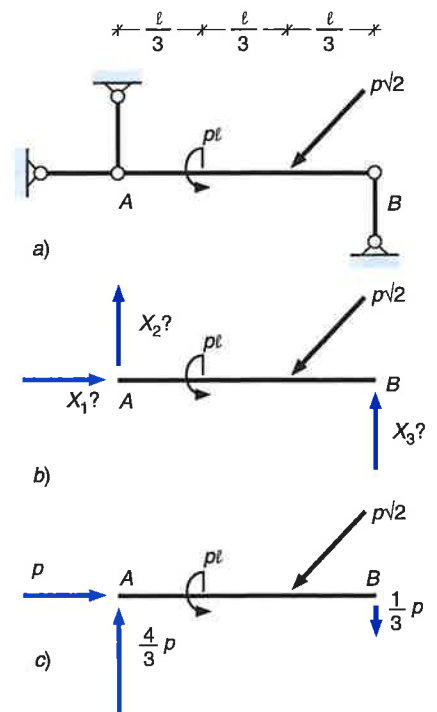


Figura 3.36

Come esercizio, in questo esempio e nei precedenti si espliciti la soluzione per valori numerici di  $p$  e di  $l$ , per esempio  $p = 800 \text{ N}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ .

### 3.11 Il poligono funicolare e le condizioni grafiche di equilibrio

Nel caso piano, cui finora abbiamo dedicato la maggiore attenzione, è molto espressivo e di immediata comprensione l'aspetto grafico delle equazioni di equilibrio. La prima equazione di equilibrio,  $\mathbf{R} = 0$ , si commenta immediatamente, e con validità del tutto generale (anche in tre dimensioni):

■ In condizioni di equilibrio la poligonale delle forze (attive e reattive) è chiusa.

Basta ricordare infatti la definizione stessa di somma (o risultante) di un sistema di vettori; affinché sia nulla, primo e ultimo vertice della poligonale delle forze devono coincidere.

Per quanto riguarda la seconda equazione di equilibrio, ( $\mathbf{M} = 0$ ) vediamo dapprima quale ne sia l'aspetto grafico in qualche caso particolare.

**Due forze.** La possibilità, per due forze, di essere equilibrate è descritta dal terzo postulato: devono essere opposte ( $\mathbf{R} = 0$ ) e *allineate* ( $\mathbf{M} = 0$ ).

Sia per esempio un'asta rigida sottoposta a forze applicate *solo* agli estremi  $A$  e  $B$ ; quand'anche siano più d'una le forze in ciascun estremo, una volta sommate fra loro rispettivamente in  $A$  e in  $B$  (prima operazione invariante), esse danno luogo a due forze che in condizioni di equilibrio sono allineate opposte (Figura 3.38a, b). L'asta  $AB$  in tali condizioni si dice *biella*.

■ Il termine *biella*, come sinonimo di pendolo, si usa anche dal punto di vista puramente cinematico come collegamento, tramite due cerniere estreme, con altri elementi strutturali indipendentemente dal fatto che l'asta sia caricata oppure no. Dal punto di vista statico il termine *biella* è riservato a un'asta che sia sollecitata solo agli estremi e che in tali estremi non riceva momenti.

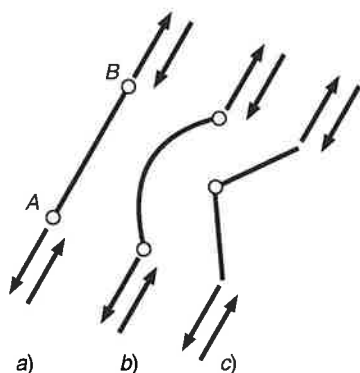


Figura 3.38

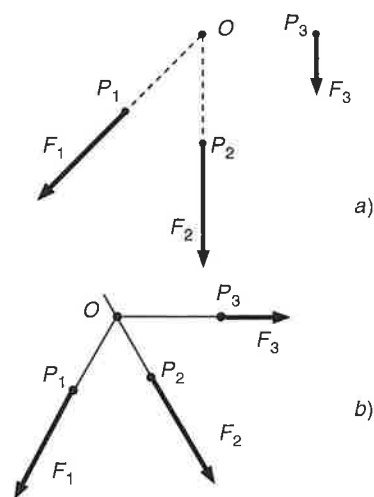


Figura 3.39

☞ Se due forze opposte allineate sono applicate a una struttura non rigida (Figura 3.38c) non garantiscono affatto l'equilibrio! Si dice sempre tuttavia che le due forze formano un sistema equilibrato (vedi Tabella 3.1).

**Tre forze.** Condizione necessaria affinché tre forze siano equilibrate è che siano *concorrenti*.

Infatti, se non fossero concorrenti ci sarebbe senz'altro un punto  $O$  rispetto al quale sarebbe  $M_O \neq 0$ : il punto di intersezione fra due delle tre forze, punto rispetto al quale solo la terza forza avrebbe momento (Figura 3.39a).

☞ La condizione non è sufficiente per l'equilibrio! (Figura 3.35b). La concorrenza infatti assicura solo l'esistenza di un punto  $O$  rispetto al quale sia  $M_O = 0$ .

Alla luce di queste semplici proprietà cominciamo a risolvere graficamente alcuni problemi statici.

#### Esempio 3.7

Risolvere graficamente l'Esempio 3.3.

Il vincolo  $BC$  (biella o pendolo) fornisce all'asta  $AB$  una forza incognita  $X_1$  di direzione nota. Per il punto  $O$  intersezione di  $X_1$  con la forza attiva  $p$  deve passare anche la terza forza  $X_2$  fornita dalla cerniera. D'altronde la poligonale delle tre forze deve essere chiusa. Disegnata perciò la forza  $p$  (a lato della struttura) si conducano per i suoi estremi le parallele alle due rette d'azione di  $X_1$  e di  $X_2$  (ora entrambe note). Si ottiene un triangolo. Un lato, con freccia nota, è la forza attiva  $p$ ; gli altri due forniscono, in modulo direzione e verso, le due reazioni vincolari: i moduli sono le lunghezze dei due lati, le direzioni quelle dei lati stessi (già determinate dalla condizione di concorrenza) i versi tali che si rincorrono (a partire da quello noto di  $p$ ). La soluzione è rappresentata nella Figura 3.40.

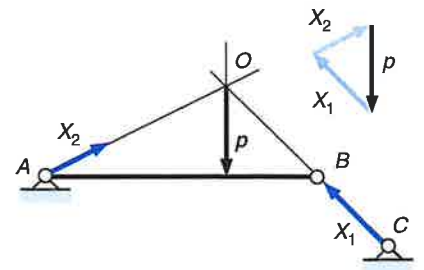


Figura 3.40

### Esempio 3.8

Risolvere graficamente l'Esempio 3.4.

Da un qualsiasi punto  $O$  della retta d'azione di  $p$  si mandino due rette per  $B$  e per  $C$  rispettivamente (trasformazione 1, Paragrafo 3.7). Due forze  $X'_1$  e  $X'_2$  aventi queste rette d'azione equilibrano  $p$  (e si trovano come nell'esercizio precedente). Si scompongano poi queste forze secondo le loro componenti in direzione di  $AB$  e in quella perpendicolare: le prime componenti si annullano (opposte allineate) le seconde sono le reazioni  $X_1$  e  $X_2$  ricercate. La soluzione è rappresentata nella Figura 3.41.

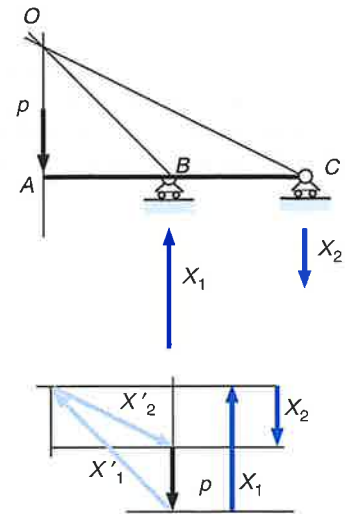


Figura 3.41

### Esempio 3.9

L'asta  $BD$ , soggetta a un carico concentrato  $p$ , sia vincolata da tre bielle come nella Figura 3.42. Trovare graficamente le RV.

Si consideri dapprima l'insieme delle due reazioni vincolari  $X_1$  e  $X_2$  come un'unica reazione incognita in  $B$  (si usa dire che le due bielle sono equivalenti a una cerniera nel loro punto d'incontro). L'asta  $BD$  è allora soggetta a tre forze che devono pertanto essere concorrenti. Poiché  $p$  e  $X_3$  sono parallele deve esserlo anche la forza complessiva derivante da  $B$ . Pertanto deve essere  $X_1 = 0$  e  $X_2$  si trova come nell'Esempio 3.8. La soluzione è rappresentata nella Figura 3.42.

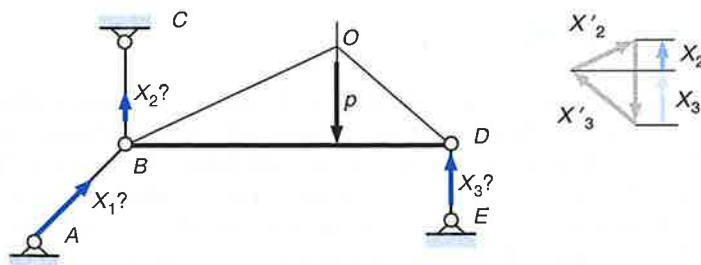


Figura 3.42

### Esempio 3.10

Risolvere lo stesso problema con una forza  $p$  a  $45^\circ$  come nella Figura 3.43.

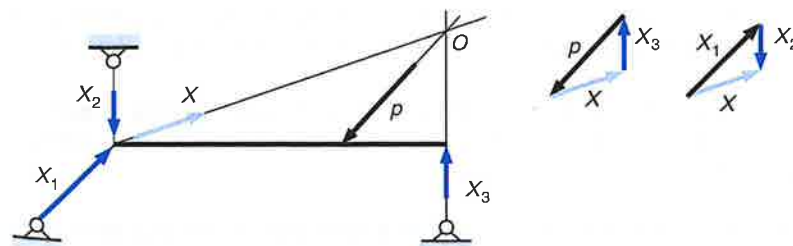


Figura 3.43

Poiché  $\mathbf{X}_3$  e  $\mathbf{p}$  si incontrano in  $O$ , per  $O$  deve passare anche la forza  $\mathbf{X}$ , somma di  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ . Si equilibra  $\mathbf{p}$  con  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}_3$  (come nell'Esempio 3.7) e poi si scompone  $\mathbf{X}$  in  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ .

Nel caso generale (piano) di più forze la seconda condizione grafica di equilibrio si mette chiaramente in evidenza con il metodo del poligono funicolare. La chiusura della poligonale delle forze ( $\mathbf{R} = 0$ ) implica che primo e ultimo vertice di tale poligonale coincidano (per esempio  $0 \equiv 4$  nella Figura 3.30) e perciò che primo e ultimo lato del poligono funicolare siano paralleli. Infatti il metodo, che riduce le forze a essere due, dirette come primo e ultimo lato del poligono funicolare, deve condurre a una coppia. Se poi anche il momento deve annullarsi, le due forze componenti la coppia devono sovrapporsi e cioè *primo e ultimo lato del poligono funicolare devono coincidere*. Ciò si usa esprimere brevemente in questo modo:

*Poligono delle forze chiuso significa coincidenza di primo e ultimo vertice. Poligono funicolare chiuso significa sovrapposizione di primo e ultimo lato*

■ in condizioni di equilibrio il poligono funicolare che connette le forze (attive e reattive) è chiuso.

Con riferimento alla Figura 3.28 il sistema formato da  $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2\mathbf{F}_3 - \mathbf{R}$  applicate in  $P_1P_2P_3$   $\bar{O}$  è un sistema equilibrato. Il poligono funicolare relativo alle quattro forze non si arresta alla retta  $d$ , ma prosegue con un quinto lato per connettere anche  $-\mathbf{R}$ . L'ultimo lato del poligono funicolare è la stessa retta  $a$ ; essa infatti si trova ad essere parallela non solo alla proiettante  $a'$  del primo vertice  $0$  ma anche alla proiettante (ancora)  $a'$  dell'ultimo vertice  $4 (\equiv 0)$ : primo ed ultimo lato del poligono funicolare sono sovrapposti su  $a$ .

Se  $-\mathbf{R}$  fosse applicata in altro punto  $O$  il sistema di forze sarebbe equivalente a una coppia; primo e ultimo lato del poligono funicolare sarebbero paralleli ma non coincidenti. Riassumendo:

■ condizioni grafiche di equilibrio sono la chiusura della poligonale delle forze e del poligono funicolare.

### 3.12 Azioni interne

Vediamo ora quali informazioni possiamo ottenere, in base a sole condizioni d'equilibrio, sulle sollecitazioni che attraversano la struttura. Diremo *problema interno* la ricerca delle forze che si trasmettono fra loro due parti della struttura. Finora abbiamo incontrato il problema interno solo nel caso in cui una molla o una fune fossero tese fra due punti della struttura. Quel che ora ci accingiamo a calcolare è la sollecitazione interna in qualunque punto della struttura. Il problema invece, già visto, del calcolo delle reazioni vincolari esterne, si dirà brevemente *problema esterno*.

Iniziamo con l'esaminare una sola asta rigida. Sia essa in equilibrio sotto l'azione di determinate forze (attive e reattive). Si immagini di sezionarla ottenendo due tronconi: ciascuno di essi in equilibrio non sta più. Ciò significa (o per lo meno si interpreta dicendo) che prima del taglio ciascuno dei due tronconi riceveva dall'altro attraverso la sezione un sistema di forze (interne) atto a garantirne l'equilibrio (Figura 3.44). In ciò consiste il *postulato ridotto delle tensioni interne*. Esso afferma:

■ se un sistema materiale è in equilibrio allora lo è ogni sua parte soggetta a quella parte di forze esterne che le competono e alle forze che le parti contigue le trasmettono.

In questa forma il postulato si dice ridotto perché rappresenta una condizione necessaria per l'equilibrio di qualunque sistema materiale.

Figura 3.

Ne vedr  
caratteri

Nell  
che la st

Qual  
tali forz

da sole

materia

ra sarà

deforma

vincoli

tali sol

mano a

Nul

ma sole

fisico, c

immedi

Infra

applica

conosc

detto su

sezione

applica

tutta la

te la su

Per

va con

azioni i

opposte

esterna

Le e

dua

age

caso

Le com

il primo

piano s

conside

Sec

nenti d

• azio

ha c



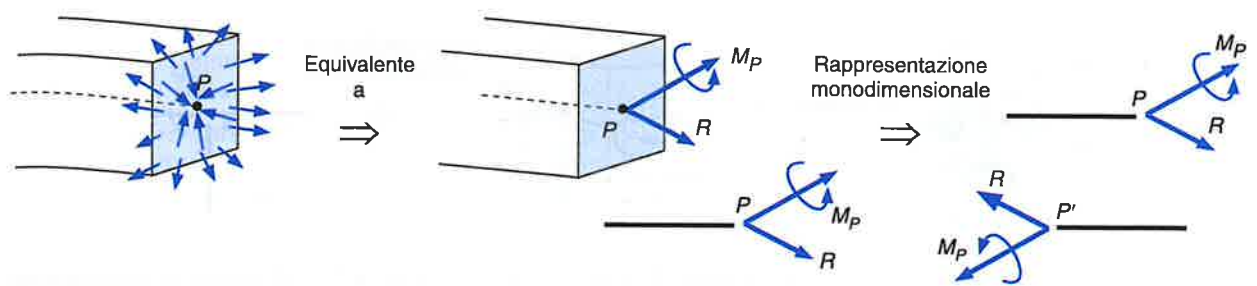


Figura 3.44

Ne vedremo più avanti una formulazione più generale che fornisce condizioni caratteristiche.

Nella Figura 3.44 e nel seguito, quando si parla di azioni interne, si intende che la struttura sia composta da aste.

Quale sia l'effettivo sistema di forze che un troncone riceve dall'altro, come tali forze siano distribuite sulla sezione sono quesiti che non ricevono risposta da sole condizioni di equilibrio: occorre tener conto del tipo di deformabilità del materiale. Lo stato di sollecitazione che effettivamente si sviluppa nella struttura sarà calcolato nei Capitoli 7 e 8 per qualche situazione di carico su aste deformabili elasticamente. Tuttavia con sole considerazioni di equilibrio (se i vincoli sono in condizioni isostatiche) si giunge a definire i valori globali di tali sollecitazioni interne, la risultante e il momento. Sono esse che si chiamano azioni interne.

Nulla impedirebbe di definire le azioni interne anche per un corpo generico, ma solo per corpi monodimensionali (aste) esse rivestono notevole significato fisico, come man mano vedremo. Il calcolo delle azioni interne è conseguenza immediata del postulato testé enunciato e delle equazioni cardinali.

Infatti per ristabilire l'equilibrio del troncone (l'uno o l'altro che sia) occorre applicare alla sezione messa in evidenza un sistema di forze che a priori non si conosce e che, in termini generali, è equivalente a forza più coppia. Per quanto detto sull'equivalenza, la forza è la risultante  $R$  del sistema di forze agenti sulla sezione e la coppia ha momento  $M_P$  uguale al loro momento rispetto al punto di applicazione di  $R$ . Tale punto altri non è che quel punto  $P$  che da solo rappresenta tutta la sezione quando dell'asta si dà rappresentazione monodimensionale tramite la sua linea d'asse: il baricentro della sezione.

Per il principio d'azione e reazione, nel punto  $P'$  che prima del taglio coincideva con  $P$  va applicata la risultante  $-R$  e la coppia di momento  $-M_P$ . La ricerca delle azioni interne è pertanto la ricerca del comune valore di tali sollecitazioni interne opposte, che sono a priori incognite e che ovviamente dipendono dalla sollecitazione esterna nonché dal punto  $P$  in cui si è "sezionata" l'asta per metterle in evidenza.

■ Le equazioni cardinali, scritte per un generico tronco terminante in  $P$ , individuano le azioni interne  $R$  e  $M_P$  una volta che siano note tutte le altre forze agenti sul tronco considerato. Si tratta di sei equazioni in sei incognite nel caso tridimensionale; di tre equazioni in tre incognite nel caso piano.

Le componenti di  $R$  e di  $M_P$  si assumono su assi privilegiati: normale alla sezione il primo (asse  $x$  nella Figura 3.45a) e sulla sezione gli altri due (assi  $y$  e  $z$ ). Nel caso piano si sottintende l'asse  $z$  normale al piano (secondo cui è diretto il momento) e si considera, sulla sezione, il solo asse  $y$  contenuto nel piano (Figura 3.45b).

Secondo una convenzione generalmente accettata, nel caso piano le componenti delle azioni interne si chiamano e si assumono in segno come segue:

- azione assiale  $N$ : agisce normalmente alla sezione; si assume positiva quando ha carattere di trazione (su entrambi i tronchi) come nella Figura 3.46a;

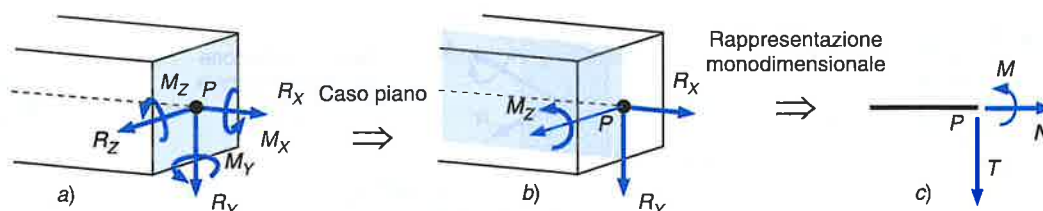


Figura 3.45

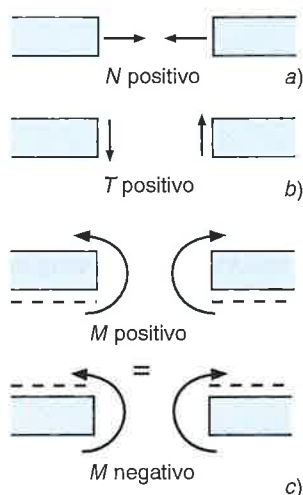


Figura 3.46

Il segno del momento è convenzionale e dipende dalle fibre di riferimento scelte; la situazione fisica no

- azione di taglio  $T$ : agisce perpendicolarmente a  $N$ ; si assume positiva quando induce rotazione oraria (su entrambi i tronchi) come nella Figura 3.46b;
- momento flettente  $M$ : agisce come coppia nel piano delle forze; assunte (tratteggiando) certe fibre di riferimento, si usa definire positivo  $M$  se tende tali fibre di riferimento (Figura 3.46c).

Le tre grandezze  $NTM$  si dicono brevemente loro stesse azioni interne (si indicheranno a volte con AI). La convenzione sui segni merita ulteriori commenti.

- Le forze (interne) opposte che si scambiano i due tronchi attraverso le due facce vengono a essere individuate dallo stesso segno.
- Il segno di  $M$  può essere indifferentemente più o meno a seconda di quali fibre siano definite di riferimento (tratteggiate). La situazione fisica ovviamente è unica e determinata. Per esempio nella Figura 3.46 sono le fibre inferiori a essere tese; ciò però si traduce in segno + se proprio esse sono assunte come riferimento, con segno - per la scelta opposta.
- Delle azioni interne è molto espressivo tracciare i grafici che ne mostrano il variare al variare della sezione considerata (al variare di  $P$ ). Essi si riportano perpendicolarmente all'asta cui si riferiscono (e si usa tratteggiare l'interno del diagramma nella stessa direzione). È convenzione visivamente efficace riportare il grafico di  $M$  dalla parte delle fibre tese, cosicché, l'esecuzione e l'interpretazione del grafico di  $M$  non necessita delle convenzioni sul segno e sulle fibre di riferimento.

Veniamo al calcolo esplicito di  $NTM$ , nel caso di asta rettilinea che assumiamo come asse  $x$ ; si sia già constatato l'equilibrio e si sia risolto il problema esterno. Scriviamo le equazioni cardinali per l'uno (o l'altro) dei due tronchi. In esse compaiono, per il postulato ridotto delle tensioni interne, le azioni interne  $NTM$  e le forze esterne che competono a quel tronco.

Diciamo ① e ② i due tronchi e  $\mathbf{R}^{est\ ①}$ ,  $M_P^{est\ ①}$  risultante e momento, rispetto a  $P$ , di quella porzione di forze esterne che compete a ① e analogamente  $\mathbf{R}^{est\ ②}$ ,  $M_P^{est\ ②}$ . Le azioni interne  $NTM$  si trovano scrivendo le tre equazioni di equilibrio indifferentemente per il tronco ① o per il tronco ②. Per le convenzioni fatte esse danno luogo a

$$\begin{aligned} N &= R_x^{est\ ①} & N &= R_x^{est\ ②} \\ T &= R_y^{est\ ①} & \text{oppure a} & T = R_y^{est\ ②} \\ M &= M_P^{est\ ①} & M &= M_P^{est\ ②}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

I secondi membri dei due sistemi, assieme, formano un sistema equilibrato e perciò i due sistemi danno luogo alla stessa soluzione, coincidente anche in segno grazie alle convenzioni adottate se gli assi, su ciascun tronco, si assumono nel verso positivo delle azioni interne.

Nell'uso delle (3.24) si tengano presenti le seguenti osservazioni.

- Tra forze esterne agenti su ogni tronco compaiono sia quelle attive che quelle reattive e queste devono già essere state determinate.

- La sezione operata in  $P$  deve sempre separare la struttura in *due tronchi complementari* (Figura 3.47a). Sarebbe errato scrivere le (3.24) per i due tronchi di Figura 3.47b senza esplicitare le azioni trasmesse dalla cerniera!
- Le equazioni cardinali scritte nella forma (3.24), e cioè già risolte rispetto a  $NTM$ , facilitano la questione dei segni e permettono di evitare l'esplicita assunzione degli assi cartesiani (Figura 3.48). Basta infatti assumere ogni forza (nel secondo membro) con lo stesso segno della corrispondente AI: positive quelle forze che provocano trazione, quelle forze perpendicolari all'asta che provocano rotazione oraria nelle vicinanze di  $P$ , quelle forze il cui momento rispetto a  $P$  tende le fibre di riferimento.
- La convenzione complessiva sui segni si usa riassumere immaginando di enucleare dall'asta un tronchetto e raffigurando come nella Figura 3.51. Tuttavia ciò è impreciso perché le azioni a destra e a sinistra di un tronchetto non sono in generale uguali fra loro (vedi Paragrafo 5.6).
- Appena possibile converrà risolvere *mentalmente* le (3.24): "percorrendo" la struttura e "raccolgendo" man mano il contributo delle forze che vengono ad aggiungersi durante il "percorso".
- Le azioni interne  $NTM$  sono funzioni del punto  $P$  in cui si è operata la sezione. Per l'asta rettilinea assunta come asse  $x$ , detta  $x$  l'ascissa del generico punto  $P$  esse sono funzioni di tale ascissa,  $N(x)$ ,  $T(x)$ ,  $M(x)$  e forniscono l'insieme dei valori delle azioni lungo l'asta.
- Tali funzioni presenteranno discontinuità nei punti di applicazione delle sollecitazioni esterne: in un punto in cui sia applicata una forza  $p$  tangente all'asta,  $N$  ha discontinuità uguale a  $p$ ; se vi è applicata una forza  $p$  perpendicolare all'asta,  $T$  ha discontinuità uguale a  $p$ ; se vi è applicata una coppia di momento  $pl$ , il momento flettente  $M$  ha discontinuità  $pl$ .
- Se l'asta si compone di più tratti rettilinei l'analisi svolta non cambia pur di distinguere i vari tratti ma sempre "raccolgendo" il contributo di *tutte* le forze che stanno da una parte (Figura 3.50).

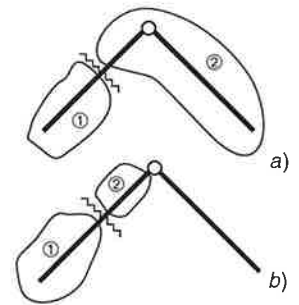


Figura 3.47

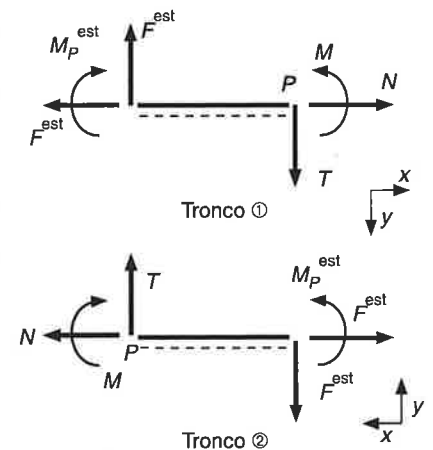


Figura 3.48

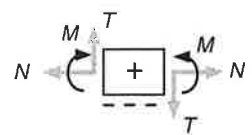


Figura 3.49

Infine una precisazione circa il segno di  $T$ : esso è + quando induce rotazione oraria sul "tronchetto adiacente" alla sezione operata. Per esempio nell'asta di Figura 3.50 il taglio in  $P$  è positivo (mentre il momento della forza  $F$  applicata in  $A$  rispetto a  $P$  è antiorario).

Vediamo il calcolo e il tracciamento dei diagrammi delle azioni interne nelle aste di cui si è già studiato l'equilibrio negli Esempi 3.3-3.6.

### Esempio 3.11

Calcolare le azioni interne nell'asta dell'Esempio 3.3.

Il calcolo di  $N$  è immediato.

Il calcolo di  $T$ : percorrendo l'asta da  $A$  verso  $B$ , dapprima il contributo a  $T$  proviene solo da  $p/3$  (Figura 3.34c) che dà verso orario; dopo i  $2/3$  di "percorso" si "raccolghe" il contributo opposto di  $p$ : il taglio diventa negativo (contributo complessivo antiorario uguale a  $2/3 p$ ).

Il calcolo di  $M$ : ancora percorrendo l'asta da  $A$  verso  $B$  dapprima il momento flettente  $M$  si oppone al momento di  $1/3 p$ , che ha braccio crescente fino a  $2/3 l$ ; perciò  $M$  cresce linearmente fino a valere  $2/9 pl$  in  $Q$ , tendendo le fibre inferiori. Giunti in  $Q$  conviene sospendere il percorso e riprenderlo da  $B$ : il momento cresce con il braccio della componente verticale proveniente dalla biella fino a giungere allo stesso valore in  $Q$  (Figura 3.51).

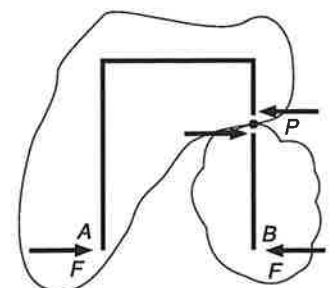


Figura 3.50

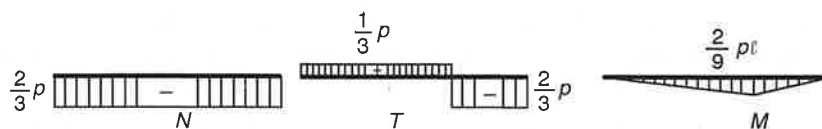


Figura 3.51

**Commenti:** per ogni struttura sarà bene riflettere sulle variazioni implicate sia dal variare della sollecitazione esterna sia della situazione di vincolo. Facciamo per la trave  $AB$ , in condizioni elementari di carico e di vincolo.

- a) Il carico  $p$  sia concentrato in mezzeria. I diagrammi delle azioni interne divengono simmetrici e cambiano di valore (Figura 3.52):

$$N = -p/2 \quad T(0) = p/2; \quad T(l) = -p/2 \quad M_{\max} = M(l/2) = pl/4$$

- b) Con carico  $p$  concentrato in mezzeria, i vincoli siano ora due carrelli orizzontali in  $A$  e in  $B$ . L'asta si decomprime ( $N = 0$ ),  $T$  ed  $M$  restano invariati rispetto al caso a).

- c) Nonostante la trattazione dei carichi distribuiti si sia rimandata al Capitolo 5, se lo stesso carico  $p$  fosse uniformemente distribuito su  $AB$ , sarebbe possibile fin d'ora calcolare le azioni interne. Infatti, grazie alle equazioni cardinali e alle (3.24), è possibile *concentrare nel baricentro di ogni tronco il carico gravante su ogni tronco* considerato. Su un tratto di lunghezza  $x$  grava (grazie all'uniformità) un carico ridotto del rapporto  $x/l$  se  $l$  è la lunghezza su cui l'intero carico  $p$  è distribuito.

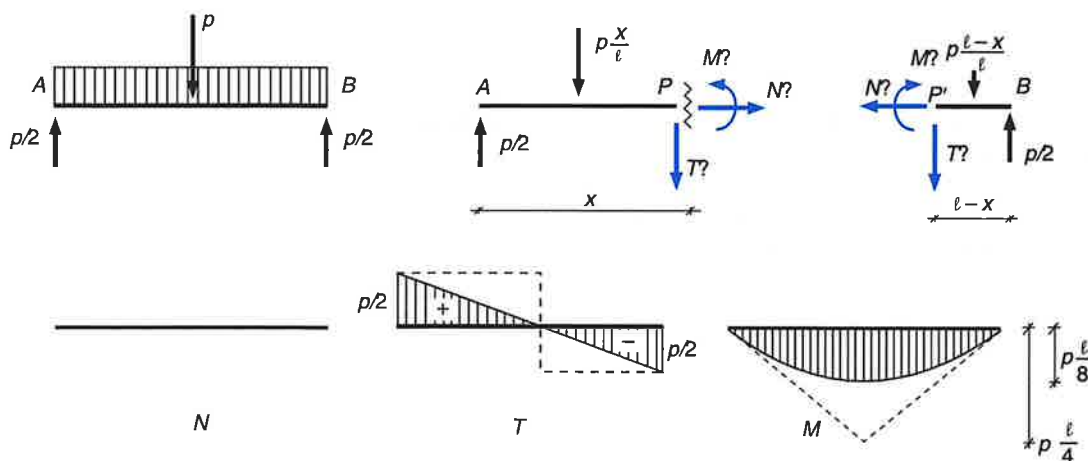


Figura 3.52

Le azioni interne non presentano ora discontinuità; i grafici sono "smussati" rispetto al caso b) (tratteggiato nei diagrammi) e il momento massimo in mezzeria è dimezzato. Ciò in quanto la collaborazione a reggere il carico è ora più "equamente" richiesta agli elementi della trave. In ogni punto  $P$  di ascissa  $x$  è

$$T(x) = \frac{1}{2}p - \frac{x}{l}p \quad M(x) = \frac{1}{2}px - \frac{x}{l}p \frac{x}{2}$$

### Esempio 3.12

Calcolare le azioni interne nell'asta dell'Esempio 3.4.

La soluzione è illustrata nella Figura 3.53.



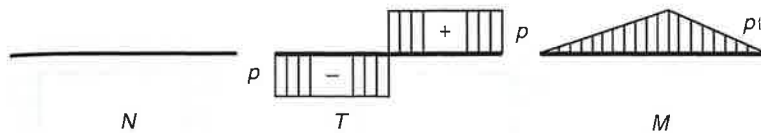
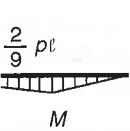


Figura 3.53



Quando il problema, come nei casi precedenti, non dà valori numerici ma esprime la forza come multiplo di una forza  $p$  e i momenti come multipli di un momento  $pl$  converrà esprimere le azioni interne in *forma adimensionale*:  $N/p$ ,  $T/p$ ,  $M/pl$ . Così faremo nel seguito.

### Esempio 3.13

Calcolare le azioni interne nell'asta dell'Esempio 3.5.

La soluzione è illustrata nella Figura 3.54.

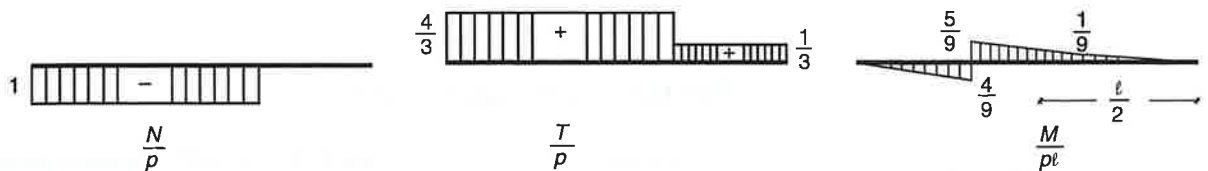


Figura 3.54

### Esempio 3.14

Calcolare le azioni interne nell'asta dell'Esempio 3.6.

La soluzione è illustrata nella Figura 3.55.

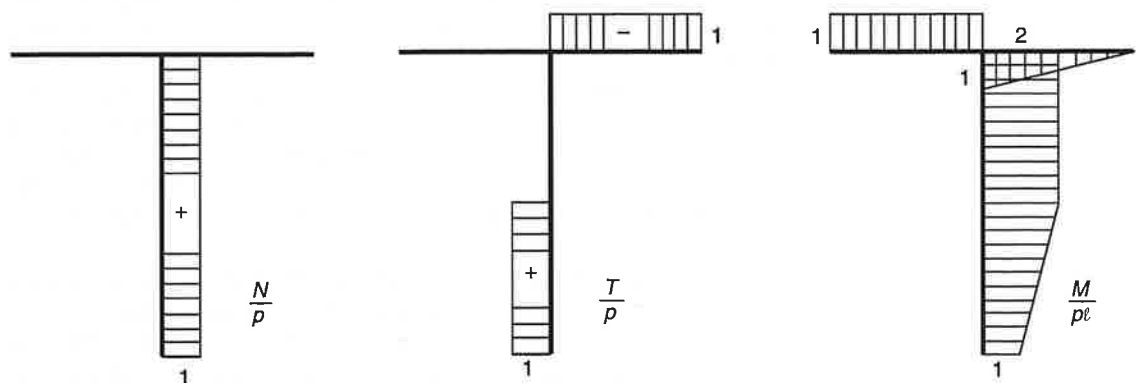


Figura 3.55

### Esempio 3.15

L'asta rigida (Figura 3.50) è in equilibrio sotto l'azione delle due forze opposte allineate. Calcolare le azioni interne.

La soluzione è illustrata nella Figura 3.56.



Se si applica la seconda operazione invariantiva facendo scorrere una delle due forze fino ad aver lo stesso punto d'applicazione dell'altra le azioni interne non restano invariate! Resta invariato l'equilibrio dell'asta perché rigida.