Sessione 7

D: Quali sono i punti importanti delle scorse lezioni?

R: 1) Esistono gli SPAZI VETTORIALI [SPAZI di VETTORI, relazione di EQUIPOLLENZA, cioè di traslazione parallela, si appoggiano sulla nozione di CAMPO].

2) Di CAMPI noi conosciamo:

→ $\mathbb{Q}$ = LE FRAZIONI [$3/5$, 1, ...]

→ $\mathbb{R}$ = I NUMERI REALI [2, $\sqrt{2}$, π, e, ...]

→ $\mathbb{C}$ = I NUMERI COMPLESSI [$a+ib$]

→ $\mathbb{Z}_p = \{[0], [1], [2], \dots, [p-1]\}$ dove p è PRIMO ed è come fare algebra su di un orologio con p ORE, ma dove p è PRIMO.

3) Possiamo usare uno qualsiasi di questi CAMPI per farci degli SPAZI VETTORIALI [= GRUPPI ABELIANI + MOLTIPLICAZIONE PER SCALARI di un CAMPO]

I numeri complessi

Si consideri l'equazione:

$$x^2+1=0$$

Come si "risolverebbe"?

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

DISCRIMINANTE NEGATIVO!

$$= \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}}{2}$$

$$= \pm\sqrt{-1}$$

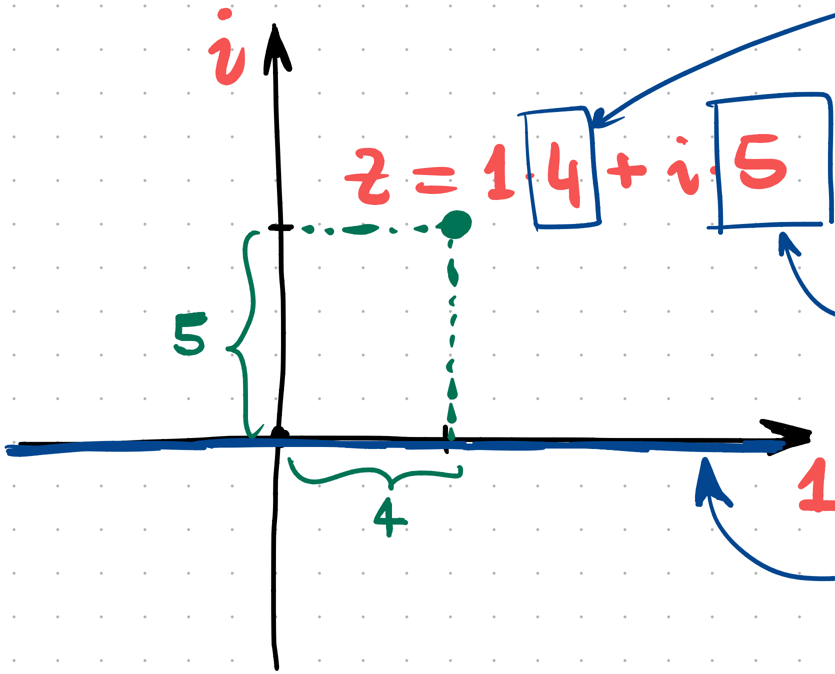
DEFINIAMO FORMALMENTE

$$i := \sqrt{-1}$$

OVVERO CHE $i^2=-1$

Ora possiamo considerare i come una nuova unità, detta UNITÀ IMMAGINARIA, e scrivere numeri del tipo $\underset{\in\mathbb{R}}{a} + i\cdot \underset{\in\mathbb{R}}{b}$

Sul piano cartesiano:



LA PARTE REALE di z, $\mathrm{Re}(z) = 4$

Coordinate cartesiane

LA PARTE IMMAGINARIA di z, $\mathrm{Im}(z) = 5$

LA RETTA dei REALI sta dentro ai COMPLESSI

INSIEME DI $\mathbb{C}$ DOVE $\mathrm{Im}(z) = 0$

Def [Numeri complessi]: $\mathbb{C} := \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \} \supset \mathbb{R}$

Def [Campo dei numeri complessi]. Considero $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dove:

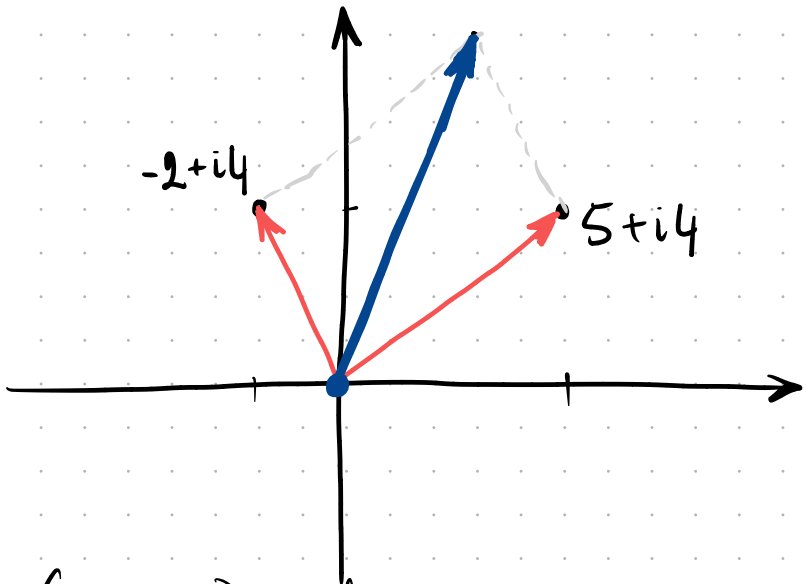
$$\begin{cases} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) \\ z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + i(cb+da) + i^2 bd \\ \quad = (ac - bd) + i(cb+da) \end{cases}$$

Def [Modulo] Il modulo o valore assoluto di $z = a + i \cdot b$ è:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \text{LUNGHEZZA del vettore } \overrightarrow{0z}$$

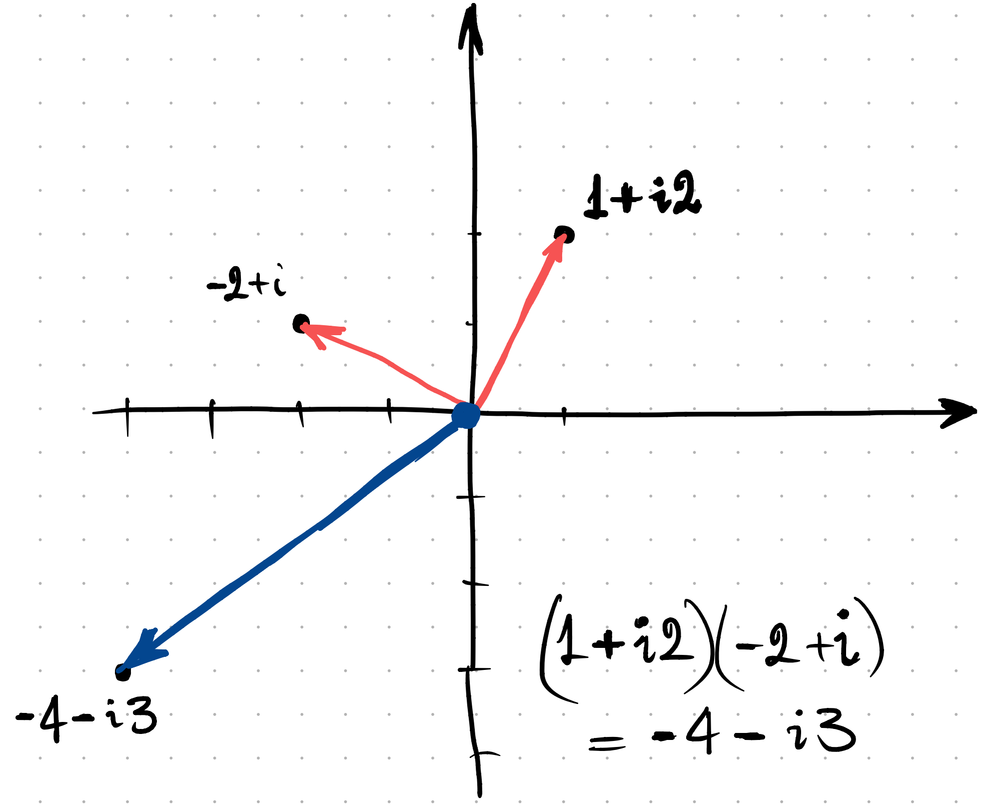
$\bar{z} = a - i \cdot b$ DETTO CONIUGATO

Vediamo graficamente come appare la somma e il prodotto:



$$(-2+i4)+(5+i4) = 3+i8$$

LA SOMMA ALGEBRICA CI DA' PROPRIO LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



$$(1+i2)(-2+i) = -4-i3$$

COSA STA SUCCEDENDO QUI INVECE? QUAL'È L'INTERPRETAZ. DEL PRODOTTO?

Esercizio: Sommare e moltiplicare numeri complessi sino a che il meccanismo non è chiaro

Oss: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ È UN CAMPO

$(\mathbb{C}, +)$:
- → CHIUSO rispetto al più
- → Associativa
- → Neutro: $0 + i \cdot 0$
- → Opposto $-(a+ib) = (-a) + i(-b)$
- → Commutativa

$(\mathbb{C}, \cdot)$:
- → CHIUSO rispetto al $\cdot$
- → Associativa
- → Neutro: $1 + i \cdot 0$
- → Inverso: ?
- → Commutativa

$(+, \cdot)$:
- → Distributiva

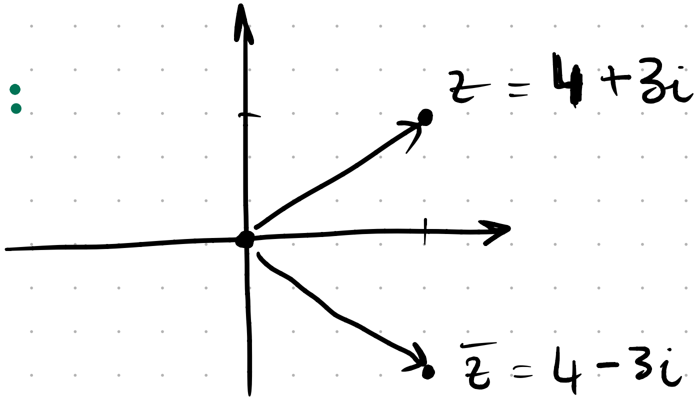
Oss: $z = a + ib \neq 0 \Rightarrow$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\left(\sqrt{z \cdot \bar{z}}\right)^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - i \cdot b}{a^2 + b^2}$$

Verifichiamo:

$$z \cdot z^{-1} = \frac{(a + i \cdot b)(a - i \cdot b)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - i^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2} \overset{i^2 = -1}{=} \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Coniugio:



Esercizio: dimostrare che

$z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Coordinate polari:

(O FORMA TRIGONOMETRICA)

PASSIAMO DA (ASCISSA, ORDINATA) A (MODULO, ANGOLO)
$\quad a \quad b \quad |z| \quad \theta$

$$z = a + ib \underset{\uparrow}{=} |z| \cdot \underbrace{\left(\frac{a+ib}{|z|}\right)}_{} = |z| \cdot \underbrace{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}_{}$$

MOLTIPLICO E DIVIDO PER $|z|$

COSÌ QUESTO È NORMALIZZATO A NORMA UNO

SICCOME HA NORMA UNO CORRISPONDE AD UN PUNTO SUL CERCHIO UNITARIO, ALLORA CORRISPONDE AD UN CERTO ANGOLO θ SUL CERCHIO ALLORA LO POSSO SCRIVERE COME

$\cos\theta + i \cdot \sin\theta$

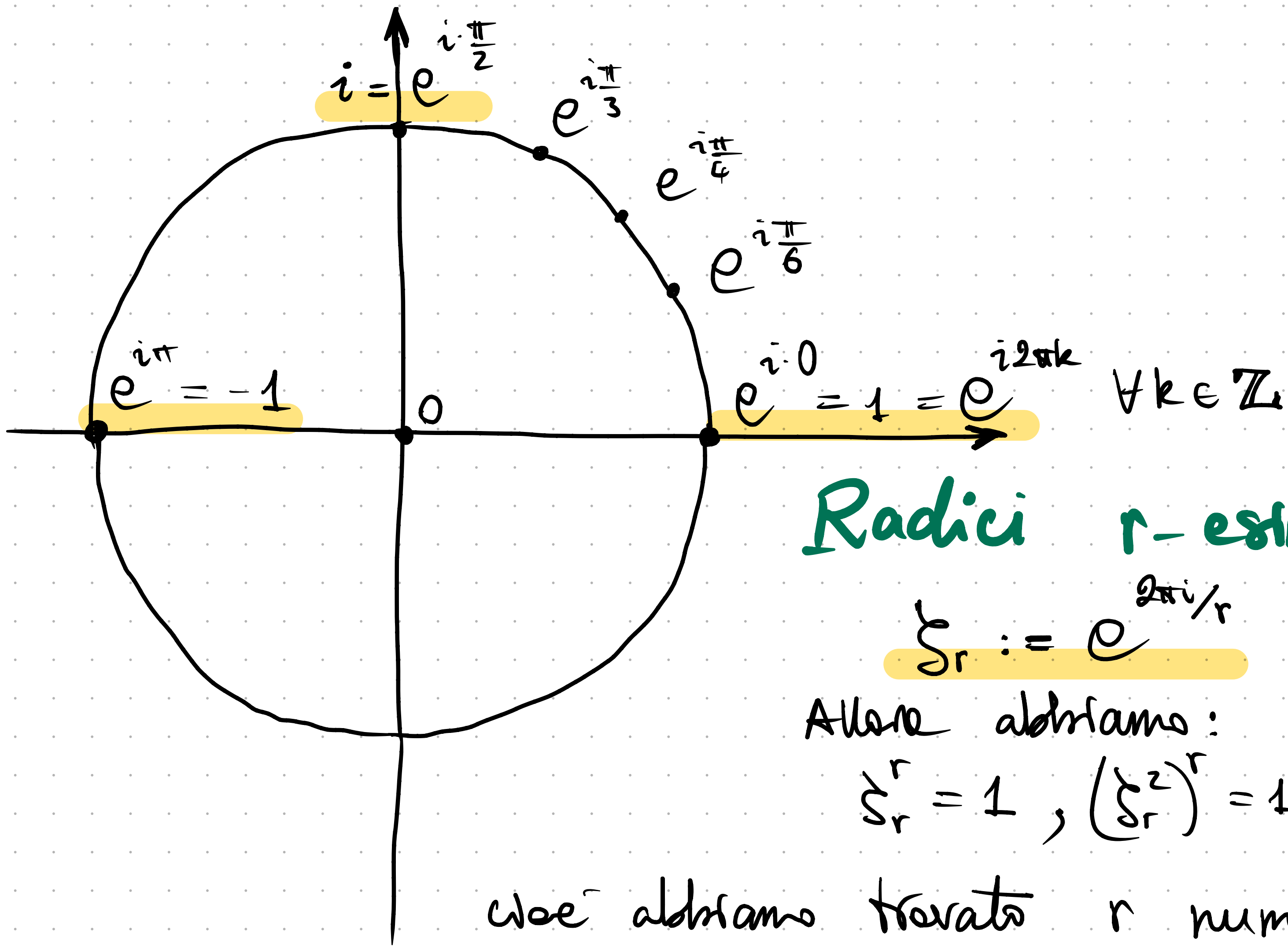
SE A θ AGGIUNGIAMO $2\pi k$ NON CAMBIA NULLA

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta}$$

FAMOSA FORMULA DI EULERO

$\theta = \pi, \quad \cos(\pi) = -1, \quad \sin(\pi) = 0$

$$e^{i\theta} + 1 = 0$$



Radici r-esime dell'unità:

$$\zeta_r := e^{2\pi i/r}$$

Allora abbiamo:

$$\zeta_r^r = 1, \; (\zeta_r^2)^r = 1, \; (\zeta_r^3)^r = 1, \; \dots, (\zeta_r^{r-1})^r = 1$$

cioè abbiamo trovato r numeri complessi distinti z tali che $z^r = 1$. Cioè abbiamo trovato r soluzioni del polinomio $P(z) = z^r - 1$

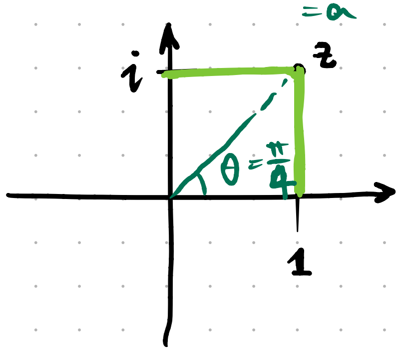
In realtà:

$$\mathbb{Z}_r \cong \{ \zeta_r^0 = 1, \zeta_r, \zeta_r^2, \dots, \zeta_r^{r-1} \}$$

POSSIAMO VEDERE $\mathbb{Z}_r$ IMMERSO DENTRO AI COMPLESSI IN QUESTO MODO

$[2]+[3]=[5]$ in $\mathbb{Z}_r$ CORRISPONDE A: $\zeta_r^2 \cdot \zeta_r^3 = \zeta_r^5$ IN $\mathbb{C}$

Esempio: $z = \underbrace{1}_{=a} + i \cdot \underbrace{1}_{=b}$



Per prima cosa calcoliamo $\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} \\ \theta = 45° = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Quindi otteniamo:

$$\underbrace{z = 1 + i \cdot 1}_{\text{IN COORDINATE CARTESIANE}} = \underbrace{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]}_{\text{FORMA TRIGONOMETRICA DI } z} = \underbrace{\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\text{FORMA POLARE}}$$

Esercizio: Calcolare forma trigonometrica e polare di $z = \sqrt{3} + i$

Il prodotto complesso in forma polare:

$$\begin{cases} z_1 = |z_1| \cdot e^{i\theta_1} \\ z_2 = |z_2| \cdot e^{i\theta_2} \end{cases} \Longrightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \\ \theta_{z_1 z_2} = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$$

LE NORME SI MOLTIPLICANO: LA NORMA DEL PRODOTTO È IL PRODOTTO DELLE NORME

GLI ANGOLI SI SOMMANO: L'ANGOLO DEL PRODOTTO È LA SOMMA DEGLI ANGOLI

P.S. IN MATEMATICA QUESTO ANGOLO SI CHIAMA "ARGOMENTO"

Esercizio: Calcolare: $(1+i)^5$ Risposta: $(-4-4i)$

$(1-i)^6$ $(8i)$

$(\sqrt{3}+i)^6$ (-64)

Le radici r-esime di un numero complesso

Una radice r-esima di $z \in \mathbb{C}$ è un $w \in \mathbb{C}$ tale che $w^r = z$
$(r \in \mathbb{N}_{\geq 1})$

Cerchiamo di calcolare i possibili w a partire da un z dato.

$$\begin{cases} z = |z| e^{i\theta} \\ w = |w| e^{i\alpha} \end{cases} \Rightarrow w^r = |w|^r \cdot e^{ir\alpha} = |z| \cdot e^{i\theta}$$

Da cui deduciamo che: $\begin{cases} |w|^r = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[r]{|z|} \\ r\alpha = \theta + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\theta + 2\pi k}{r} \end{cases}$

Allora tutti i numeri $w_k := \sqrt[r]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{r}\right)}$ sono radici r-esime di z.
$\forall k \in \mathbb{Z}$

D: Ma queste radici sono tutte diverse?
R: No! Perché $\frac{\theta + 2\pi k_1}{r}$ e $\frac{\theta + 2\pi k_2}{r}$ differiscono di un multiplo intero di 2π ogni qual volta $k_1 \sim_r k_2$
[i.e. $r \mid k_1 - k_2$]

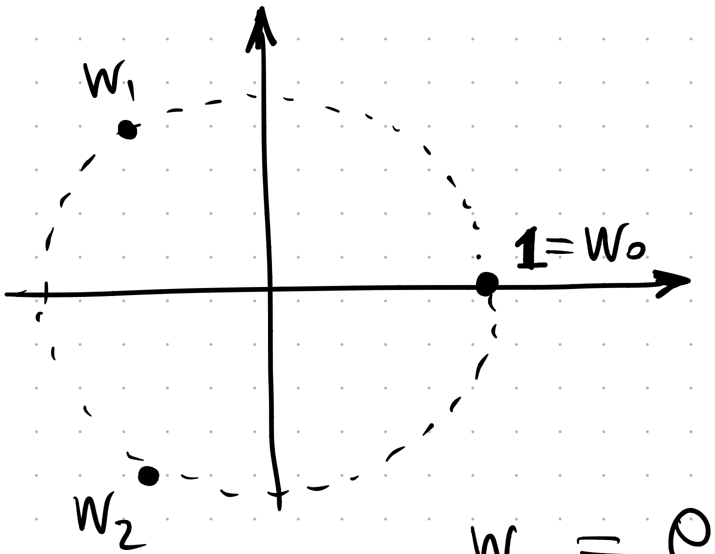
Allora per selezionare radici dell'unità distinte fra loro basta selezionare un singolo rappresentante per classe di equivalenza $\sim_r$. In concreto, basta prendere k_i come le classi di RESTO della DIVISIONE EUCLIDEA per r.

Allora otteniamo che:

$$w_k := \sqrt[r]{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{r}\right)}, \quad k = 0, \dots, r-1$$

Sono RADICI r-esime di z che sono tutte e sono tutte DISTINTE FRA LORO. In effetti sono esattamente r di numero, come il grado del polinomio $P(w) = w^r - z$, e abbiamo trovato tutte le sue soluz.

Esempio: RADICI TERZE dell' unità. Troviamo tutti i $w \in \mathbb{C}$ tali che $w^3 = 1 \in \mathbb{C}$.



Scriviamo $1 = \underbrace{|1|}_{=1} \cdot e^{i\theta}$

Allora $w_k = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{3}\right)} = e^{\frac{2\pi k}{3}}$ per $k = 0, 1, 2$.

$$w_0 = e^0 = 1$$

$$w_1 = e^{\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = e^{\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esercizio: Calcolare
- le 3 radici terze di $27 \in \mathbb{C}$
- le radici quinte di $32 \in \mathbb{C}$
- le radici quadrate di $1+i$

$\left\{ \pm \sqrt[4]{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) \right] \right.$

Polinomi

TEOREMA [FONDAMENTALE dell' ALGEBRA]

Ogni POLINOMIO $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ a coefficienti complessi si può decomporre come

$$P(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_n)$$

dove gli $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sono le radici o soluzioni di $P(z)$ cioè

$$P(\alpha_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Questo è un RISULTATO MOLTO FORTE perché significa che nei numeri complessi ogni polinomio ha soluzione! (E quindi spezza in fattori lineari)

Raccogliendo quei α_i che sono uguali si ottiene:

$$P(z) = a_n (z-\beta_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (z-\beta_l)^{\mu_l}$$

dove i β_i sono tutti distinti (sono sostanzialmente gli α_i ma senza ripetizioni) e le μ_i sono dette molteplicità degli zeri β_i.

Esempio:

$$P(z) = 17(z-\overset{\alpha_1}{3})(z-\overset{\alpha_2}{3})(z-\overset{\alpha_3}{3})(z+5i)(z+5i)(z-1)$$

$$= 17(z-\underset{\beta_1}{3})^{\overset{\mu_1}{3}}(z+\underset{\beta_2}{5i})^{\overset{\mu_2}{2}}(z-\underset{\beta_3}{1})^{\overset{\mu_3}{1}}$$

Esempio: Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ DATO,

$$P(z) = z^r - z_0 \implies P(z) = 1 \cdot (z-w_0)^1 (z-w_1)^1 \cdot \ldots \cdot (z-w_{r-1})^1$$

cioè le radici β_i non sono altro che le radici r-esime di z_0 e le molteplicità μ_i sono tutte uguali ad uno!

__Esercizio__: Fattorizzare: $P(z) = z^2 + 2iz + 1$

$P(z) = z^3 - 3z - 2$

$P(z) = z^2 + 1$

$P(z) = z^2 + z + 1$

$P(z) = z^7 + (1+3i)$

Suggerimento:
- cercare una radice nei valori interi oppure una radice n-esima.
- usare che $P(a) = 0 \iff$ il fattore $(z-a)$ divide $P(z)$

per ridurre il grado del polinomio