4 Ottobre

Ieri $f: X \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$

$$\boxed{1)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists M_\varepsilon \text{ t.c. } x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

$A \subseteq \mathbb{R}_+$ $\inf A = 0$

$$\boxed{2)\ \forall \varepsilon \in A\ \exists N_\varepsilon \text{ t.c. } x > N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Esercizio: Dimostra che 1) e 2) sono equivalenti

Ieri abbiamo dimostrato che se 1) è vera allora anche 2) è vera, prendendo $N_\varepsilon = M_\varepsilon$

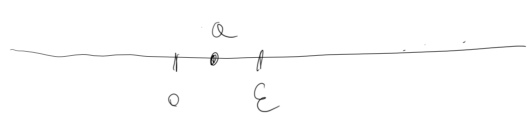
Assumiamo 2) e dimostriamo 1)

Sia $\varepsilon > 0$ dobbiamo dimostrare che

$$\boxed{\exists M_\varepsilon \text{ t.c. } x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Dobbiamo trovare M_ε. Se $\varepsilon \in A$ possiamo scegliere $M_\varepsilon = N_\varepsilon$ otteniamo la 1) per quel particolare ε.

Se $\varepsilon \notin A$.



$\inf A = 0 \Rightarrow \exists\ a \in A$ t.c. $0 < a < \varepsilon$.

(se fosse $\varepsilon \leq a\ \forall a \in A$
$\Rightarrow 0 < \varepsilon \leq \inf A = 0 \Rightarrow 0 < 0$ assurdo)

Per a vale la 2) cioè
$\exists N_a$ t.c. $x > N_a \Rightarrow |f(x) - L| < a < \varepsilon$

Come M_ε posso porre $M_\varepsilon = N_a$

Esercizio 8e

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies L_1 = L_2$$

Supponiamo per assurdo $L_1 \neq L_2$ cioè allora

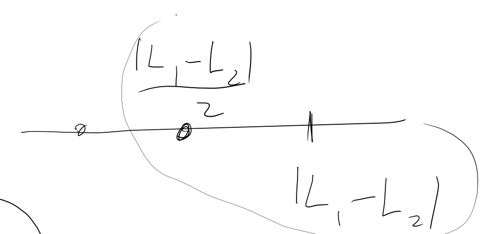
$$L_1 - L_2 \neq 0 \iff |L_1 - L_2| > 0$$

$$\left(|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \right.$$

Ma se $|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\implies 0 < |L_1 - L_2| \leq \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0\} = 0$$

$$\implies 0 < 0.$$



$$\frac{|L_1 - L_2|}{2} < |L_1 - L_2| \leq \frac{|L_1 - L_2|}{2}$$

$$0 < |L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\varepsilon = |L_1 - L_2| > 0$$

$$|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1} \right) = +\infty - (+\infty)$$

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1} = \ldots$$

$$= \left(\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \left(\sqrt{x^2+x+1}\right) \right) \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + \cancel{1} - \left(\cancel{x^2} + x + \cancel{1}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+x+1}} \qquad \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+\underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{x^2}}} + \sqrt{1+\underset{\downarrow\, 0}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}} \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \, , \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$$

Esercizi

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+x+1} \right) = ?$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[10]{x^2+1} - \sqrt[10]{x^2+x+1} \right) = ?$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[1000]{x^2+1} - \sqrt[1000]{x^2+x+1} \right)$$

__Def__ Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Diciamo che f è una funzione (strettamente) crescente se

$\forall \; x_1 < x_2$ in X si ha $f(x_1) \underset{<}{\leq} f(x_2)$

2) Diciamo che f è una funzione (strettamente) decrescente se

$\forall \; x_1 < x_2$ in X si ha $f(x_1) \underset{>}{\geq} f(x_2)$

3) Diciamo che f è una funzione monotona

se è una funzione crescente oppure una funzione decrescente.

$N \in \mathbb{N}$ $\quad b > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n^N} = +\infty \quad (b>1)$$

$N = 1$ $\quad \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{1+1}}$

$N = 2$ $\quad \sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{2+1}}$

N $\quad \sqrt[N+1]{b} = b^{\frac{1}{N+1}} > 1$

$b^{\frac{1}{N+1}} = 1 + a > 1$ dove $a > 0$

$a = b^{\frac{1}{N+1}} - 1$

$$\frac{b^n}{n^N} = \frac{\left(\left(\sqrt[N+1]{b}\right)^{N+1}\right)^n}{n^N} = \frac{\left(\left(\sqrt[N+1]{b}\right)^n\right)^{N+1}}{n^N} =$$

$$= \frac{\left((1+a)^n\right)^{N+1}}{n^N} \geq \frac{(1+na)^{N+1}}{n^N} \xrightarrow{n \to +\infty} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^{N+1}}\, a^{N+1}}{\cancel{n^N}}$$

$(1+a)^n \geq 1 + na > 0 \quad a > 0$ $\quad = \lim_{n \to +\infty} a^{N+1}\, n$

$\Updownarrow$ $\quad = +\infty$

$$\left((1+a)^n\right)^{N+1} \geq (1+na)^{N+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n^N} = +\infty \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{N} \ni M > N$

$$\frac{b^n}{n^N} = \frac{\left(\left(\sqrt[M]{b}\right)^M\right)^n}{n^N} = \frac{\left(\left(\sqrt[M]{b}\right)^n\right)^M}{n^N} = \frac{\left((1+a)^n\right)^M}{n^N} \geq$$

$b > 1 \Rightarrow \sqrt[M]{b} > 1 \Rightarrow \sqrt[M]{b} = 1 + a$ con $a > 0$

dove $a = \sqrt[M]{b} - 1 > 0$

$$\geq \frac{(1+na)^M}{n^N} \xrightarrow{n \to +\infty} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a^M\, n^M}{n^N} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} a^M\, n^{\overbrace{M-N}^{\geq 0}} = a^M (+\infty) = +\infty$$

$$\cancel{x} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

$$x = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{\frac{b\,d}{c}} = \frac{a\,c}{b\,d}$$

Teor Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \sup X = +\infty$

Se f è una funzione monotona esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

In particolare, se f è crescente

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup \underbrace{\{f(x) : x \in X\}}_{f(X)} = \sup f(X)}$$

Se invece f è decrescente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \inf f(X)$$

Es $\quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty = \sup \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow n \in \mathbb{R}$ è una funzione crescente

L'immagine è $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

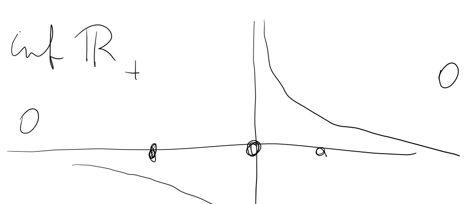
$f(x) = \frac{1}{x}$

$\mathbb{R}_+ \ni x \xrightarrow{f} \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ è decrescente

Es $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \inf f(\mathbb{R}_+)$

$= \inf \mathbb{R}_+$

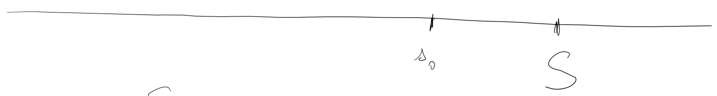
$= 0$



$0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

$f(\mathbb{R}_+) = \{\frac{1}{x} : x > 0\} = \mathbb{R}_+$ dimostrare per esercizio.

Dim f crescente pongo $S = \sup f(X)$
e dimostro che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = S$.



Sia $s_0 < S$.

Allora $\exists \; x_0 \in X$

t.c. $s_0 < f(x_0) \le S$

Siccome f è crescente $\forall \; x \in X$ t.c. $x > x_0$
ho

$$s_0 < f(x_0) \le f(x) \le S.$$

Ho appena dimostrato che $\forall \; s_0 < S$
$\exists \; x_0$ t.c. $x \geq x_0 \Rightarrow s_0 < f(x) \le S$

Questo implica che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = S$

Infatti $\quad S = \sup f(X)$

1) Se $S = +\infty$ ho dimostrato che

$\forall \; \underset{K}{s_0} \in \mathbb{R} \quad \exists \; \underset{M_K}{x_0} \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq x_0 \Rightarrow f(x) > s_0$

2) $S \in \mathbb{R}$

$\forall \; s_0 < S \quad \exists \; x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq x_0 \Rightarrow s_0 < f(x) \le S$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = S$

$\forall \; \varepsilon > 0$ se pongo $s_0 = S - \varepsilon \quad \exists \; \overset{M_\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{x_0}} \in \mathbb{R}$
t.c. $x \geq x_0 \Rightarrow S - \varepsilon < f(x) \le S < S + \varepsilon$

$\forall \; \varepsilon > 0 \quad \exists \; \overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{M_\varepsilon}} \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - S| < \varepsilon$