Lezione 1 ottobre 2024

martedì 1 ottobre 2024 14:11

Insiemi numerici :

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$ quaternioni $\left\{ a + ib + jc + kd \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 = k^2 = j^2,\ i \cdot j = k,\ j \cdot k = i,\ k \cdot i = j \right\}$

$n \longrightarrow n$

$\mathbb{Q} \Downarrow \frac{p}{q}$

complessi

$\{ a + ib : a, b \in \mathbb{R},\ i$ UNITÀ IMMAGINARIA $i^2 = -1 \}$

$z \longrightarrow z/1$

$\boxed{y = p/q} \longrightarrow p : q$ divisione euclidea

$10/3 \longrightarrow 10 : 3 = 3,\dot{3}$

$10 = 3 \cdot k + r \quad , \; 0 \le r \le 2$

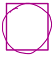
$= 3 \cdot 3 + 1$

$r \cdot 10 = 10$, divido ancora

ci sono numeri $\in \mathbb{R}$ ma non a $\mathbb{Q}$

IRRAZIONALI : ad esempio π

quadratura del cerchio



πr^2 , es. se $r = 1$

cerco l : $l^2 = \pi$

$l = \sqrt{\pi}$

altri esempio: $\sqrt{2}$ esercizio : non si può scrivere p/q

e numero di Eulero / Nepero

$\simeq 2,71 \ldots$

ANCORA SULLE FUNZIONI :

Def.: Data $f : A \to B$

Se $C \subseteq A$ sottoinsieme, la

RESTRIZIONE DI f a C :

$$f|_C : C \to B$$

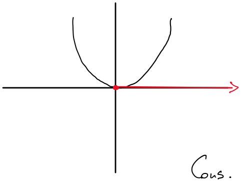
definita come f ; cioè

$$f|_C(a) = f(a)$$
$$a \in C$$

Es.: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2$$
$$= x \cdot x$$

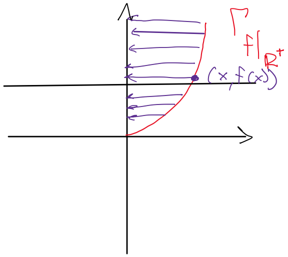
$$\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^2$$



Cons. $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}$

$$f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$f|_{\mathbb{R}^+}(r) = f(r) = r^2$$

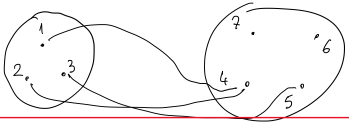


Def. Data $f : A \to \underset{\underset{b}{\cup}}{B}$; diciamo che

- f è INIETTIVA se ogni elemento di B proviene al più da 1 elemento di A

cioè: se $a_1, a_2 \in A$, con $a_1 \neq a_2$

⊛ allora $f(a_1) \neq f(a_2)$



NON è iniettiva

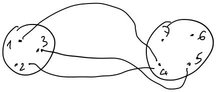
$f(1) = f(2) = 4$

✱ è equivalente:

se $f(a_1) = f(a_2)$, allora $a_1 = a_2$

- f è SURIETTIVA se tutti gli elementi di B sono immagine di qualche elemento di A

ovvero: $f(A) = \{ f(a) : a \in A \} = B$



NON è suriettiva

- f è BIIETTIVA se è INIETT. & SURIETTIVA.

Def.: Sia $f: A \to B$ biiettiva

Allora possiamo definire la FUNZIONE INVERSA di f:

$f^{-1}: B \to A$ così definita

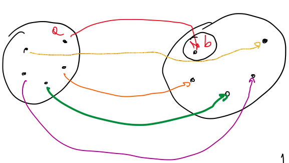
⚠ non intendiamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$\forall\, b \in B$ $\quad f^{-1}(b) = a$ dove a è t.c. $f(a) = b$

↓ PER OGNI

↓ $\in B$



a c'è perché f è suriettiva

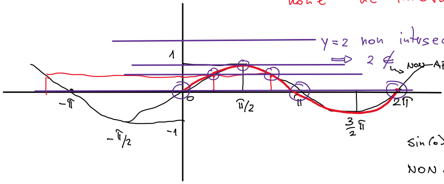
questo a è unico perché f è iniettiva

Es: $f(x) = \sin x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

non è né iniettiva né

$y = 2$ non interseca Γ_f

$\Rightarrow 2 \notin f(\mathbb{R})$ NON APPARTIENE $\Rightarrow f$ non è suriettiva

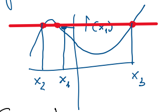


$\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0$

NON è iniettiva

$\Rightarrow$ restringo dominio e codominio.

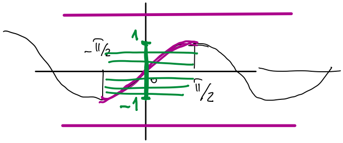
Controllo grafico della iniettività



$f(x_1) = c \in \mathbb{R}$

OSS.: Geometricamente, una funzione è iniettiva se e solo se l'intersezione del grafico con ogni retta orizzontale è costituita esattamente da un punto, oppure è vuota.

Se restringo la funzione sin x all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, diventa iniettiva



$f|_{[-\pi/2,\,\pi/2]}(x) = \sin(x)\Big|_{[-\pi/2,\,\pi/2]}$ è INIETTIVA

$[-\pi/2, \pi/2]$ è l'intervallo chiuso di estremi: $-\pi/2$ e $\pi/2$

$[-\pi/2, \pi/2] = \{ r \in \mathbb{R} : -\pi/2 \le r \le \pi/2 \}$

$$f|_{[-\pi/2, \pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

INFINE: se restringo ANCHE IL CODOMINIO, posso farla diventare suriettiva

$\Rightarrow$ cons. $\bar{f} : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$

$\bar{f} = \sin(x)|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ e con il codominio ristretto

Questa $\bar{f}$ è biiettiva, e posso cons. inversa: $(\bar{f})^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

$\arcsin(y) = x$ tale che $\sin(x) = y$

$\arcsin(0) = 0$

$\arcsin(1) = \pi/2$

Esempio ②: $f(x) = x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva, ma non suriettiva

ad es. $-1 = f(x)$

$-1 = x^2$ non ha soluzione

$-1 \notin f|_{\mathbb{R}^+}(\mathbb{R}^+)$

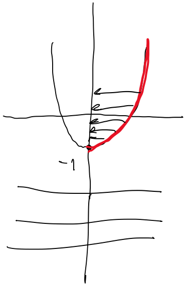
$\Rightarrow \bar{f} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è biiettiva

$(\bar{f})^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$\underbrace{(\bar{f})^{-1}}_{\sqrt{\ }}(y) = x$ tale che $x^2 = y$

$\sqrt{y} = x \quad : \quad x^2 = y$

Esempio: $f(x) = x^2 - 1$ non iniettiva
non suriettiva



$\bar{f} : \underbrace{\mathbb{R}^+} \longrightarrow [-1, +\infty)$ intervallo semichiuso

$= \{ r \in \mathbb{R} : r \geq -1 \}$

è biiettiva

si può invertire

$(\bar{f})^{-1}(\underbrace{y}) = \boxed{x}$ tale che $f(x) = y$

cioè $\underline{x}^2 - 1 = y$

cerco un'espressione di x in funzione di y

$x^2 = \underbrace{\overset{\geq -1}{y} + 1}_{\geq 0} \Longrightarrow x = \sqrt{y+1}$

$(\bar{f})^{-1} : [-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ la funz. inversa di $x^2 - 1$ è

la funzione $\sqrt{y+1}$

OSS.: Cons. $f: A \to B$ BIIETTIVA

$$\Gamma_f = \{(a,b) : \underbrace{b = f(a)}_{a \rightsquigarrow b}\}$$

cons. $f^{-1}: B \to A$

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(b,c) : c = \underbrace{f^{-1}(b)}_{= a \text{ t.c. } f(a)=b}\}$$

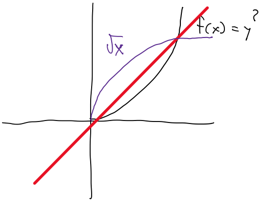
$$= \{(b,a)\} = \{(f(a),a)\}$$

$\Rightarrow$ se $f: I \to J$ biiettiva

I intervallo, $I \subseteq \mathbb{R}$, $J \subseteq \mathbb{R}$

il grafico di f^{-1} è ottenuto scambiando tra loro le coordinate di tutti i punti di Γ_f

$\Rightarrow$ $\Gamma_{f^{-1}}$ è il RIFLESSO SIMMETRICO di Γ_f rispetto alla bisettrice $y = x$



TRAILER:
- monotonia
- valore assoluto
- funzioni polinomiali
- esponziale & logaritmo
- funzioni trigonometriche
- scale logaritmiche