# Lezione 4 ottobre 2024

venerdì 4 ottobre 2024 08:04

Visto: Funzione inversa

$$\begin{tikzcd} f: A \arrow[r] & B \arrow[l, bend right, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$ biiettiva

$f: x \longrightarrow y \quad , \quad y = f(x)$

$A \longleftarrow B : f^{-1}$

$f^{-1}(y) = x$

$\Rightarrow$ se grafico di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = y\}$$
$$= \{(f(x), x)\}$$

* * *

## COMPOSIZIONE DI FUNZ. :

**Def.:** Date $f: A \to B$,
$g: B \to C$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

la FUNZ. COMPOSTA è:

$g \circ f : A \longrightarrow C$ tale che

$$\underbrace{(g \circ f)(a)}_{\in A} = \underbrace{g(\underbrace{f(a)}_{\in B})}_{\in C}$$

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$ , $g(z) = z^2$

$(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(r) = g(f(r)) = g(\sin r) = (\sin r)^2 \overset{!}{=} \sin^2 r$$

$$(g \circ f)(\pi/2) = g(\sin \pi/2) = g(1) = 1^2 = 1$$

⚠ Possiamo cons. $(f \circ g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

≠0

$$(f \circ g)(s) = f(g(s)) = f(s^2) = \sin(s^2)$$

$$(f \circ g)(\pi/2) = f\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \sin(2,46) = 0,62$$

OSS.: la comp. permette di produrre funzioni nuove da funz. elementari

OSS.: Se $f: A \to B$ è biiettiva,

cons. $f^{-1}: B \to A$

posso cons. $f \circ f^{-1}: B \to B$ $\quad (f \circ f^{-1})(b) = b$

$f^{-1} \circ f : A \to A$

$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(\underbrace{f(a)}_{b}) = a$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

$$B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$$

$\Longrightarrow$ $f^{-1} \circ f$ associa ad ogni $a \in A$ lo stesso $a$

$\Longrightarrow$ $f^{-1} \circ f = Id_A$ IDENTITA'

$Id_A : A \to A$ che lascia fissi tutti gli elementi

$Id_A(a) = a$

Inoltre $(f \circ f^{-1}) : B \to B$

$(f \circ f^{-1})(b) = b$

$\Longrightarrow$ $f \circ f^{-1} = Id_B$

$Id_B : B \to B$

Es.: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$f(x) = x^2$

$y = x^2$, $\quad x = \sqrt{y}$

$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$

Pb.: Trovare criteri affinché f sia biiettiva (quindi esiste inversa)

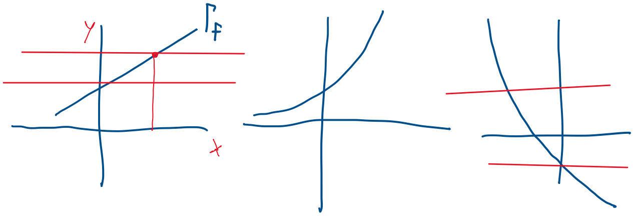
Def.: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

f si dice STRETT. CRESCENTE (DECRESCENTE) se

$\forall\ x_1, x_2 \in D$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$

$\forall\ x_1, x_2 \in D$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$

f si dice STRETT. MONOTONA se è strett. crescente o strett. decrescente



TEOREMA: Se f è strett. monotona $\Rightarrow$ f è iniettiva

Dim.: Supp. f strett. crescente, voglio dim. che è iniettiva

cons. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ si ha $x_1 < x_2 \xRightarrow{f \text{ str. crescente}} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

opp. $x_2 < x_1 \underset{f \text{ str. cresc.}}{\Rightarrow} f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1)$

Se, invece, f è strett. decrescente:

cons. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \xRightarrow{f \text{ str. decr.}} f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

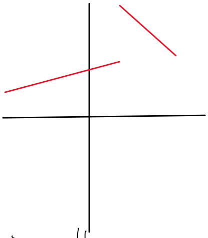
$x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1)$

ATTENZIONE: NON vale viceversa:

cioè non è vero che

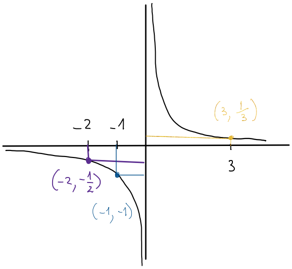
se f è iniettiva, allora f è strett. monotona

Controesempio:



è iniettiva ma non strettamente monotona

opp.



$f(x) = \frac{1}{x}$

$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$

$-2 < -1, \quad -1 < 3$

$f(-2) = -\frac{1}{2}, > f(-1) = -1, \quad f(3) = \frac{1}{3}$

$-1 < \frac{1}{3}$

$f(-2) > f(-1)$

$f(-1) < f(3)$

E' iniettiva, ma non strettamente monotona

OSS: Dire che un teorema non vale: non vuol dire che l'affermazione non vale mai, ma che ci sono dei casi in cui non vale.

Quindi: per CONFUTARE un enunciato, basta esibire un CONTROESEMPIO.

es. Teo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è INIETTIVA

Non è vero: basta esibire 1 caso in cui non è iniettiva: un CONTROESEMPIO

ad es. $f(-1) = (-1)^2 = 1 = f(1)$

$-1 \neq 1$ hanno stessa immagine