Esercitazioni di "Geometria"
Foglio 0

Titolare del corso: Prof. Danilo Lewanski

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

"La pratica è la verifica della teoria

Esercizio 1. Siano S un insieme ed X l'insieme delle funzioni di dominio S e codominio in S. Detta $\circ$ l'usuale composizione di funzioni, dimostrare che $(X, \circ)$ è un monoide.

Esercizio 2. Sull'insieme $S = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ si definisca l'operazione $*$ secondo la seguente *tabella di A. Cayley*[1]:

$*$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	1	-1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	-1	1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	1	-1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	-1	1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	1	-1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	-1	1

Dimostrare che 1 è l'elemento neutro di $(S, *)$ e che $*$ non è un'operazione associativa.

Esercizio 3. Sia $\{-1, 1\} \subsetneqq \mathbb{Z}$. Detta $\cdot$ l'usuale moltiplicazione di numeri interi, dimostrare che $(\{-1, 1\}, \cdot)$ è una struttura algebrica e scrivere la relativa tabella di Cayley.

Esercizio 4. Su $\mathbb{R}^2$ si consideri la seguente operazione:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2,\ (a, b) * (c, d) = (ac - bd, -ad - bc).$$

Dimostrare che $\left(\mathbb{R}^2, *\right)$ è una struttura algebrica la cui operazione interna è commutativa, ma non è né associativa né unitaria.

Esercizio 5 (Il gioco della Morra Cinese.). Si consideri l'insieme $M = \{1, c, s, f\}$ ove, come nel *gioco della Morra Cinese*, c significa "carta", s significa "sasso" ed f significa "forbici". Secondo le regole del gioco, per esempio, le forbici battono la carta e si porrà

[1] L'elemento della riga n-sima è composto mediante $*$ con l'elemento della colonna m-sima.

$c * f = f * c = f$; mentre in caso di uno stesso oggetto, per esempio il sasso, si porrà $s * s = s$; infine, 1 si assume come elemento neutro rispetto a $*$. Utilizzando la notazione della tabella di Cayley si ha:

$*$	1	c	s	f
1	1	c	s	f
c	c	c	c	f
s	s	c	s	s
f	f	f	s	f

- Dimostrare che $(M, *)$ è una struttura algebrica unitaria, commutativa ma non associativa.
- Dimostrare che $\forall x \in M$, $x^2 = x * x = x$.

Esercizio 6. Sia S un insieme con almeno due elementi distinti, e sia $\mathscr{P}(S)$ *l'insieme dei sottoinsiemi di* S. Su $\mathscr{P}(S)$ si possono considerare le operazioni $\cup, \cap$ e $\setminus$. Dimostrare che:

- $\cap$ e $\cup$ sono l'una distributiva sull'altra.
- $\setminus$ è distributiva da destra ma non da sinistra sia su $\cap$ che su $\cup$. $\triangle$

Esercizio 7. Sia Ω un insieme con almeno tre elementi distinti, e sia $\mathrm{Sym}(\Omega)$ l'insieme delle permutazioni[2] di Ω. $(\mathrm{Sym}(\Omega), \circ)$ è un gruppo non abeliano, rispetto alla usuale composizione di funzioni.

Esercizio 8. Sia A un anello commutativo unitario[3] e si considerino le *successioni a valori in* A[4] *definitivamente nulle*[5]. Sia f una tale successione, per semplicità la si indichi con $(f(n) = a_n \in A)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$; introdotti simboli formali $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$ ove $x^0 = 1 \in A$ e per semplicità $x^1 = x$, ha senso porre

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \equiv f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Questo oggetto si denomina *polinomio di grado n a coefficienti in* A; l'elemento a_k si denomina *coefficiente di grado* k, $a_k x^k$ si denomina *termine (monomiale) di grado* k del polinomio $f(x)$. Dimostrare che l'insieme dei polinomi $(A[x], +, \cdot)$ a coefficienti nell'anello A è un anello commutativo unitario rispetto alle seguenti operazioni:

$$\forall p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m \in A[x],$$

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\max\{m,n\}} (a_k + b_k) x^k \\ p(x) \cdot q(x) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ i+j=k}}^{mn} (a_i b_j + a_j b_i) x^k \end{cases}.$$

[2]Le funzioni biettive di un insieme Ω in sé si denominano *permutazioni di* Ω.

[3]Qualora fosse necessario, si assuma che $A \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$; e si noti in seconda istanza che quest'ultima è solo un'ipotesi di comodo.

[4]In generale, si definisce *successione a valori in un insieme* S una qualsiasi funzione $f \colon \mathbb{N} \to S$; ove all'occorrenza si include\esclude lo zero dall'insieme dei numeri naturali.

[5]Una successione f a valori in un anello A si definisce *definitivamente nulla* se esiste un indice $N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ tale che $\forall n > N$, $f(n) = 0$.

Esercizio 9. Sia A un anello commutativo unitario e si consideri l'anello $A[x]$ dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in A. Dimostrare che per ogni $f(x), g(x), h(x) \in A[x]$ risulta $(f+g)\circ h(x) = (f\circ h+g\circ h)(x), (f\circ g)(x) \in A[x]$; ovvero $(A[x], +, \circ)$ è una struttura algebrica con operazioni interne associative, rispetto alla prima operazione è un gruppo abeliano e $\circ$ è distributiva a destra ma non a sinistra su $+$.

Esercizio 10. Sull'insieme $\{0, 1\}$ si considerino le seguenti operazioni:

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \otimes & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \; ;$$

si dimostra che $\mathbb{F}_2 \equiv (\{0, 1\}, \oplus, \otimes)$ è un campo.