

VALUTAZIONE FINALE PER $(M_n(K), +, \cdot)$:

Promosso al rango di:

ANELLO NON COMMUTATIVO
E K -SPAZIO VETTORIALE

Q:

È se SELEZIONASSIMO SOLTANTO quelle matrici $n \times n$ che sono invertibili? Potremmo ottenere qualcosa di buono?

Def [GRUPPO GENERALE LINEARE di ORDINE n sul CAMPO K]

$$GL_n(K) := \{ A \in M_n(K) \mid A \text{ invertibile} \}$$

$\uparrow \exists B: A \cdot B = 1 = B \cdot A$, dove:
SE ESISTE ALLORA CHIAMIAMO QUESTO B A^{-1}

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R: Sì! Come dice il nome, questo è proprio un gruppo
[comunque sempre **NON ABELIANO**].

Q: Per essere un gruppo, il prodotto di due invertibili dev'essere invertibile.

Ma questa non è un problema: $(A \cdot B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot 1 \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = 1$

QUINDI $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \leftarrow \Delta \text{ SCAMBIO L'ORDINE!}$

Q: Ma allora se consideriamo $(GL_n(K), +, \cdot)$ otteniamo un altro **CAMPO**?

R: Purtroppo **NO** [A meno che $n=1$, nel qual caso le matrici sono "degeneri" e tornano ad essere **SCALARI**, e si riottiene semplicemente il CAMPO K di partenza]

Questo perché $(GL_n(K), +)$ non è **NEMMENO UN MAGMA!**

Esempio: $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$ elemento neutro, ed è l'inverso di se stesso quindi $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ed ha inverso ancora se stesso:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Quindi $B \in GL_2(\mathbb{R})$. Però $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi $A + B \notin GL_2(\mathbb{R})$ perché

avendo $\det(A+B) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$ non è INVERTIBILE.

Q: Speaking of inverses... se l'inverso esiste, allora è unico?

R: SÌ!

Q: E come si dimostra?

R: Se B e C sono entrambi

inversi di A, cioè se:
$$\begin{cases} BA = 1 = AB \\ CA = 1 = AC \end{cases}$$

Allora abbiamo che: $B = B \cdot 1 = B(AC) = (BA)C = C$

Quindi $B = C$ cioè l'inverso è unico.

Q: Abbiamo visto che l'inverso di A è quell'elemento A^{-1} tale che:
$$\begin{cases} AA^{-1} = 1 \\ A^{-1}A = 1 \end{cases}$$
 ← ENTRAMBE LE COSE!
PER DEFINIZIONE

Ma non è che per caso se un M soddisfa una delle due allora automaticamente soddisfa anche l'altra?

R: SÌ!

Q: E come si dimostra?

R: Sia M una matrice che soddisfa $AM = 1$. Vogliamo fare vedere che soddisfa anche $MA = 1$, e usare che $M = A^{-1}$

$$MA = 1MA = (A^{-1}A)MA = A^{-1}(\underbrace{AM})A = A^{-1}A = 1$$

= 1 PER IPOTESI

$$\Rightarrow MA = 1$$

DEFINIZIONI dei vari tipi di MATRICI QUADRATE

Sia $A \in M_n(K)$, cioè quadrata $n \times n$ [n si chiama ORDINE]

SI CHIAMA DELTA DI KRONECKER

Def: A è la MATRICE UNITÀ $\mathbf{1} \Leftrightarrow A = (\delta_{ij})_{i,j}$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

cioè: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$ a volte si scrive $\mathbf{1}_n$ per evidenziare n .

Def: A è una MATRICE DIAGONALE $\Leftrightarrow A = (\delta_{ij} \cdot \lambda_i)_{i,j}$ con $\lambda_i \in K$

cioè: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

la diagonale può contenere zeri, ma fuori della diagonale sono tutti zeri

Def: A è una MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE $\Leftrightarrow A = (\delta_{i \leq j} \cdot a_{ij})_{i,j}$ $a_{ij} \in K$

cioè: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{2} & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

dove:

$$\delta_{i \leq j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \leq j \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$$

↑ SOTTO LA DIAGONALE DEVONO ESSERE TUTTI ZERI

Def: A è una MATRICE TRIANGOLARE INFERIORE $\Leftrightarrow A = (\delta_{i \geq j} \cdot a_{ij})_{i,j}$ $a_{ij} \in K$

Cioè: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

dove: $\delta_{i \geq j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \geq j \\ 0 & \text{se } i < j \end{cases}$

SOPRA LA DIAGONALE DEVONO ESSERE TUTTI ZERI

Def: A è una MATRICE SIMMETRICA $\Leftrightarrow A = (a_{ij})_{i,j} = (a_{ji})_{i,j}$ $\Leftrightarrow {}^tA = A$ DEF EQUIVALENTI

Cioè: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & \sqrt{3} \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & \sqrt{3} & 5 & 1 \end{pmatrix}$

SIMMETRIA RISPETTO ALLA DIAGONALE. INVECE UNA MATRICE ANTISIMMETRICA È SIMMETRICA RISPETTO ALL'ANTIDIAGONALE

$A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$ (ALL'ALTRA DIAGONALE)

Def: A è una MATRICE HERMITIANA $\Leftrightarrow A = {}^t\bar{A}$ SOLO PER $K=\mathbb{C}$

ANALOGO COMPLESSO DELLA SIMMETRIA REALE

$\Leftrightarrow (a_{ij})_{i,j} = (\bar{a}_{ji})_{i,j}$ USO IL CONIUGIO SU OGNI SINGOLO ELEMENTO

Def: A è una MATRICE INVERTIBILE $\Leftrightarrow \exists A^{-1} \in M_n(K) : A^{-1}A = 1_n = AA^{-1}$

Def: A è una MATRICE ORTOGONALE $\Leftrightarrow A^{-1} = {}^tA$

Def: A è una MATRICE IDEMPOTENTE $\Leftrightarrow A \cdot A = A$