Matrici

Def: siano $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; una matrice $m \times n$ a coefficienti reali è una tabella rettangolare, con $m \cdot n$ entrate che sono numeri reali, del tipo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonne}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} m \text{ righe}$$

dove ciascun a_{ij} è un numero reale, ovvero

$$\forall i \in \{1, \dots, m\},\ \forall j \in \{1, \dots, n\},\ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

l'indice di riga — indice di colonna

due matrici sono uguali se tutte le loro entrate sono uguali.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & -1 \\ 1 & \pi & 3 & 4 \\ 0 & \sqrt{2} & 12 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad a_{12} = 7 \quad a_{21} = 1$

Def: sia $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ una matrice a coefficienti reali

per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ la <u>i-esima riga</u> è la matrice

$$A_{(i)} := (a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}) \longleftarrow \text{matrice } 1 \times n$$

per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ la <u>j-esima colonna</u> è la matrice

$$A^{(j)} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{matrice } m \times 1$$

Def: una matrice si dice <u>quadrata</u> se il numero delle sue righe è uguale al numero delle sue colonne.

Esempio: la seguente è una matrice quadrata 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_{(1)} = (2\ 5) \quad A_{(2)} = (1\ 7)$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Def: dati $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali si denota $M_{m,n}(\mathbb{R})$; l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali si denota $M_n(\mathbb{R})$.

Def: la <u>matrice nulla</u> $m \times n$ è la matrice $m \times n$ le cui entrate sono tutte 0 (con $0 \in \mathbb{R}$); la denotiamo con 0

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Introduciamo operazioni tra matrici e tra matrici e numeri al fine di dotare $M_{m,n}(\mathbb{R})$ della struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Def: siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; definiamo la <u>somma</u> di A e B, e la denotiamo $A+B$, come la matrice la cui entrata ij-esima (ovvero l'entrata di posto ij) è ottenuta nel modo seguente:

se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ $\quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

e definiamo $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ e $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

allora $A + B = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 5+1 \\ -1+0 & 3+(-1) & -2+0 \end{pmatrix}.$$

Oss: la matrice nulla è un (in effetti, il) elemento neutro della somma di matrici.

Def: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$; definiamo la matrice $\lambda \cdot A$ come la matrice seguente: se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, allora

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

moltiplicazione tra numero reale e matrice — moltiplicazione tra numeri reali

Prop: l'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$ con le operazioni definite qui sopra è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Dim: per esercizio.

Esempio: se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $\lambda = -2$, allora

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} -2\cdot 0 & -2 \cdot 1 & -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 & -2 \cdot 4 & -2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -6 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Consideriamo una matrice 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Consideriamo quattro particolari matrici 2×2:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora la seguente <u>combinazione lineare</u> delle quattro matrici:

$$3 \cdot E + F - 2 \cdot G + 4H =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Questa costruzione si può ripetere per qualsiasi $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$:

se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\ \forall i \in \{1,2\}$ $\forall j \in \{1,2\}$

allora vale $A = a_{11} \cdot E + a_{12} \cdot F + a_{21} \cdot G + a_{22} \cdot H$

Notiamo quindi che ogni matrice in $M_{2,2}(\mathbb{R})$ si può scrivere come combinazione lineare di E, F, G, H con opportuni coefficienti. Per questo motivo diciamo che E, F, G, H sono un <u>sistema di generatori</u> di $M_{2,2}(\mathbb{R})$

Notiamo che questo argomento può essere ripetuto anche per matrici $m \times n$, ovvero vale che:

Prop: consideriamo in $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'insieme $\mathcal{B} \subseteq M_{m,n}(\mathbb{R})$ di tutte le matrici che hanno tutte le entrate nulle, eccetto esattamente una, la quale è uguale a 1; allora $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori per $M_{m,n}(\mathbb{R})$, ovvero ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ può essere scritta come combinazione lineare di matrici appartenenti a $\mathcal{B}$.

Ritorniamo alle matrici 2×2. Tutte tali matrici si possono scrivere come combinazione lineare di E, F, G, H; in particolare ciò vale anche per la matrice nulla:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot E + 0 \cdot F + 0 \cdot G + 0 \cdot H$$

Ci chiediamo: esiste un altro modo per scrivere 0 come combinazione lineare di E, F, G e H? Più precisamente esistono numeri reali e, f, g, h non tutti nulli tali che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e \cdot E + f \cdot F + g \cdot G + h \cdot H \ ?$$

Cerchiamo di capire quali condizioni su e, f, g, h impone l'uguaglianza precedente:

$$e \cdot E + f \cdot F + g \cdot G + h \cdot H = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Quindi se vale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e \cdot E + f \cdot F + g \cdot G + h \cdot H$, allora vale che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} e = 0 & f = 0 \\ g = 0 & h = 0 \end{matrix}$$

perché due matrici sono uguali se e solo se tutte le loro entrate sono uguali. Pertanto abbiamo dimostrato che l'unico modo per ottenere la matrice nulla come combinazione lineare delle matrici E, F, G, H è scegliere tutti e quattro i coefficienti pari a zero.

In questo caso diciamo quindi che le matrici E, F, G, H sono <u>linearmente indipendenti</u>.

Oss: le tre matrici,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>non</u> sono linearmente indipendenti, infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A + (-1) \cdot B + (-1) \cdot C$$

$$= 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$$

Consideriamo ora il sottoinsieme:

$$T_{2,2}(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \ a_{21} = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : \ a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

Dunque $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_{2,2}(\mathbb{R})$, ma $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin T_{2,2}(\mathbb{R})$.

L'insieme $T_{2,2}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti reali <u>triangolari superiori</u>.

Vale che:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_{2,2}(\mathbb{R})$
2. se $A, B \in T_{2,2}(\mathbb{R})$, allora

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

   quindi

   $$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 + 0 & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

   pertanto $A + B \in T_{2,2}(\mathbb{R})$
3. analogamente a 2., se $A \in T_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

   $$\lambda \cdot A \in T_{2,2}(\mathbb{R})$$

Dunque $T_{2,2}(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale.