Matrici

Def: una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice <u>diagonale</u> se, posto $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$, allora vale che $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ è una matrice diagonale}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ non è una matrice diagonale}$$

Oss: la matrice nulla è una matrice diagonale.

Def: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$; gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ costituiscono la <u>diagonale principale</u> di A

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

diagonale principale

Def: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e supponiamo $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{1, \dots, n\}}}$; definiamo la <u>trasposta</u> di A come quella matrice ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ tale che

$$({}^tA)_{ij} := a_{ji}$$

entrata ij-esima di ${}^tA$ — entrata ji-esima di A

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

la trasposta si ottiene scambiando le righe con le colonne.

Prop: siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; allora

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t({}^tA) = A$

Dim: 1. notiamo che

$${}^t(\underbrace{A+B}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

$$(\underbrace{{}^tA}_{\in M_{n,m}} + \underbrace{{}^tB}_{\in M_{n,m}}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

Ha dunque senso chiedersi se le due matrici siano uguali

per mostrare che le matrici sono uguali dimostriamo che $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $\forall j \in \{1, \dots, m\}$

$$({}^t(A+B))_{ij} = ({}^tA + {}^tB)_{ij}$$

scelgo dunque $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$; vale che

$$({}^t(A+B))_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji}$$

$$({}^tA + {}^tB)_{ij} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} = A_{ji} + B_{ji}$$

il che dimostra la tesi.

2. Notiamo che

$${}^t(\underbrace{{}^tA}_{\in M_{n,m}(\mathbb{R})}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

quindi ha senso chiedersi se valga ${}^t({}^tA) = A$.

per mostrare l'uguaglianza mostriamo che $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$({}^t({}^tA))_{ij} = A_{ij}$$

fissiamo $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ e calcoliamo

$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij}$$

il che dimostra la tesi.

Oss: in generale, non ha senso chiedersi se $A = {}^tA$ dal momento che tali due matrici hanno in generale dimensioni diverse; ha senso chiederselo se A è quadrata.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ per questa matrice vale } A = {}^tA$$

Def: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ (dunque A è quadrata); la matrice A si dice <u>simmetrica</u> se vale $A = {}^tA$; la matrice A si dice <u>antisimmetrica</u> se vale $A = -{}^tA$

Esempio: se vale $A = -{}^tA$, allora $A_{ii} = (-{}^tA)_{ii} = -({}^tA)_{ii} = -A_{ii}$

pertanto $A_{ii} = -A_{ii}$, ovvero $2A_{ii} = 0$, ovvero $A_{ii} = 0$; quindi gli elementi della diagonale principale di una matrice antisimmetrica devono essere tutti nulli

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ questa è una matrice antisimmetrica.}$$

Oss: ogni matrice quadrata nulla è sia simmetrica che antisimmetrica.

Ora andiamo a introdurre una nuova operazione tra matrici.

Consideriamo questa situazione

costo (unitario) della pasta $c_p = 1$€

costo (unitario) del latte $c_L = 2$€

costo (unitario) delle uova $c_U = 3$€

Supponiamo di dover acquistare rispettivamente n_p, n_L ed n_U unità di pasta, latte e uova. Il costo totale sarà:

$$c_p \cdot n_p + c_L \cdot n_L + c_U \cdot n_U$$

Formiamo una matrice 1×3 con i costi unitari e una matrice 3×1 con i numeri di unità:

$$\begin{pmatrix} c_p & c_L & c_U \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} n_p \\ n_L \\ n_U \end{pmatrix}$$

Definiamo il <u>prodotto</u> <u>righe</u> <u>per</u> <u>colonne</u> delle due matrici precedenti

$$\begin{pmatrix} c_p & c_L & c_U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_L \\ n_U \end{pmatrix} := c_p \cdot n_p + c_L \cdot n_L + c_U \cdot n_U$$

Analogamente possiamo definire il prodotto righe per colonne tra una matrice $1 \times n$ e una matrice $n \times 1$.