POLO UNIVERSITARIO
FONDAZIONE
PORTOGRUARO CAMPUS

Lezione 3
Rappresentazioni grafiche e i valori centrali

PROF. ROBERTO COSTA

SCIENZE DELL'EDUCAZIONE - STATISTICA SOCIALE (305SF)

Dove eravamo rimasti

Nella scorsa lezione abbiamo parlato di unità statistica, di popolazione e di variabili statistiche.

Abbiamo approfondito le differenze tra variabili qualitative e quantitative, sottolineando come la scelta a priori del tipo di variabili determina le operazioni che possiamo fare su di esse.

Infine abbiamo visto come posso sintetizzare i microdati in tabelle di frequenza.

Abbiamo visto anche le frequenze cumulate.

Dove eravamo rimasti

Facciamo un piccolo esercizio assieme:

Persone di 14 anni e + fumatori per sigarette fumate. Anno 2022, Valori %

Sigarette fumate	%
Fino a 5	26,4
Da 6 a 10	37,0
Da 11 a 20	33,4
Oltre 20	3,2

Fonte Istat, Indagine Multiscopo sulle famiglie: aspetti della vita quotidiana - parte generale.

Che tipo di distribuzione di frequenza è?

Assoluta ☐

Relativa ☐

Percentuale ☐

Che tipo di variabile è

Quantitativa discreta ☐

Quantitativa continua ☐

Quante persone fumano fino a 10 sigarette?

____

Quante persone fumano più di 5 sigarette?

____

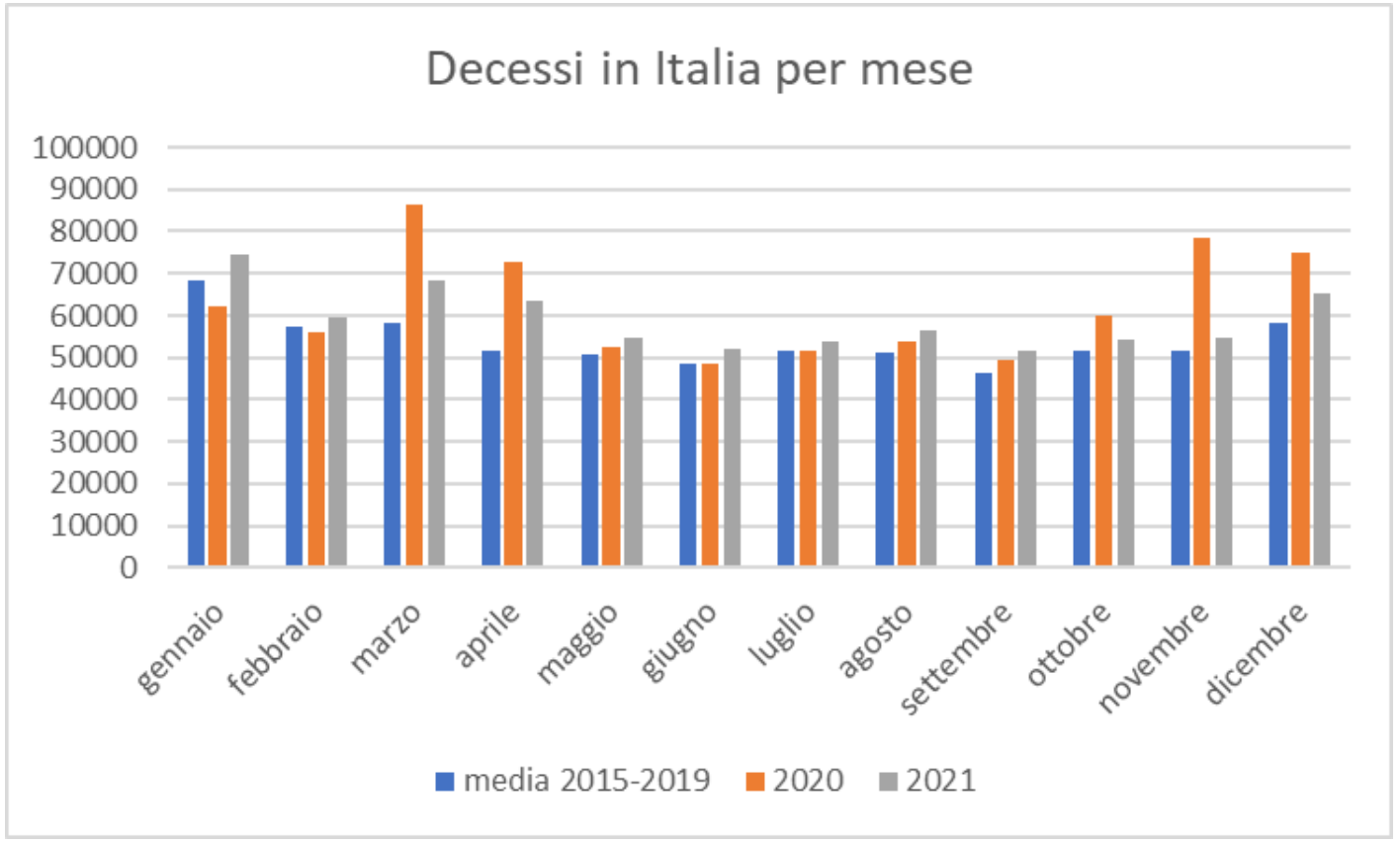
La rappresentazione grafica

Partiamo da una tabella riferita ai decessi in diversi periodi:

Decessi per anno e mese													
	gennaio	febbraio	marzo	aprile	maggio	giugno	luglio	agosto	settembre	ottobre	novembre	dicembre	TOTALE
media 2015-2019	68.324	57.416	58.267	51.801	50.724	48.501	51.811	51.041	46.548	51.590	51.462	58.133	645.620
2020	62.019	56.070	86.501	72.809	52.440	48.589	51.422	53.744	49.326	59.861	78.470	74.895	746.146
2021	74.550	59.389	68.507	63.434	54.802	52.201	53.668	56.594	51.456	54.463	54.870	65.101	709.035
Fonte: Istat, Tavola decessi totali regionali mensili per la media degli anni 2015-2019, per gli anni 2020-2021 e per i mesi di gennaio-agosto 2022													

La rappresentazione grafica

Proviamo a tradurli in forma grafica. Lo trovate più esplicativo?



Rappresentazioni grafiche

Un grafico consente di cogliere il contenuto di una distribuzione con più facilità, rispetto ad una tabella.

Il grafico traduce le frequenze delle modalità in forme geometriche elementari.

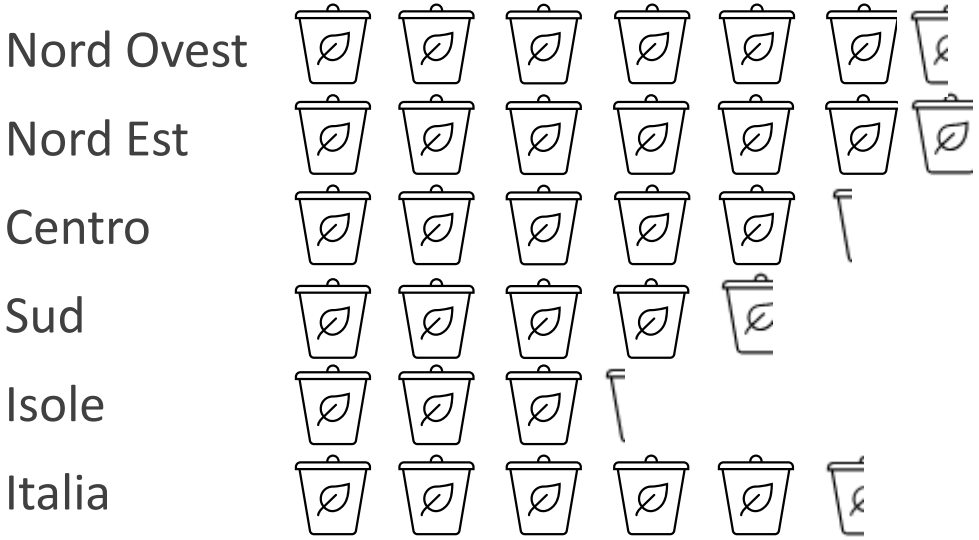
Come per le tecniche di analisi, anche i grafici variano e si differenziano a seconda del tipo di variabile che si vuole rappresentare.

Pittogrammi

Il **pittogramma** è una rappresentazione grafica che viene utilizzata di solito a fini divulgativi ed è generalmente rivolto a un pubblico di non esperto.

Consiste in figure o simboli che rappresentano la proprietà rappresentata e che vengono ripetuti, o hanno dimensioni proporzionali alle frequenze.

Rifiuti urbani e raccolta differenziata in Italia (2017)



Ripartizione	Raccolta differenziata %
Nord Ovest	64,5
Nord Est	68,3
Centro	51,8
Sud	47,0
Isole	31,6
Italia	55,5

Ortogrammi

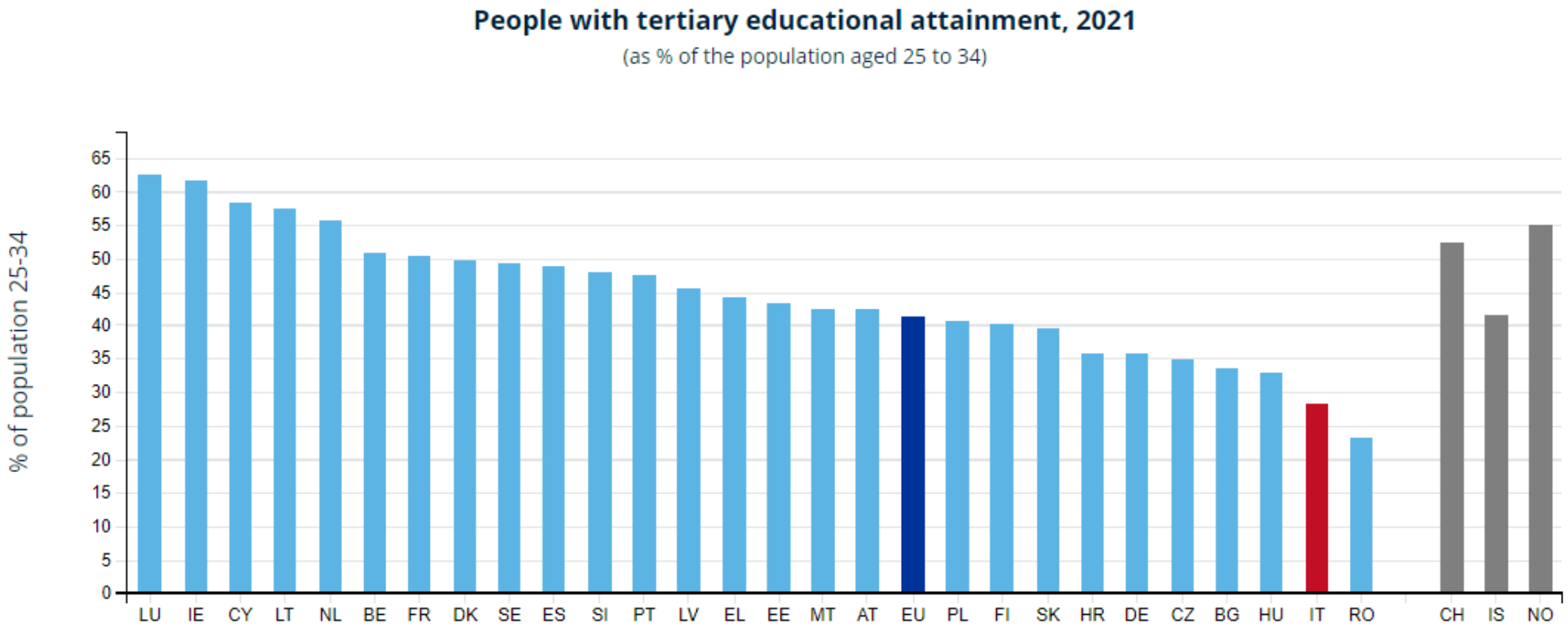
Si utilizzano per rappresentare variabili qualitative con categorie non ordinate (mutabili sconnesse).

Su un asse ci sono le modalità della variabile e sull'altra le corrispondenti frequenze.

Le modalità vengono rappresentate da linee o parallelepipedi aventi base uguale ed equidistanti tra loro.

Questi possono essere disposti orizzontalmente (**diagramma a nastri**) o verticalmente (**diagramma a colonne**), lunghezza o altezza sono proporzionali alle frequenze delle modalità.

Ortogrammi

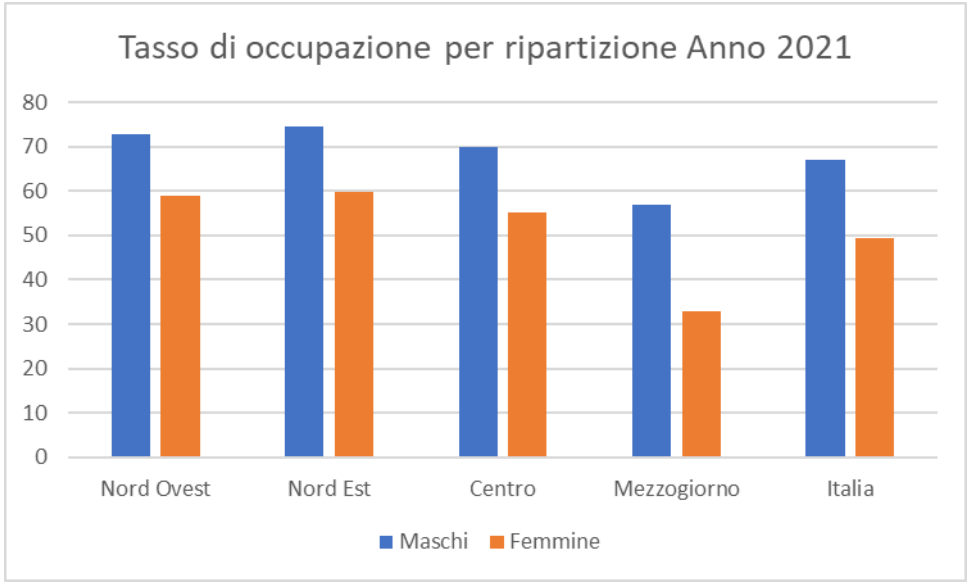


Fonte: Eurostat https://ec.europa.eu/eurostat/cache/digpub/sdgs/index.html

Ortogrammi

Si utilizzano gli ortogrammi per il confronto della distribuzione della frequenza di una stessa variabile in sottogruppi.

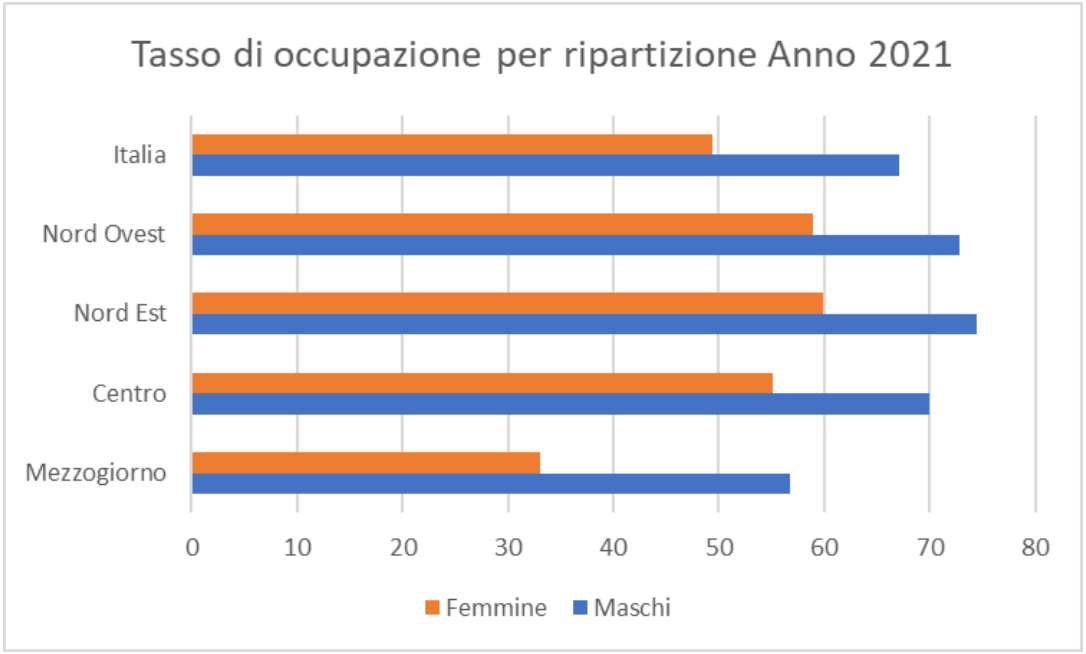
In questo caso si parla di diagramma a nastri o colonne contrapposti (o appaiati).



Fonte: Istat, Rilevazione sulle forze di lavoro

Ortogrammi

Possiamo utilizzare il diagramma a nastri appaiati.

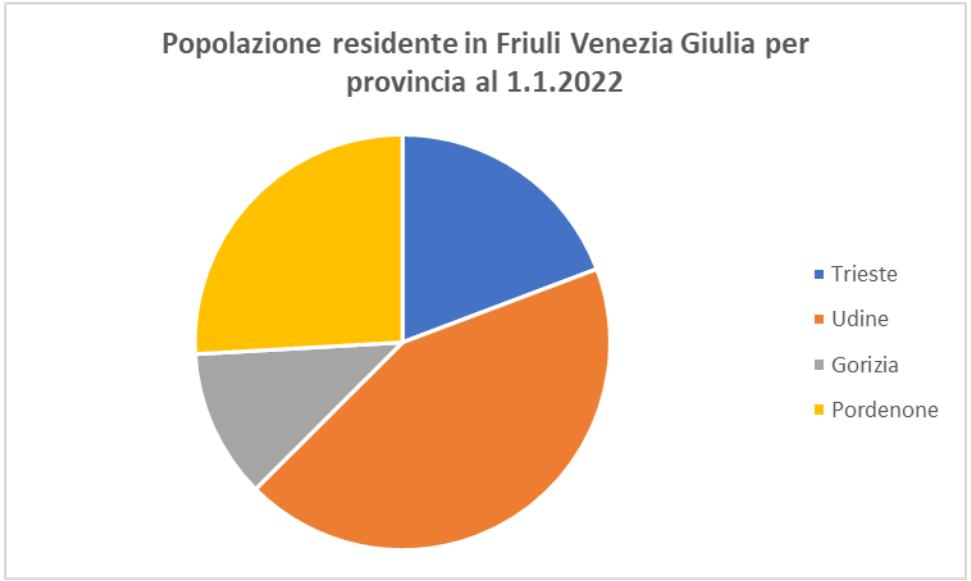


Fonte: Istat, Rilevazione sulle forze di lavoro

Aerogrammi

L’aerogramma è un grafico nel quale la distribuzione di frequenza viene rappresentata suddividendo l’area di una figura piana (solitamente un cerchio) in parti proporzionali.

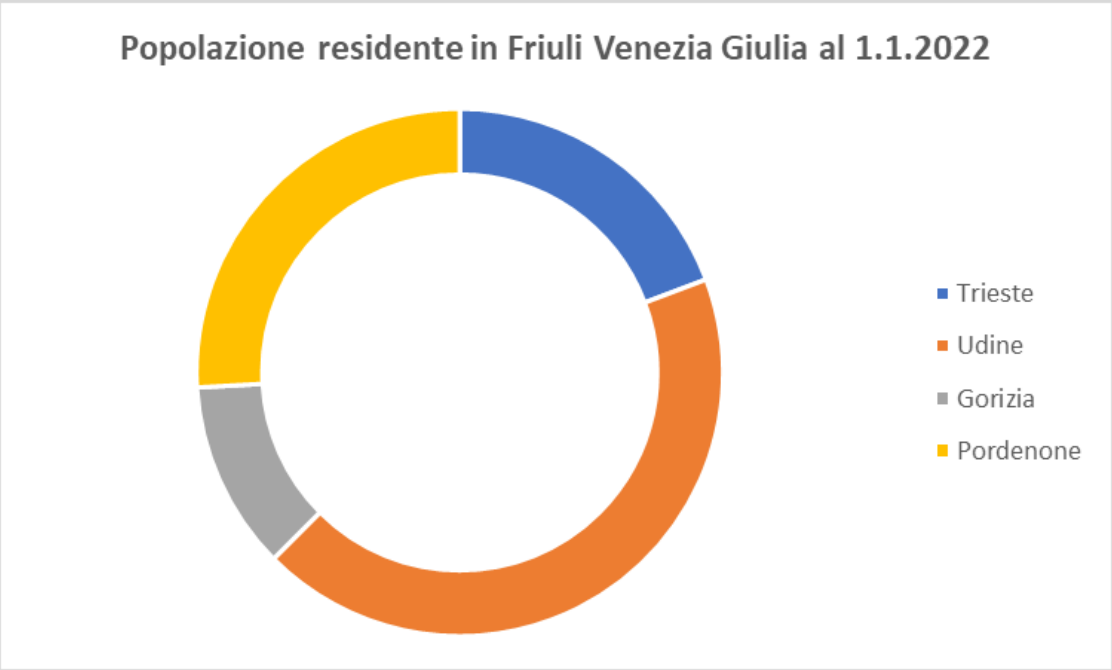
L’areogramma più utilizzato è il **diagramma a torta** (pie chart).



Fonte: Istat, Popolazione residente comunale per sesso anno di nascita e stato civile

Aerogrammi

Un altro areogramma che viene utilizzato è il **diagramma ad anello**.

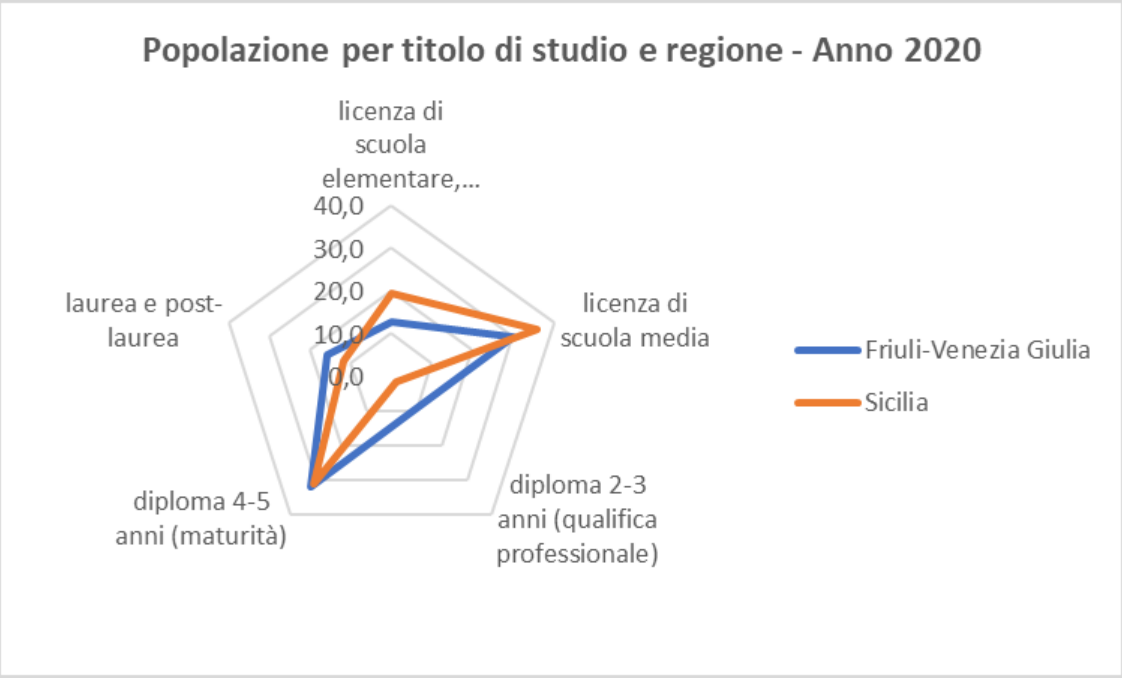


Fonte: Istat, Popolazione residente comunale per sesso anno di nascita e stato civile

Aerogrammi

Un altro areogramma che si utilizza con le variabili qualitative è il **diagramma a radar**.

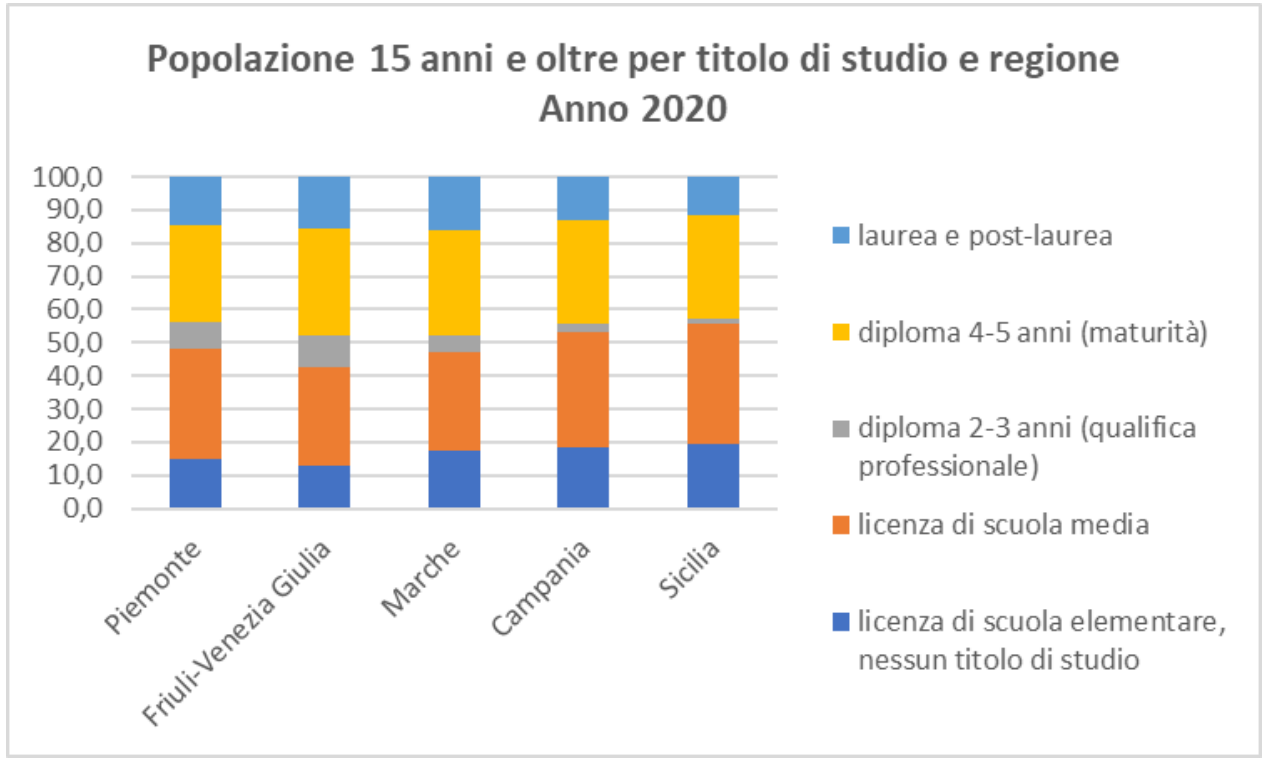
E’ un poligono con tanti vertici quante sono le modalità della variabile.



Fonte: Istat, Rilevazione sulle forze di lavoro

Aerogrammi

Un altro areogramma che si utilizza con le variabili qualitative ordinate è il **diagramma a barre suddivise**.



Fonte: Istat, Rilevazione sulle forze di lavoro

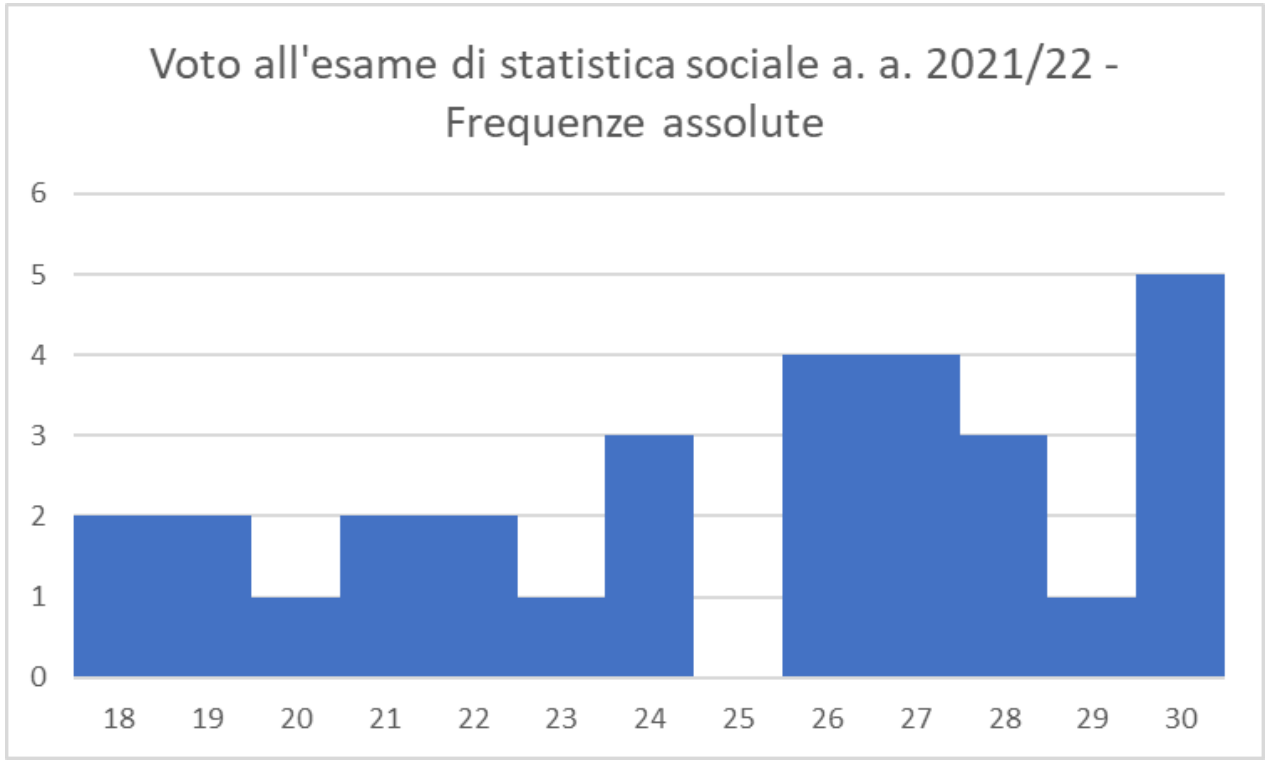
Gli istogrammi

Gli **istogrammi** vengono utilizzati per rappresentare la distribuzione di variabili quantitative discrete o continue raggruppate in classi.

Nel caso di variabili quantitative discrete, sull'asse delle ascisse troviamo le modalità della variabile ordinate in modo crescente e sull'asse delle ordinate le frequenze (assolute o percentuali).

Gli istogrammi

E’ molto simile a un diagramma a colonne, con la differenza che tra le categorie non vengono lasciati spazi.



Gli istogrammi

Nel caso di variabili quantitative discrete raggruppate in classi o di variabili continue, dobbiamo tenere in considerazione l'ampiezza delle classi.

Se le classi sono di pari ampiezza si può utilizzare l'istogramma a basi uguali

Se le classi hanno ampiezze diverse non possiamo rappresentare il fenomeno con colonne di pari larghezza, ma dobbiamo calcolare la densità di frequenza (d).

La densità di frequenza si calcola dividendo la frequenza della classe e la relativa ampiezza della classe

$$d_i = \frac{Frequenza\ assoluta}{ampiezza\ i-esima\ classe}$$

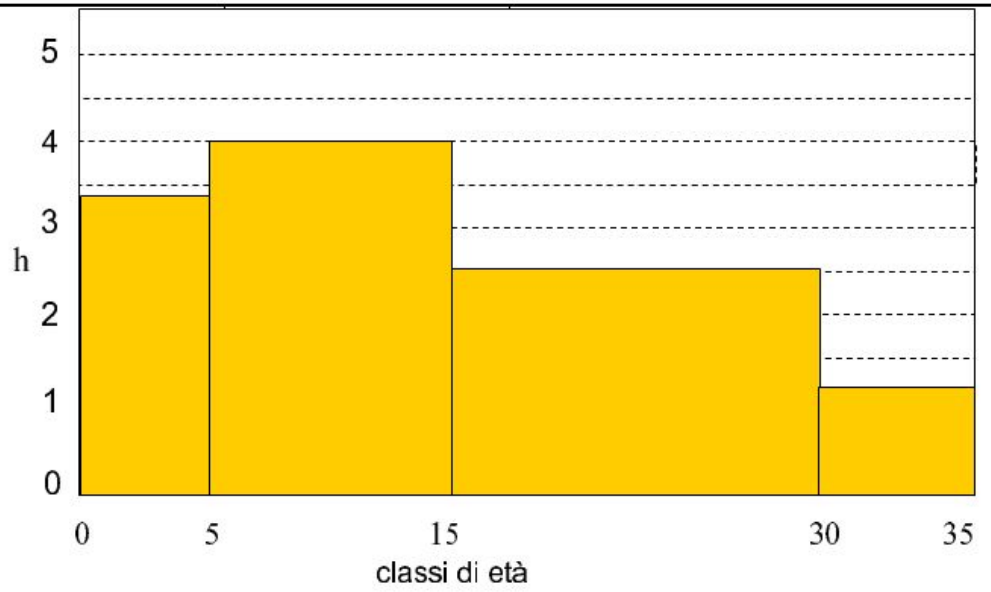
Gli istogrammi

Esempio di istogramma a basi diverse.

Dovremo riportare la densità di frequenza sull'asse delle ordinate.

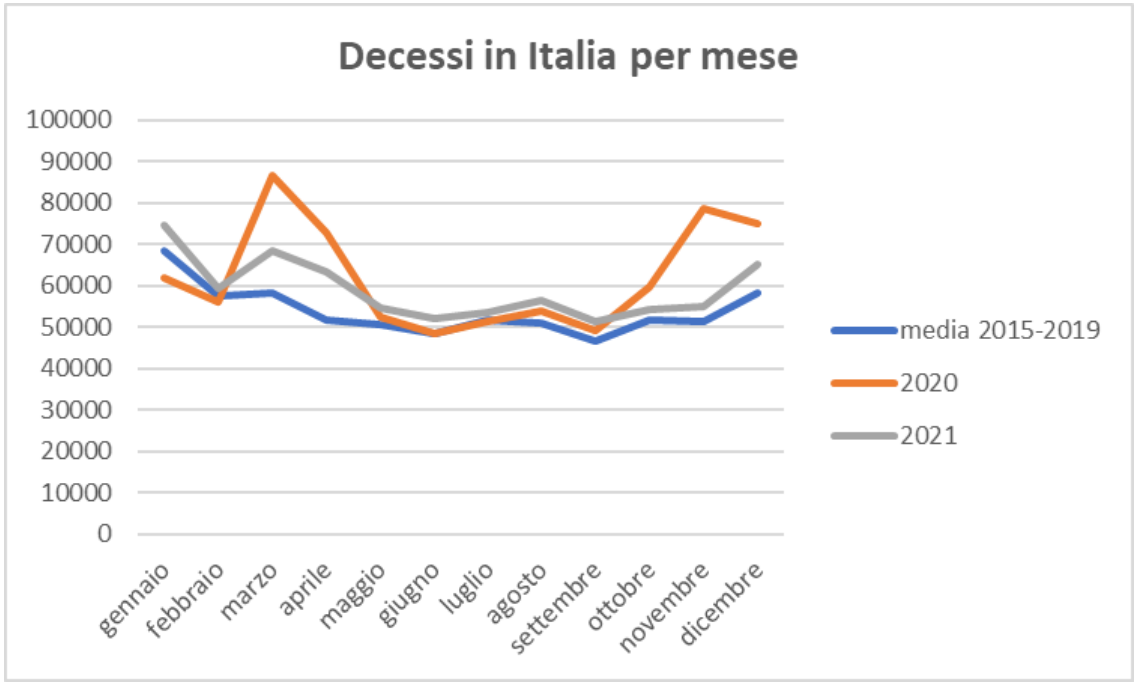
La frequenza di ciascuna classe corrisponderà all'area del rettangolo

classi di età	amp. classe a_j	freq. % p_j	densità h_j
0-5	5	17,0	3,4
5-15	10	40,0	4,0
15-30	15	37,0	2,5
30-35	5	6,0	1,2



Le spezzate

Se immaginiamo di congiungere i punti medi dei lati superiori dei rettangoli che compongono un istogramma otteniamo una linea, che prende il nome di **spezzata**, che in alcuni casi rappresenta meglio l'andamento di una distribuzione e che consente di raffigurare nello stesso grafico più proprietà (o la stessa proprietà di più popolazioni) per metterle a confronto.



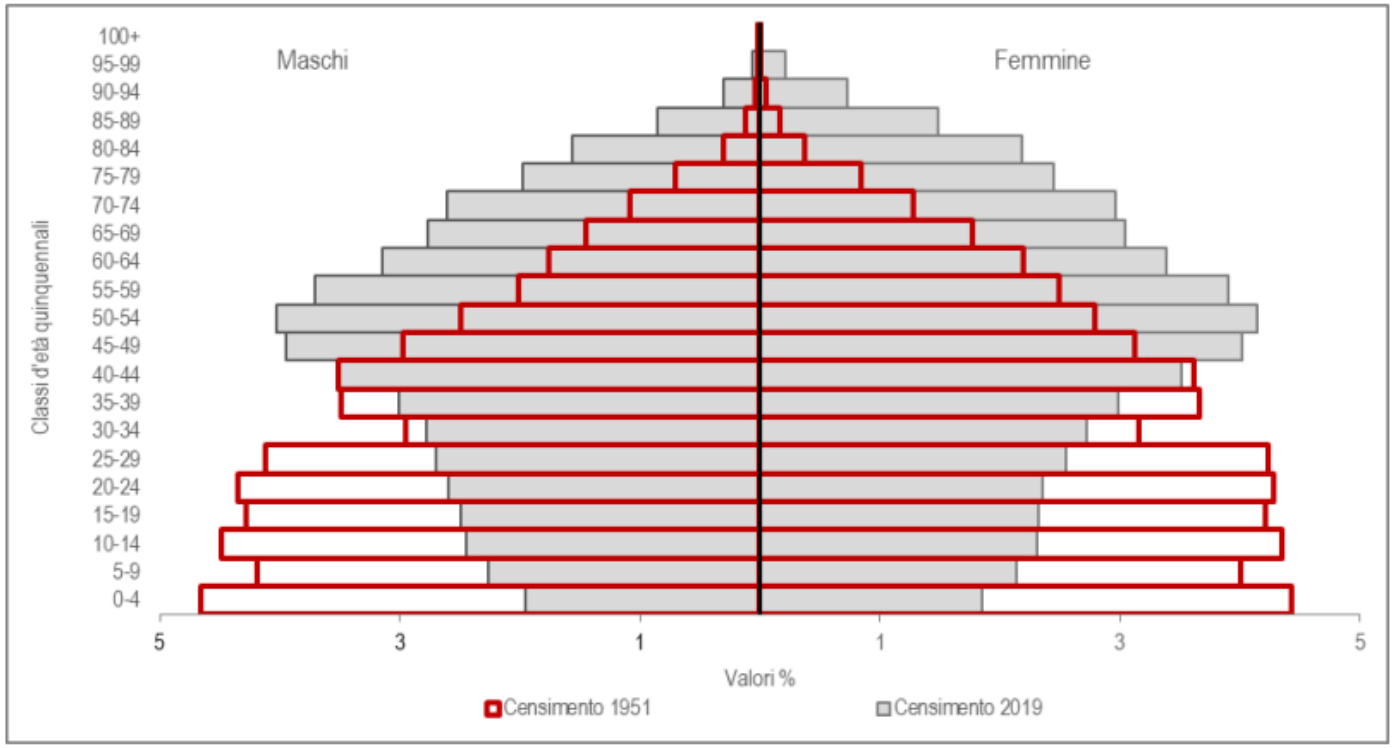
La piramide delle età

Una rappresentazione particolare è la cosiddetta piramide delle età. Si contrappongono due istogrammi che rappresentano la distribuzione della popolazione per età e genere. Otteniamo la struttura per età e sesso di una popolazione, che ci consente di osservare come si modifica una popolazione a fronte di eventi bellici, migrazioni e nascite.

La piramide delle età

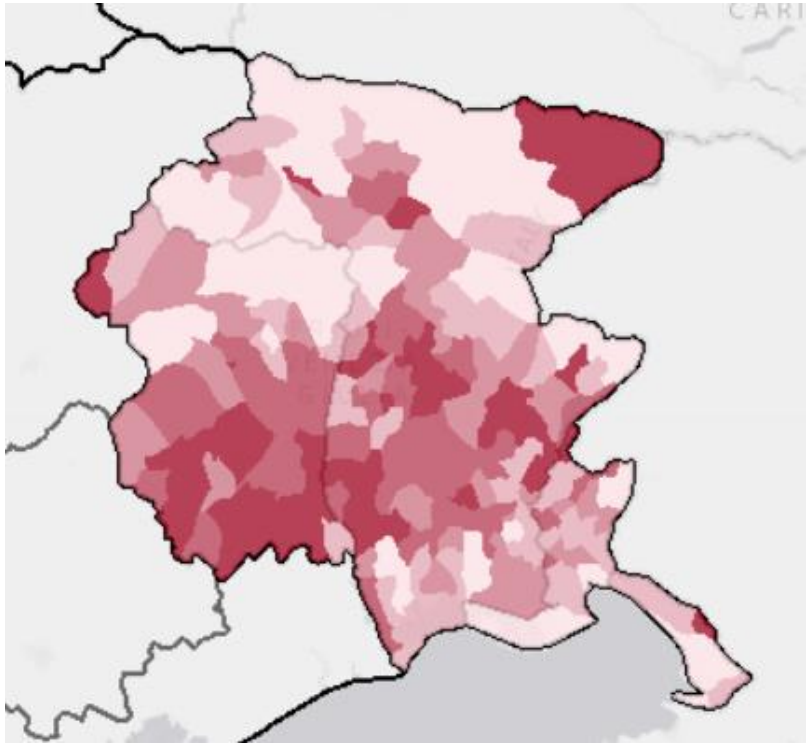
E’ molto interessante vedere com’è cambiata la popolazione in Italia dal 1951 al 2019.

FIGURA 3. PIRAMIDI DELLE ETÀ E SESSO DELLA POPOLAZIONE RESIDENTE AI CENSIMENTI. Anni 1951 e 2019



I cartogrammi

La rappresentazione grafica viene fatta sulle carte geografiche. I territori assumono colori differenti a seconda del valore che assumono le proprietà in quella partizione.



Sintetizzare le distribuzioni di frequenze

Fino ad ora abbiamo visto come possiamo sintetizzare una distribuzione di frequenze in una tabella o un grafico.

Nell'esempio dei voti dell'esame di statistica sociale abbiamo visto come questo da solo non ci consentiva di fare dei confronti.

Più in generale ci capiterà di ricorrere a valori essenziali della distribuzione per fare confronti ad esempio nel tempo, o nello spazio.

Questi valori che definiamo **valori caratteristici** si distinguono tra:

Valori centrali, o di tendenza centrale, per riassumere la distribuzione con un unico valore caratteristico.

Valori di disuguaglianza, per evidenziare le differenze tra le distribuzioni delle modalità.

I valori centrali

Più di 200 anni fa il matematico francese Augustin Louis Cauchy diede una prima spiegazione statistica dei valori centrali, definendo valore centrale quel valore non inferiore al valore minimo e non superiore al valore massimo.

Noi usiamo continuamente i valori centrali: facciamo qualche esempio?

In generale si distinguono:

Valori centrali analitici: che vengono calcolati sui valori di una variabile quantitativa attraverso operazioni algebriche.

Valori centrali non analitici: detti anche indici di posizione, che operano sulle frequenze della distribuzione.

La moda

Si definisce moda la modalità che assume la frequenza, assoluta o relativa, maggiore.

Questo valore centrale può essere calcolato su qualsiasi tipo di variabile.

Popolazione italiana di 15 anni e più per titolo di studio - Anno 2020 valori %

Titolo di studio	Freq. %
Licenza elementare o nessun titolo	15,9
Licenza di scuola media inferiore	32,2
Diploma di scuola superiore (qualifica o maturità)	**36,6**
Laurea e post laurea	15,3

Fonte: Istat, Rilevazione sulle forze di lavoro

La moda

In questo caso troviamo la moda in una mutabile sconnessa.

Popolazione residente in Italia al 1° gennaio 2022 - Valori assoluti

Ripartizione	Totale
Nord-ovest	**15.848.100**
Nord-est	11.561.676
Centro	11.740.836
Sud	13.451.861
Isole	6.380.649

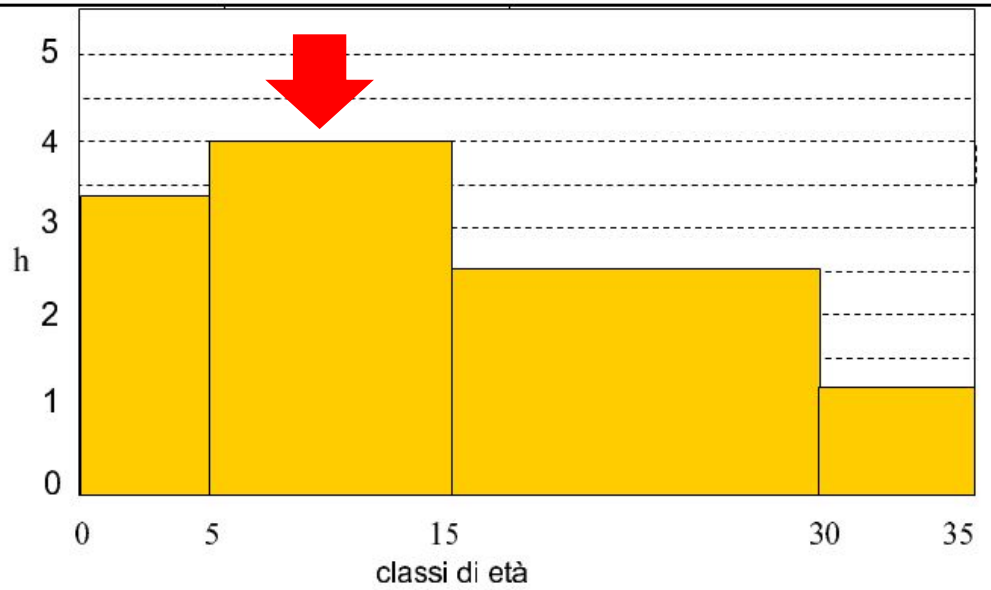
Fonte: Istat, Popolazione residente comunale per sesso anno di nascita e stato civile.

La moda

Se una distribuzione è aggregata in classi non si parlerà di moda, ma di **classe modale**.

Qualora le classi fossero di ampiezza diversa, la classe modale corrisponderà alla densità di frequenza maggiore.

classi di età	amp. classe a_j	freq. % p_j	densità h_j
0-5	5	17,0	3,4
5-15	10	40,0	4,0
15-30	15	37,0	2,5
30-35	5	6,0	1,2



La moda

La moda non sempre può essere identificata univocamente: ci possono essere due frequenze che presentano lo stesso la valore più elevato.

In questo caso si parla di distribuzione bimodale, trimodale se sono tre, ecc.

La mediana

Per le **variabili qualitative con categorie ordinate** si possono calcolare anche altri indici sintetici.

Possiamo infatti tenere conto non solo delle frequenze delle varie modalità, ma anche della loro posizione.

Un indice di posizione che possiamo utilizzare è la **mediana**, che può essere calcolata anche per le variabili quantitative.

La mediana è il valore posseduto dall'unità che si colloca nel mezzo di una distribuzione ordinata. Metà delle osservazioni hanno valori uguali o minori della mediana e metà hanno valori uguali o maggiori.

La mediana è stata introdotta dal britannico Francis Galton nel 1883.

La mediana

Come si calcola la mediana? Dobbiamo distinguere due situazioni:

- ✓ Il numero di osservazioni è dispari.
- ✓ Il numero di osservazioni è pari.

La prima cosa da fare è ordinare le osservazioni in modo crescente in base alla modalità.

Se il numero di osservazioni (N) è dispari la mediana è il valore che si colloca nella posizione centrale calcolata così: mediana = (N+1)/2

Se il numero di osservazioni è pari, invece, avremo due valori (N/2 e N/2 + 1) e la mediana, in caso di variabili quantitative, sarà la semisomma di questi due valori.

Facciamo degli esempi assieme.

La mediana

Variabile qualitativa ordinata

Titolo di studio (1 = scuola primaria, 2 = scuola media, 3 = scuola superiore, 4 = università).

Ho 13 osservazioni (numero dispari):

1, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 2

Le ordino:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4

Calcolo la mediana

(N + 1)/2 = (13+1)/2 =7

Al settimo valore ordinato corrisponde la mediana.

La mediana

Variabile qualitativa ordinata

Titolo di studio (1 = scuola primaria, 2 = scuola media, 3 = scuola superiore, 4 = università).

Ho 14 osservazioni (numero pari):

1, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 3

Le ordino:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4

Calcolo la mediana

N/2 =7 e N/2 + 1 =8

Al settimo e ottavo valore ordinato corrisponde la mediana.

La mediana

Nel caso di una variabile quantitativa, in caso di un numero pari di osservazioni, la mediana si otterrà facendo la semisomma dei valori delle due unità centrali.

Esempio (libro pag. 69 esempio 3.4) abbiamo il reddito di 8 famiglie:

1.670, 1.840, 2.005, 2.150, 2.280, 2.360, 2.510, 2.780

Le unità centrali sono la quarta e la quinta:

(N/2 =4 e N/2 + 1 =5)

La mediana è la semisomma dei due valori:

(2.150 + 2.280)/2 = 4.430/2 = 2.215

La mediana

Se N è grande, conviene utilizzare le frequenze cumulate.

La mediana si trova nella categoria dove rientra il 50%, ovvero «Diploma di scuola superiore».

Popolazione italiana di 15 anni e più per titolo di studio - Anno 2020
valori %

Titolo di studio	Freq. %	Freq. Cum.
Licenza elementare o nessun titolo	15,9	15,9
Licenza di scuola media inferiore	32,2	48,1
Diploma di scuola superiore (qualifica o maturità)	36,6	84,7
Laurea e post laurea	15,3	100

Fonte: Istat, Rilevazione sulle forze di lavoro

La mediana

Se la distribuzione quantitativa è in classi, la classe che contiene la mediana è chiamata **classe mediana**.

Possiamo però individuare un valore puntuale attraverso la seguente formula:

$Me = l_m + (0,5 – F_{m-1})/(F_m – F_{m-1})\ \Delta_m$

Dove:

l_m è il limite inferiore della classe mediana

F_{m-1} la frequenza relativa cumulata fino alla classe precedente a quella mediana

F_m è la frequenza relativa cumulata fino alla classe mediana

Δ_m è l'ampiezza della classe mediana

La mediana

Facciamo un esempio concreto $Me = l_m + (0,5 – F_{m-1})/(F_m – F_{m-1})\ \Delta_m$

Dove:

$l_m = 26$

$F_{m-1} = 0,271$

$F_m = 0,501$

$\Delta_m = 14$

$Me = 26 + (0,5 – 0,271)/(0,501-0,271)\ 14$

$Me = 39,9$

Numero di occupati per ore settimanali lavorate	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza relativa cumulata
0	1.892	0,086	0,086
1-10 ore	627	0,029	0,115
11-25 ore	3.443	0,156	0,271
26-39 ore	5.125	0,230	0,501
40 ore	7.607	0,339	0,840
41 ore e più	3.567	0,160	1,000
Totale	22.420	1,000	

La mediana

La mediana riesce a sintetizzare il centro della distribuzione di una variabile quantitativa anche in presenza di valori anomali o eccezionali.

Questa caratteristica viene chiamata **resistenza** o **robustezza**.

Torniamo all'esempio del reddito di 8 famiglie:

1.670, 1.840, 2.005, 2.150, 2.280, 2.360, 2.510, **2.780**

Mediana = 2.215 Media aritmetica = 2.199,4

1.670, 1.840, 2.005, 2.150, 2.280, 2.360, 2.510, **20.780**

Mediana = 2.215 Media aritmetica = 4.449,4

I quantili

La mediana suddivide una distribuzione ordinata in due distribuzioni che comprendono ognuna il 50% dei casi.

Questo può essere replicato costruendo un numero qualsiasi di distribuzioni parziali q, ognuna avente la q-esima parte della numerosità complessiva della distribuzione.

La modalità che si pone tra le varie distribuzioni parziali si chiama genericamente quantile.

Se q = 2 -> mediana

Se q = 3 -> terzili

Se q = 4 -> quartili

Se q = 5 -> quintili

Se q = 10 -> decili

Se q 0 100 -> centili

Le medie

Le medie sono valori centrali analitici, che possono essere calcolate solo per le distribuzioni di variabili quantitative.

La media più utilizzata è la **media aritmetica**, ma esistono anche **media geometrica**, **media quadratica** e **media armonica**.

La differenza sta nell'operazione da effettuare sui valori della variabile.

Le medie

Addizione	-> **media aritmetica**
Moltiplicazione	-> **media geometrica**
Elevazione al quadrato	-> **media quadratica**
Somma degli inversi	-> **media armonica**

La media aritmetica

La media aritmetica è la somma dei valori di una distribuzione quantitativa, divisi per il numero di osservazioni.

La formula è la seguente:

$$M(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

La media aritmetica

Supponiamo di aver raccolto i risultati degli studenti che hanno sostenuto l'esame di statistica sociale nell'anno accademico 2021-22.

Questi sono i risultati:

30, 27, 22, 24, 21, 19, 26, 18, 28, 21, 24, 22, 30, 28, 18, 19, 23, 26, 29, 27, 20, 30, 27, 26, 30, 30, 26, 24, 28, 27.

La media aritmetica sarà pari alla somma dei valori diviso per N, ovvero 30.

$M(x) = 750/30 = 25$

Voto 2021/22	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
18	2	0,06667	6,666667
19	2	0,06667	6,666667
20	1	0,03333	3,333333
21	2	0,06667	6,666667
22	2	0,06667	6,666667
23	1	0,03333	3,333333
24	3	0,1	10
25	0	0	0
26	4	0,13333	13,33333
27	4	0,13333	13,33333
28	3	0,1	10
29	1	0,03333	3,333333
30	5	0,16667	16,66667
Totale	30	1	100

Voto 2020/21	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
18	2	0,04	4
19	4	0,08	8
20	2	0,04	4
21	3	0,06	6
22	3	0,06	6
23	5	0,1	10
24	4	0,08	8
25	3	0,06	6
26	6	0,12	12
27	4	0,08	8
28	5	0,1	10
29	3	0,06	6
30	6	0,12	12
Totale	50	1	100

Come possiamo procedere?

Ho a disposizione la distribuzione di frequenze, posso calcolare la media aritmetica in modo semplice.

Moltiplico i valori (voti) per le loro frequenze assolute. (Ad es. 18 X 2 + 19 X 2 + … + 30 X 5)

Successivamente sommo i prodotti che ho ottenuto.

Infine divido per il numero dei casi.

Nel 2021/2022 la media aritmetica era 25,0

Nel 2020/2021 la media aritmetica era 24,8