La somma ed il prodotto di frazioni o numeri razionali

$$+_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad \cdot_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

definite rispettivamente da

$$\frac{m}{n} +_{\mathbb{Q}} \frac{p}{q} =: \frac{m \cdot_{\mathbb{Z}} q +_{\mathbb{Z}} n \cdot_{\mathbb{Z}} p}{n \cdot_{\mathbb{Z}} q}$$

e da

$$\frac{m}{n} \cdot_{\mathbb{Q}} \frac{p}{q} =: \frac{m \cdot_{\mathbb{Z}} p}{n \cdot_{\mathbb{Z}} q}$$

sono estensioni delle medesime operazioni definite in $\mathbb{Z}$ e risultano ben definite.

Per semplicità di notazione, si eviterà di indicare il pedice per le operazioni di somma e prodotto.

Se identifichiamo $\frac{m}{1}$ con $m \in \mathbb{Z}$, allora

$$\frac{m}{1} + \frac{p}{1} = \frac{m+p}{1 \cdot 1} = \frac{m+p}{1}$$

e inoltre

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{p}{1} = \frac{m \cdot p}{1 \cdot 1} = \frac{m \cdot p}{1};$$

pertanto la somma e il prodotto definite in $\mathbb{Q}$ sono estensioni della somma e del prodotto definite in $\mathbb{Z}$.

Inoltre se $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, ossia se

$$m \cdot n' = m' \cdot n \tag{1}$$

e

$$p \cdot q' = p' \cdot q \tag{2}$$

allora

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} + \frac{p}{q} &= \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q} \\
&= \frac{q'(m \cdot q + n \cdot p)}{q' \cdot n \cdot q} = \frac{q' \cdot m \cdot q + q' \cdot p \cdot n}{q' \cdot n \cdot q} \\
&= \frac{q' \cdot m \cdot q + p' \cdot q \cdot n}{q' \cdot n \cdot q} && \text{per la (2)} \\
&= \frac{q \cdot (m \cdot q' + p' \cdot n)}{q' \cdot n \cdot q} \\
&= \frac{m \cdot q' + p' \cdot n}{q' \cdot n} \\
&= \frac{n' \cdot (m \cdot q' + p' \cdot n)}{n' \cdot q' \cdot n} = \frac{n' \cdot m \cdot q' + n' \cdot p' \cdot n}{n' \cdot q' \cdot n} \\
&= \frac{n \cdot m' \cdot q' + p' \cdot n \cdot n'}{n' \cdot n \cdot q'} && \text{per la (1)} \\
&= \frac{m' \cdot q' + p' \cdot n'}{q' \cdot n'} = \frac{m'}{n'} + \frac{p'}{q'}
\end{aligned}$$

Infine si osservi che per ogni $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si ha $\dfrac{0}{q} = \dfrac{0}{1}$ e quindi

$$\frac{m}{n} + \frac{0}{q} = \frac{m}{n};$$

analogamente $\dfrac{1}{1} = \dfrac{p}{p}$ per ogni $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e quindi

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{p} = \frac{m}{n}.$$

Inoltre se $m \neq 0$, risulta

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{1}{1},$$

ossia il reciproco di $\dfrac{m}{n}$ è $\dfrac{n}{m}$.