8 Ottobre

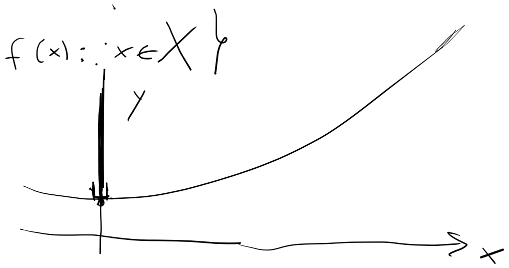
La scorsa volta l'ultimo teorema:

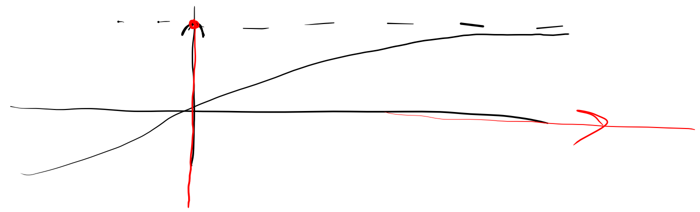
Teor (limiti di funzioni monotone) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ monotona. Allora $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

1) Se $f$ è crescente,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup f(X)$$

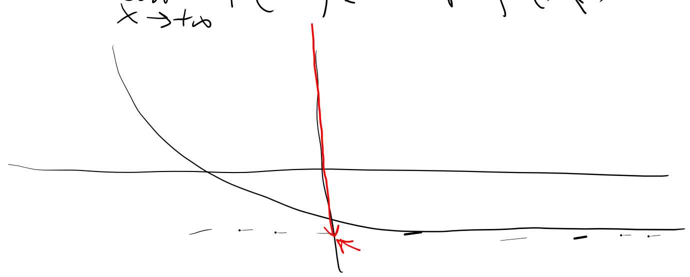
dove $f(X) = \{ f(x) : x \in X \}$



2) Se $f$ è decrescente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf f(X)$$



Osservazione Abbiamo dimostrato 1)

Dim 2 assumendo 1). Sia $f : X \to \mathbb{R}$ decrescente. Allora $g(x) = -f(x)$ è crescente

$$\overset{\text{per (1)}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} g(x) = \sup g(X).$$

$$\lim_{x \to +\infty} -f(x) = \sup(-f(X)) = \{ -f(x) : x \in X \}$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\inf f(X)$$

Teor (Numero di Nepero) La successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è crescente. Denotiamo il suo limite con la lettera "e"

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Osservazione $2 < e < 3$ $\qquad e = 2{,}718\ldots$

Dim La dimostrazione si basa su una disuguaglianza che dimostreremo più avanti.

Lemma Dati $x_1, \ldots, x_n$ numeri $\geq 0$ chiamiamo

$\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ la loro media aritmetica

$\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$ geometrica.

Risulta che

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

con l'uguaglianza valida se e solo se $x_1=\cdots=x_n$

D

Continuazione della dimostrazione del teorema

Vogliamo dimostrare

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \forall n\geq 1$$

Definiamo

$x_1 = 1, \qquad x_2 = x_3 = \cdots = x_{n+1} = 1+\frac{1}{n}$

$$(x_1 x_2 \cdots x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} = (x_2\cdots x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}{n+1} = \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{1+(n+1)}{n+1}$$

$$= 1+\frac{1}{n+1}$$

Ora usiamo il lemma:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} < 1+\frac{1}{n+1}$$

$\Updownarrow$ innalzando alla $n+1$ potenza

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \checkmark$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \qquad \forall n>1$$

se $n>1$

$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \forall n$

$\Rightarrow e > 2$.

## Funzioni

**Def** Dati due insiemi $X$ e $Y$ una funzione $f$ definita in $X$ a valori in $Y$, e si scrive $f: X \to Y$, o $X \xrightarrow{f} Y$, è un criterio che ad ogni $x \in X$ associa un elemento, e solo uno, di $Y$, che di solito viene denotato con $f(x)$ o con $y$.

**Def** $f: X \to Y$ si dice iniettiva se

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

e si dice suriettiva se $\forall\, y \in Y \ \exists\, x \in X$ t.c. $y = f(x)$.

Se $f: X \to Y$ è sia iniettiva che suriettiva si dice che è biettiva.

**Def** Data una funzione biettiva $f: X \to Y$ è possibile definire una nuova funzione, che si chiama la funzione inversa

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X,$$

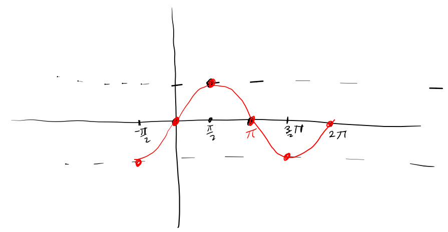
nel seguente modo: io so che siccome $f: X \to Y$ è biettiva $\forall\, y \in Y \ \exists!\, x \in X$ t.c. $y = f(x)$.

Allora pongo $f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$

$$\begin{tikzcd} x \in [0,+\infty) \arrow[r, "f(x)=x^2"] & y = x^2 \in [0,+\infty) \arrow[l, bend left, "f^{-1}(y)=\sqrt{y}"] \end{tikzcd}$$

Esempi

$\sin(x)$




$\sin(x)$ è periodico di periodico $2\pi$

cioè $\quad \text{sen}(x+2\pi) = \sin(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

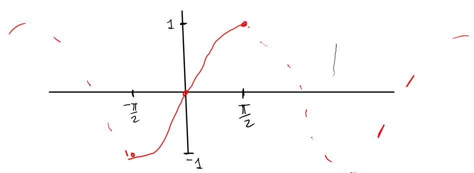
<u>Def</u> Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $T > 0$. Supponiamo ~~the~~ che $X$ sia tale se $x \in X$ allora $x + nT \in X$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Allora $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo $T$ se $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in X$.

$\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è né iniettiva né suriettiva

perché $\sin(n\pi) = 0 \quad \forall\, n$ (quindi non è iniettiva)

e non è suriettiva perché se $|y| > 1$ allora non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ t.c. $\sin x = y$.




$\text{sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ è biettiva.

Esiste dunque ~~la~~ funzione inversa

arcosin : $[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

<u>Def</u> Data $f : X \to Y$ il grafico di $f$

$$G_f = \{(x,y) \in X \times Y : \ y = f(x),\ x \in X\}$$
$$= \{(x, f(x)) \in X \times Y : \ x \in X\}$$

Se $f$ è biettiva esiste $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

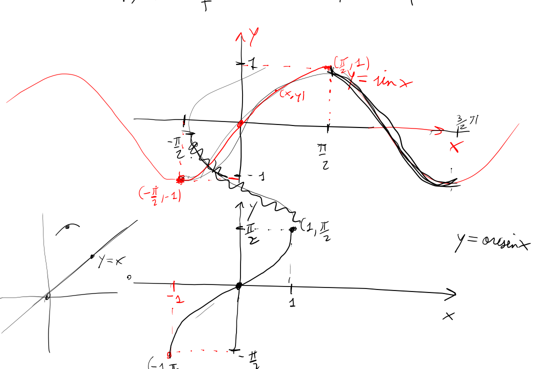
$$G_{f^{-1}} = \{(y,x) \in Y \times X : \ x = f^{-1}(y),\ y \in Y\}$$

Sappiamo che $\quad x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x)$

$$G_{f^{-1}} = \{(y,x) \in Y \times X : \ y = f(x),\ x \in X\}$$

Si ritrova che

$$(y,x) \in G_{f^{-1}} \Longleftrightarrow (x,y) \in G_f.$$



Esercizio $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste

Esercizio Sia $f : X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}$

$f$ periodica di periodo $T > 0$

e sia $f$ non una funzione costante.

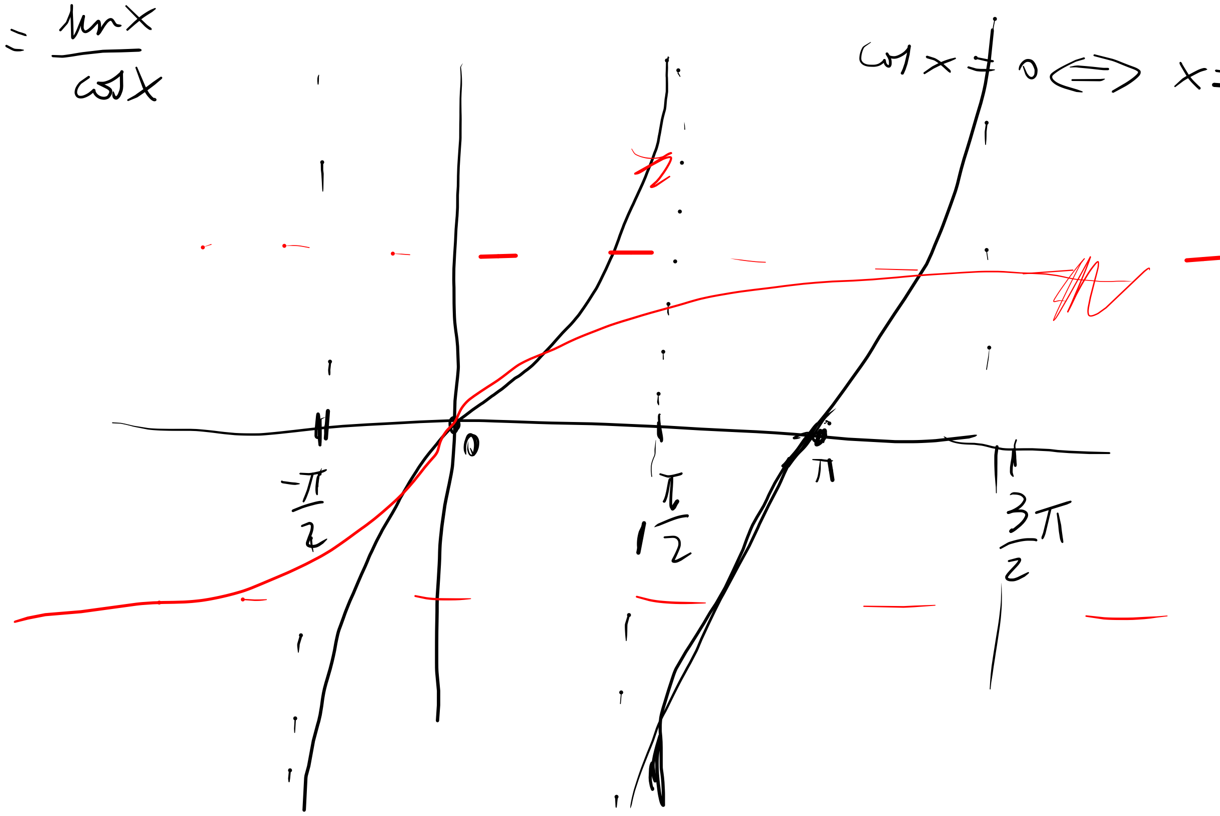
1) Dimostrare che $\sup X = +\infty$

$\inf X = -\infty$

2) Dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste

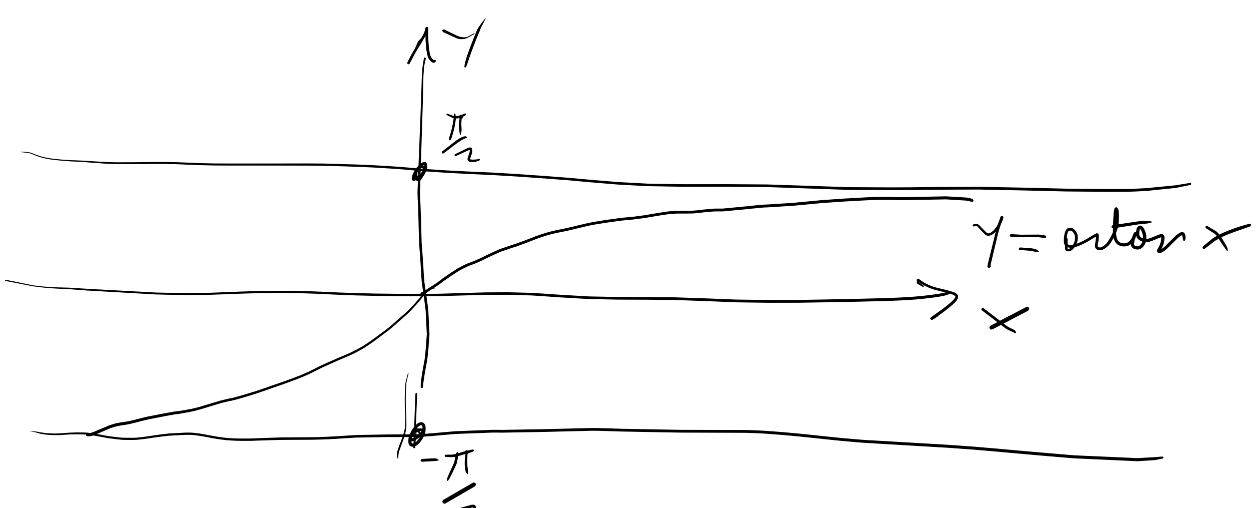
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ è periodica di periodo $\pi$

$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$




$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ è biettiva

arctan



$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)=?$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)\frac{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}+(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}+(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{(\cancel{x^2}+\cancel{1})-(\cancel{x^2}+x+\cancel{1})}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}+(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$(x^2+1)^{\frac{2}{3}}=\left(x^2(1+x^{-2})\right)^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{4}{3}}(1+x^{-2})^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{-x}{x^{\frac{4}{3}}(1+x^{-2})^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}(1+x^{-2})^{\frac{1}{3}}(1+x^{-1}+x^{-2})^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{3}}(1+x^{-1}+x^{-2})^{\frac{2}{3}}}$$

$$\xrightarrow{x\to+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^{\frac{4}{3}}\,3}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{3}=0$$