Integrazione in più variabili

prima parte — Kurzweil-Henstock style

1 L'integrale alla Kurzweil-Henstock in dimensione maggiore

Per prima cosa richiamiamo la definizione di integrale alla Kurzweil-Henstock per funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo limitato.

Data una suddivisione dell'intervallo $I = [a, b]$, ovvero un insieme finito di elementi

$$D := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m\} ,$$

dove

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b ,$$

consideriamo i sottoinsiemi

$$I_1 = [x_0, x_1] , \qquad I_2 = [x_1, x_2] , \qquad \dots , \qquad I_{m-1} = [x_{m-2}, x_{m-1}] , \qquad I_m = [x_{m-1}, x_m] .$$

Per ogni intervallo I_k con $k \in \{1, \dots, m\}$ scegliamo un elemento $\xi_k \in I_k$. Definiremo P-partizione dell'intervallo I un insieme del tipo

$$\mathcal{P} = \{(\xi_1, I_1) , (\xi_2, I_2) , \dots , (\xi_{m-1}, I_{m-1}), (\xi_m, I_m)\} ,$$

dove gli intervalli I_k e i punti ξ_k sono introdotti secondo la procedura sopra esposta. Si noti che I è l'unione di tutti gli intervalli I_k con k che va da 1 a m. Possiamo denotare con $\mu(I_k)$ la lunghezza dell'intervallo I_k. Ovviamente vale $\mu(I_k) = x_k - x_{k-1}$.

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ e Π una P-partizione di I, si introduce la **somma di Riemann**

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{m} f(\xi_k)\, \mu(I_k) .$$

Ricordiamo che si dice **calibro** su I una funzione positiva $\delta : I \to \mathbb{R}$. Dato un calibro δ, una P-partizione Π si dirà **δ-fine** se per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$ avremo

$$\xi_k - x_{k-1} \le \delta(\xi_k) \qquad \text{e} \qquad x_k - \xi_k \le \delta(\xi_k)$$

oppure equivalentemente

$$I_k \subseteq [\xi_k - \delta(\xi_k) , \xi_k + \delta(\xi_k)] .$$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dirà integrabile su I (secondo Kurzweil-Henstock) se esiste un numero reale $\mathcal{J}$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro δ su I tale che per ogni P-partizione δ-fine $\mathcal{P}$ su I vale

$$|S(f, \mathcal{P}) - \mathcal{J}| < \varepsilon .$$

Vediamo ora come la precedente definizione si può adattare al caso di funzioni definite su rettangoli $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Definiamo misura di un rettangolo I il valore $\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. Diremo che due rettangoli sono *non sovrapposti* se i loro interni sono disgiunti. Definiamo P-partizione del rettangolo I un insieme del tipo

$$\mathcal{P} = \{(\xi_1, I_1) , (\xi_2, I_2) , \dots , (\xi_{m-1}, I_{m-1}), (\xi_m, I_m)\} ,$$

dove gli insieme I_k sono rettangoli tali che la loro unione coincide con il rettangolo I e sono a due a due non sovrapposti; mentre abbiamo che $\xi_k \in I_k$ per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$.

La nozione di somma di Riemann a questo punto è analoga alla precedente: data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ e Π una P-partizione di I, abbiamo la somma di Riemann

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{m} f(\xi_k)\, \mu(I_k) .$$

Dato $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ e $d > 0$, denotiamo con $B[\xi, d]$ le palle chiuse *quadrate* della norma infinito:

$$B[\xi, d] = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|x - \xi\|_\infty \le d\} = [\xi_1 - d, \xi_1 + d] \times [\xi_2 - d, \xi_2 + d]\,.$$

Im questo contesto, dato un calibro $\delta : I \to \mathbb{R}$, una P-partizione Π si dirà δ-**fine** se per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$ avremo

$$I_k \subseteq B[\xi_k, \delta(\xi_k)]\,.$$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dirà integrabile su I (secondo Kurzweil-Henstock) se esiste un numero reale $\mathcal{J}$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro δ su I tale che per ogni P-partizione δ-fine $\mathcal{P}$ su I vale

$$|S(f, \mathcal{P}) - \mathcal{J}| < \varepsilon\,.$$

Anche in questo caso vale il criterio di Cauchy, ovvero una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro $\delta : I \to \mathbb{R}$ tale che, prendendo due partizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ di I, entrambe δ-fini, si ha

$$|S(f, \mathcal{P}) - S(f, \mathcal{P}')| < \varepsilon\,.$$

Per denotare l'integrale spesso vengono usate le seguenti notazioni:

$$\int_I f\,, \qquad \iint_I f\,, \qquad \iint_I f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Esempio 1.1. *Sia $f : I = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) = g(x)$ dove la funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, b]$ allora f è integrabile su I e vale*

$$\iint_I f(x, y)\, dxdy = (d - c) \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Diamo ora un'interpretazione grafica della nozione di integrale. Consideriamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ integrabile, tale che $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in I$ e definiamo l'insieme

$$T = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in I\,, 0 \le z \le f(x, y)\big\}\,, \tag{1}$$

ovvero la regione di spazio sotto il grafico di f. L'integrale di f su I è il valore del volume di T.

Con procedura analoga a quanto visto nel caso di funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è possibile introdurre la nozione di integrale secondo Riemann mediante calibri costanti $\delta(x) \equiv \delta$ e provare il seguente teorema per funzioni definite su rettangoli I.

Teorema 1.2. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua allora f è integrabile.*

Molte delle proprietà viste per gli integrali di Riemann per funzioni con dominio contenuto in $\mathbb{R}$, continuano a valere per funzioni definite su rettangoli.

Proposizione 1.3 (Linearità dell'integrale). *Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrabili vale*

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \left(\int_I f \right) + \mu \left(\int_I g \right)\,.$$

Quindi l'insieme delle funzioni integrabili su I, risulta uno spazio vettoriale e l'applicazione di integrazione definita come $I(f) = \int_I f$ è un'applicazione lineare.

Proposizione 1.4 (Monotonia dell'integrale). *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrabili tali che $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in I$. Allora*

$$\int_I f \le \int_I g\,.$$

Esercizio 1.5. *Scrivere la dimostrazione delle Proposizioni precedenti ispirandosi alle dimostrazioni degli enunciati analoghi visti nel corso di analisi precedente.*

2 Insiemi misurabili

Definizione 2.1. *Consideriamo* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *limitato e una funzione* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Sia* I *un rettangolo che contenga* Ω *e definiamo l'estensione a zero di* f *come*

$$\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}\,, \qquad \widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & se\ (x,y) \in \Omega\,, \\ 0 & se\ (x,y) \notin \Omega\,. \end{cases}$$

Diremo che f *è* **integrabile su** Ω *se la sua estensione* $\widetilde{f}$ *è integrabile su* I, *ponendo*

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{I} \widetilde{f}(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Osservazione 2.2. *La scelta di* I *non influenza il valore dell'integrale.*

Obiettivo ora è rispondere alla domanda: "Quali insiemi Ω ha senso considerare? Ci sono insiemi su cui non è *opportuno* fare integrali?".

Intuitivamente, reputeremmo non adatto un insieme Ω tale che nemmeno le funzioni costanti risultino integrabili su questo insieme. In particolare la funzione costantemente uguale a 1. La prossima definizione è un'immediata conseguenza di questo ragionamento.

Definizione 2.3 (Insiemi misurabili)**.** *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *limitato contenuto in un rettangolo* I. *Diremo che* Ω *è misurabile se la* funzione caratteristica di Ω

$$\chi_{\Omega} : I \to \mathbb{R}\,, \quad \chi_{\Omega}(x,y) = \begin{cases} 1 & se\ (x,y) \in \Omega \\ 0 & se\ (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

è integrabile su I. *Definiamo* **misura di** Ω *il valore*[1]

$$\text{Area}(\Omega) = |\Omega| = m(\Omega) = \iint_{\Omega} 1\,dx\,dy = \iint_{Q} \chi_{\Omega}\,dx\,dy\,.$$

Osservazione 2.4. *Nella definizione precedente è equivalente chiedere che la funzione costante* $f(x,y) = 1$ *è integrabile su* Ω. *In questo caso, infatti l'estensione* $\widetilde{f}$ *coincide proprio con* χ_{Ω}.

Esempio 2.5. *Ovviamente i rettangoli* $Q = [a,b] \times [c,d]$ *sono insiemi misurabili e vale* $|Q| = (b-a)(d-c)$.

Definizione 2.6 (Insieme di misura nulla o trascurabile)**.** *Un insieme* E *limitato si dice di misura nulla oppure trascurabile se è misurabile e vale* $|E| = 0$.

Teorema 2.7 (Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla)**.** *Sia* $E \subset \mathbb{R}^2$ *limitato. L'insieme* E *ha misura nulla se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una famiglia* **finita o numerabile** *di rettangoli* $(J_k)_{k \in K}$ *(dove* $K \subset \mathbb{N}$*) tale che*

$$E \subseteq \bigcup_{k \in K} J_k\,, \qquad \sum_{k \in K} |J_k| < \varepsilon.$$

Esempio 2.8.

- *Un numero finito di punti forma un insieme di misura nulla.*
- *Dato un insieme di misura nulla, tutti i suoi sottoinsiemi hanno misura nulla.*
- *Un sottoinsieme limitato di una retta (es. un segmento) ha misura nulla.*
- *L'unione* **numerabile** *di insiemi di misura nulla ha misura nulla. Quindi* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ *ha misura nulla.*
- *La regione di piano delimitata da un poligono è un insieme misurabile.*

Definizione 2.9 (Quasi ovunque)**.** *Sia* E *un insieme limitato. Una proposizione è vera* quasi ovunque *su* E *(o per quasi ogni* $x \in E$*) se l'insieme dei punti in cui non è vera è un insieme trascurabile.*

[1] Qui forniamo diverse possibili notazioni per la misura (sostanzialmente l'area) dell'insieme Ω usate in letteratura.

Proposizione 2.10 (Linearità dell'integrale)**.** *Per ogni* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *e* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrabili vale*

$$\int_\Omega (\lambda f + \mu g) = \lambda \left(\int_\Omega f \right) + \mu \left(\int_\Omega g \right).$$

Proposizione 2.11 (Monotonia dell'integrale)**.** *Siano* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrabili tali che* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in \Omega$*. Allora*

$$\int_\Omega f \leq \int_\Omega g .$$

Teorema 2.12 (Teorema della media integrale)**.** *Sia* Ω *misurabile limitato, con* $|\Omega| \neq 0$*, e una funzione* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *limitata con* $m = \inf_\Omega f$ *e* $M = \sup_\Omega f$*. Allora*

$$m \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f \leq M .$$

Dimostrazione. Preso un rettangolo $Q \supset \Omega$, valendo $m\chi_\Omega \leq \widetilde{f} \leq M\chi_\Omega$, segue dalla monotonia dell'integrale che $m|\Omega| \leq \int_\Omega f \leq M|\Omega|$, da cui la tesi. □

Corollario 2.13. *Sia* $\overline{\Omega}$ *insieme chiuso misurabile limitato, con* $|\Omega| \neq 0$*, e una funzione* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *continua. Allora esiste* $\xi \in \overline{\Omega}$ *tale che*

$$f(\xi) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f .$$

3 Integrazione in $N \geq 3$ dimensioni

Vediamo ora come la precedente definizione si può adattare al caso di funzioni definite su insiemi del tipo

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_N, b_N] ,$$

che chiameremo *rettangoli*. Definiamo misura di un rettangolo I il valore

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_N - a_N) .$$

Diremo che due rettangoli di questo tipo sono *non sovrapposti* se i loro interni sono disgiunti. Definiamo P-partizione dell'insieme I un insieme del tipo

$$\mathcal{P} = \{(\xi_1, I_1), (\xi_2, I_2), \dots, (\xi_{m-1}, I_{m-1}), (\xi_m, I_m)\} ,$$

dove gli insiemi I_k sono rettangoli tali che la loro unione coincide con il rettangolo I e sono a due a due non sovrapposti; mentre abbiamo che $\xi_k \in I_k$ per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$.

La nozione di somma di Riemann a questo punto è analoga alla precedente: data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ e Π una P-partizione di I, abbiamo la somma di Riemann

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{m} f(\xi_k)\, \mu(I_k) .$$

Dato $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdot, xi_N) \in \mathbb{R}^N$ e $d > 0$, denotiamo con $B[\xi, d]$ le palle chiuse *quadrate* della norma infinito:

$$B[\xi, d] = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - \xi\|_\infty \leq d\} = [\xi_1 - d, \xi_1 + d] \times [\xi_2 - d, \xi_2 + d] \times \cdots \times [\xi_N - d, \xi_N + d] .$$

In questo contesto, dato un calibro $\delta : I \to \mathbb{R}$, una P-partizione Π si dirà δ-**fine** se per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$ avremo

$$I_k \subseteq B[\xi_k, \delta(\xi_k)] .$$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dirà integrabile su I (secondo Kurzweil-Henstock) se esiste un numero reale $\mathcal{J}$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro δ su I tale che per ogni P-partizione δ-fine $\mathcal{P}$ su I vale

$$|S(f, \mathcal{P}) - \mathcal{J}| < \varepsilon .$$

Anche in questo caso vale il criterio di Cauchy, ovvero una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un calibro $\delta : I \to \mathbb{R}$ tale che, prendendo due partizioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ di I, entrambe δ-fini, si ha

$$|S(f, \mathcal{P}) - S(f, \mathcal{P}')| < \varepsilon \, .$$

Le notazioni in questo caso sono:

$$\int_I f \, , \qquad \int_I f(x) \, dx \, , \quad \int_I f(x_1, \ldots, x_N) \, dx_1 \cdots dx_N \, ,$$

in particolare, se $N = 3$,

$$\iiint_I f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \, .$$

A questo punto si può proseguire come sopra definendo l'integrabilità di funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.

4 Gli integrali secondo...

Abbiamo visto in precedenza l'integrale secondo Kurzweil-Henstock e la sua definizione. In questa sezione scriveremo che una funzione $f : I \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è KH-integrabile se è integrabile secondo la definizione vista in precedenza.

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dirà **R-integrabile (integrabile secondo Riemann)** se esiste un numero reale $\mathcal{J}$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste **una costante positiva** δ tale che per ogni P-partizione δ-fine $\mathcal{P}$ su I vale

$$|S(f, \mathcal{P}) - \mathcal{J}| < \varepsilon \, .$$

L'unica differenza con la KH-integrabilità consiste nel dover scegliere funzioni calibro costanti. Tale richiesta è quindi più restrittiva. Quindi abbiamo

$$f \text{ è R-integrabile} \quad \Rightarrow \quad f \text{ è KH-integrabile} \, .$$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ che sia KH-integrabile si dirà **L-integrabile (integrabile secondo Lebesgue)** se anche la funzione $|f|$ è KH-integrabile. Ovviamente abbiamo

$$f \text{ è L-integrabile} \quad \Rightarrow \quad f \text{ è KH-integrabile} \, .$$

Queste definizioni presentano vantaggi in certi casi e svantaggi in altri. L'uso della nozione di R-integrabilità permette di avere una costruzione più semplice di alcune dimostrazioni. Tuttavia perdiamo la possibilità di ottenere particolari risultati di *analisi avanzata*. In altre situazioni siamo costretti ad ipotesi più restringenti al fine di ottenere teoremi che nel contesto delle funzioni KH-integrabili non sono necessarie.

A titolo di esempio vediamo alcuni confronti.

Teorema 4.1 (Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla secondo Kurzweil-Henstock)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ limitato. L'insieme E ha misura nulla se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia* **finita o numerabile** *di rettangoli $(J_k)_{k \in K}$ (dove $K \subset \mathbb{N}$) tale che*

$$E \subseteq \bigcup_{k \in K} J_k \, , \qquad \sum_{k \in K} |J_k| < \varepsilon.$$

Teorema 4.2 (Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla secondo Riemann)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ limitato. L'insieme E ha misura nulla se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia* **finita** *di rettangoli $J_1, \ldots, J_N$ tale che*

$$E \subseteq \bigcup_{k=0}^{N} J_k \, , \, , \qquad \sum_{k=0}^{N} |J_k| < \varepsilon.$$

La misura nella teoria

Osservazione 4.3. *L'insieme $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ è KH-misurabile e ha misura nulla, mentre non è R-misurabile.*

Osservazione 4.4. *La teoria dell'integrale secondo Riemann funziona bene solo per funzioni limitate.*

Osservazione 4.5. *Data una funzione* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *R-integrabile, per ogni sottinsieme* $\Omega' \subseteq \Omega$ *la restrizione* $f : \Omega' \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *è R-integrabile.*

Tale affermazione non vale per funzioni KH-integrabili

La misura introdotta mediante l'integrale alla Riemann prende il nome di Misura di Peano Jordan. Trattando funzioni R-integrabili potremmo ottenere il seguente enunciato

Teorema 4.6. *Un insieme è misurabile secondo Peano Jordan se e solo se la sua frontiera ha misura nulla.*

Trattando funzioni KH-integrabili, la nozione di misura che ne consegue non ci permette di concludere con un teorema come il precedente infatti abbiamo appena visto che $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è KH-misurabile con misura nulla, ma la sua frontiera è tutto l'intervallo $[0,1]$ che ha misura 1.

Vediamo ora un vantaggio che possiamo avere utilizzando la teoria delle funzioni KH-integrabili rispetto a quella delle funzioni R-integrabili. Mettiamo a confronto i teoremi di riduzione in questi due contesti (vedremo più avanti nel corso la dimostrazione nel caso delle funzioni R-integrabili).

Teorema 4.7 (Teorema di Riduzione per funzioni KH-integrabili)**.** *Sia* $f : I = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *una funzione KH-integrabile.* **Allora:**

- *per quasi ogni* $x \in [a,b]$ *la funzione* $f(x,\cdot)$ *è integrabile su* $[c,d]$*;*
- *la funzione* $H(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ *è definita quasi ovunque su* $[a,b]$ *ed è integrabile su questo intervallo;*
- *Vale*
$$\iint\limits_I f = \int_a^b H(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Teorema 4.8 (Teorema di Riduzione per funzioni R-integrabili)**.** *Sia* $f : I = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$*, una funzione R-integrabile.* **Se** *per ogni* $x \in [a,b]$ *la funzione* $f(x,\cdot)$ *è integrabile su* $[c,d]$ **allora** *la funzione* $H(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ *è integrabile su* $[a,b]$ *e vale*
$$\iint\limits_Q f = \int_a^b H(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx\,. \tag{2}$$

Molti altri teoremi più raffinati dal punto di vista matematico possono essere ottenuti con meno difficoltà, o addirittura utilizzando la teoria della funzioni KH-integrabili possono essere ottenuti risultati non raggiungibili mediante la teoria della funzioni R-integrabili.