

# Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

## Tutorato 3 - Numeri complessi - 08/10/2024

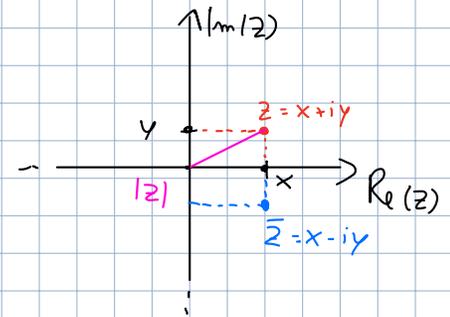
### Richiamo

- Scriviamo un numero complesso  $z \in \mathbb{C}$  nella sua forma algebrica

$$\underline{z = x + iy}, \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } \underline{i \text{ unit\`a immaginaria}} \text{ che soddisfa } \underline{i^2 = -1}.$$

Si pu\`o anche scrivere  $x = \operatorname{Re}(z)$  e  $y = \operatorname{Im}(z)$  ( $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ ).

- Lo possiamo rappresentare come un punto nel piano di Gauss



- $\bar{z} = x - iy$  complesso coniugato

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  modulo di z

↳ ovvero la distanza da 0 nel piano di Gauss.

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$  → pu\`o essere utile nelle equazioni e nello scrivere in forma algebrica numeri complessi con "i" al denominatore. Infatti:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} \rightarrow |z_2|^2 \text{ \u2192 solo reale!}$$

$$\left. \begin{array}{l} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow i^{4+K} = i^K \quad \forall K \in \mathbb{N}$$

## ESERCIZI

### Es. 1

Scrivere somma e prodotto di  $z_1 = 1 + 2i$  e  $z_2 = 3 - i$  in forma algebrica.

### Es. 2

Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

i)  $\frac{i}{i+1}$

ii)  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

### Es. 3

Disegnare sul piano di Gauss i seguenti insiemi di numeri complessi

i)  $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2 - 2i| \leq 2, |z - 3 - 2i| \geq 1 \right\}$

ii)  $B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leq 1, \operatorname{Im}(z^2) \leq 2 \right\}$

### Es. 4

Risolvere le equazioni in campo complesso:

i)  $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$

ii)  $(1+i)z + (1+2i)\bar{z} + 3 - i = 0$

### Es. 5 (esame 31/01/2020, fila A, es. 4i, corso di Matematica e Fisica)

Si determinino tutti i numeri complessi  $z$  tali che

$$\bar{z} z^2 + |z|^2 = 2z$$

# SOLUZIONI

## Es. 1

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 3 - i$$

$$\bullet z_1 + z_2 = 1 + 2i + 3 - i = 4 + i \rightarrow \operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 4, \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 1$$

$$\bullet z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (3 - i) = 3 - i + 6i - 2i^2 \\ = 3 - i + 6i + 2 = 5 + 5i \rightarrow \operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) = 5, \operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2) = 5$$

## Es. 2

$$\text{i)} \frac{i}{i+1} = \frac{i}{i+1} \cdot 1 = \frac{i}{i+1} \cdot \frac{i-1}{i-1} = \frac{i(i-1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{i^2 - i}{i^2 - 1^2} = \frac{-1 - i}{-1 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{i}{i+1}\right) = \frac{1}{2}, \operatorname{Im}\left(\frac{i}{i+1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii)} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = \left[\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right]^2 = \left[\frac{(1+i)^2}{1^2 - i^2}\right]^2 = \left[\frac{(1+i)^2}{1+1}\right]^2 = \frac{(1+i)^4}{2^2} \\ = \frac{1^4 + i^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot i + 4 \cdot 1 \cdot i^3 + 6 \cdot 1^2 \cdot i^2}{4} = \frac{1+1 + \cancel{4i} - \cancel{4i} - 6}{4} = -1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) = -1, \operatorname{Im}\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right) = 0$$

### Es. 3

$$i) A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2 - 2i| \leq 2, |z - 3 - 2i| \geq 1 \right\}$$

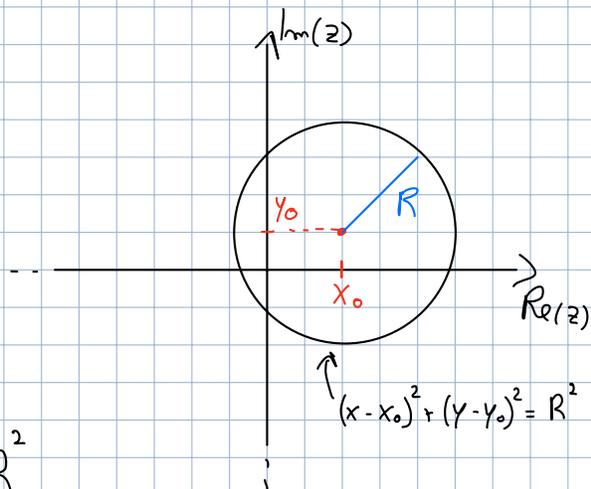
Notiamo che un insieme del tipo  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$  non è altro che una circonferenza centrata in  $z_0$  e di raggio  $R$  nel piano di Gauss. Questo si può anche vedere passando per la forma algebrica:

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

$$|z - z_0| = |x - x_0 + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Dunque elevando al quadrato otteniamo:

$$|z - z_0| = R \Rightarrow |z - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



Quindi una regione del tipo  $\{|z - z_0| \leq R\}$  è il cerchio contenuto nella circonferenza, mentre una del tipo  $\{|z - z_0| \geq R\}$  è la regione esterna, al di fuori della circonferenza.

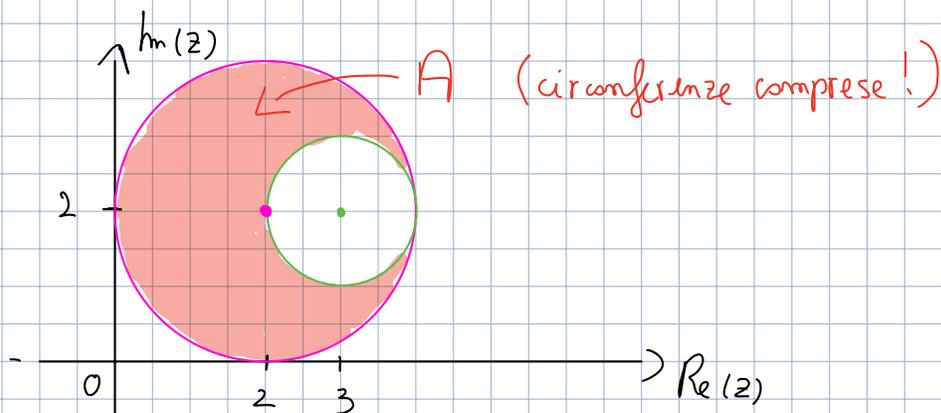
Tornando ad  $A$ :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2 - 2i| \leq 2, |z - 3 - 2i| \geq 1 \right\}$$

$$= \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - (2 + 2i)| \leq 2, |z - (3 + 2i)| \geq 1 \right\}$$

area dentro la circonferenza  
centrata in  $2 + 2i$  e di  
raggio 2.

area fuori dalla circonferenza  
centrata in  $3 + 2i$  e di raggio 1.



$$ii) B = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leq 1, \operatorname{Im}(z^2) \leq 2 \}$$

$$z = x + iy$$

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2 y^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2, \quad \operatorname{Im}(z^2) = 2xy$$

$$\Rightarrow B = \{ z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 - y^2 \leq 1, xy \leq 1 \}$$

infatti se  $x \neq 0$  possiamo scrivere

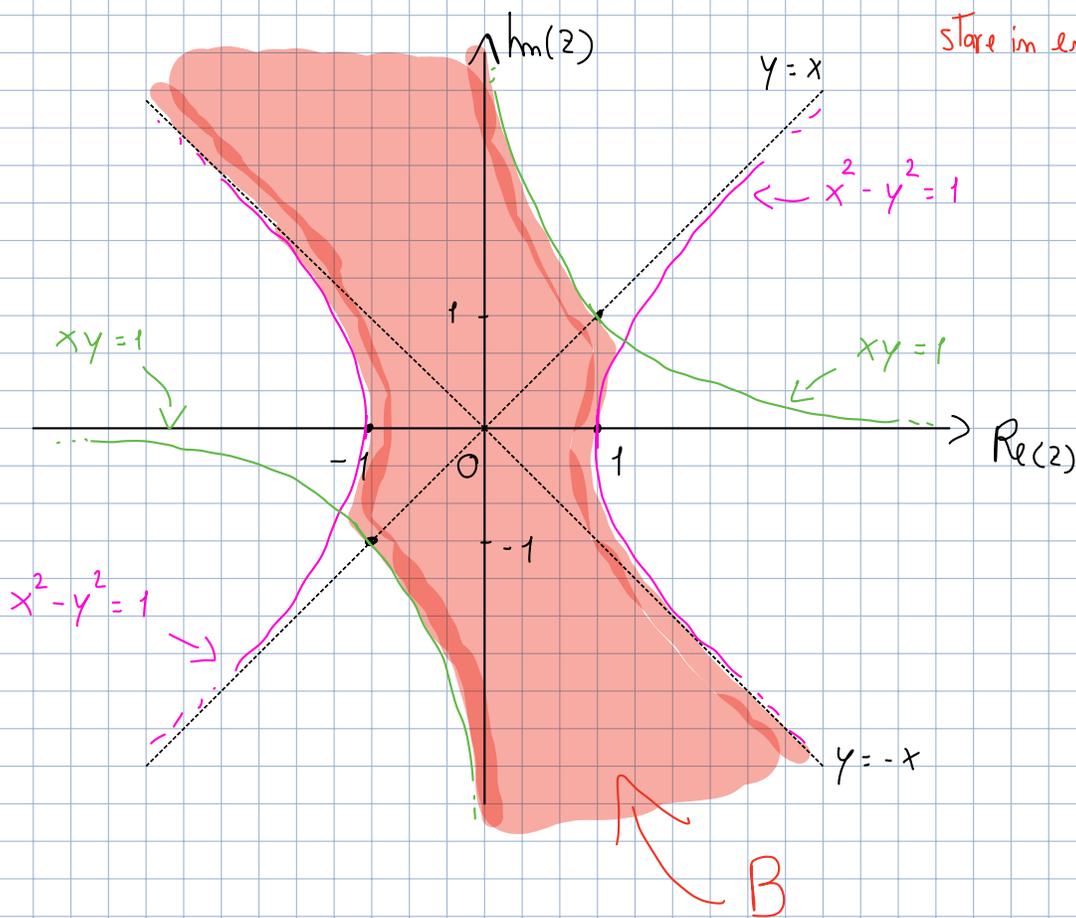
$$y \leq \frac{1}{x}$$

area delimitata  
dall'iperbole centrata  
in 0 e con asintoti  
 $y = \pm x$   
(e che passa per 1 e -1)

area delimitata dall'iperbole centrata in 0  
e con asintoti  $x = 0$  e  $y = 0$   
(e che passa per  $1+i$  e  $-1-i$ )

↳ per capire che porzione di piano prendere basta  
provare con un paio di punti, ad esempio 0 deve

stare in entrambe le regioni



## Es. 4

$$i) z^2 - 3iz - 3 + i = 0 \Rightarrow z^2 - 3iz - (3 - i) = 0$$

Essendo un'equazione di secondo grado senza moduli e/o complessi coniugati, la risolviamo analogamente a quanto faremmo con un'equazione in campo reale, ovvero con la formula risolutiva.

$$z_{1,2} = \frac{3i \pm \sqrt{(3i)^2 + 4(3-i)}}{2} = \frac{3i \pm \sqrt{-9+12-4i}}{2} = \frac{3i \pm \sqrt{3-4i}}{2}$$

Come scrivere  $\sqrt{3-4i}$  in forma algebrica? Cerchiamo  $w \in \mathbb{C}$  tale che  $w = \sqrt{3-4i}$ ,  
ovvero  $w^2 = 3-4i$   $w = x+iy$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$\hookrightarrow y = -\frac{2}{x}$  se  $x \neq 0$ , il che è vero perché con  $x=0$  avremmo  $0 = -4$ .

Sostituendo  $t = x^2$  dobbiamo risolvere l'equazione  $t^2 - 3t - 4 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = 4$$

Prendendo alla variabile  $x$ :

$$t_1 = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{non ammette soluzione in } \underline{\text{campo reale}}!$$

$$t_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$$

Ricordando che  $y = -\frac{2}{x}$  otteniamo

$$y_1 = -\frac{2}{x_1} = 1, \quad y_2 = -\frac{2}{x_2} = -1$$

$\rightarrow$  Teniamo in mente che  $z$  e  $w$  sono complessi, ma  $x$  e  $y$  sono reali.

Dunque le radici quadrate di  $3-4i$ , ovvero le soluzioni di  $w^2 = 3-4i$ , sono

$$w_1 = -2+i, \quad w_2 = 2-i \quad (\text{notiamo che } w_2 = -w_1)$$

Tornando infine alle soluzioni dell'equazione di partenza, abbiamo:

$$z_{1,2} = \frac{3i \pm \sqrt{3-4i}}{2} = \frac{3i \pm (2-i)}{2} \Rightarrow z_1 = \frac{3i-2+i}{2} = -1+2i$$

$$z_2 = \frac{3i+2-i}{2} = 1+i$$

$$ii) (1+i)z + (1+2i)\bar{z} + 3-i = 0$$

Scriviamo  $z = x+iy$ ,  $\bar{z} = x-iy$  e sostituiamo

$$(1+i)(x+iy) + (1+2i)(x-iy) + 3-i = 0$$

$$\underline{x} + i\underline{y} + i\underline{x} + i^2\underline{y} + \underline{x} - i\underline{y} + 2i\underline{x} - 2i^2\underline{y} + 3-i = 0$$

$$2x + 3ix - y + 2y + 3 - i = 0$$

$$2x + y + 3 + i(3x-1) = 0$$

Un numero complesso è uguale a 0  $\Leftrightarrow$  sia parte reale che immaginaria sono uguali a 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{3} + y + 3 = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 - \frac{2}{3} = -\frac{11}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione è  $z = \frac{1}{3} - \frac{11}{3}i$

## Es. 5

$$\bar{z} z^2 + |z|^2 = 2z$$

### Risoluzione 1

Ricordando che  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ , sostituiamo e mettiamo  $z$  in evidenza:

$$\bar{z} z^2 + z \bar{z} - 2z = 0$$

$$z(\bar{z} z + \bar{z} - 2) = 0$$

Dunque  $z_1 = 0$  è una prima soluzione. Le altre sono le soluzioni di:

$$\bar{z} z + \bar{z} - 2 = 0$$

$$z = x + iy \Rightarrow (x - iy)(x + iy) + x - iy - 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + x - 2 - iy = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 2 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \end{cases} \begin{matrix} = -2 \\ = 1 \end{matrix}$$

Le soluzioni sono dunque  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -2$ ,  $z_3 = 1$ .

### Risoluzione 2

Se non ricordiamo che  $z \bar{z} = |z|^2$ , scriviamo subito  $z = x + iy$  e sostituiamo

$$(x - iy)(x + iy)^2 + x^2 + y^2 = 2(x + iy)$$

$$(x - iy)(x^2 - y^2 + 2ixy) + x^2 + y^2 = 2x + 2iy$$

$$x^3 - xy^2 + 2ix^2y - iyx^2 + iy^3 - 2i^2xy^2 + x^2 + y^2 - 2x - 2iy = 0$$

$$x^3 - \underline{xy^2} + \underline{2ix^2y} - \underline{iyx^2} + iy^3 + \underline{2xy^2} + x^2 + y^2 - 2x - 2iy = 0$$

$$x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 - 2x + i(x^2y + y^3 - 2y) = 0$$

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2y + y^3 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow y(x^2 + y^2 - 2) = 0$$

$$\hookrightarrow y = 0 \text{ oppure } y^2 = 2 - x^2$$

$$\bullet y = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 1$$

$$\bullet y = 2 - x^2 \Rightarrow x^3 + x(2 - x^2) + \cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2} - 2x = 0$$

$$\cancel{x^3} + \cancel{2/x} - \cancel{x^3} + 2 - \cancel{2/x} = 0$$

$$2 = 0 \rightarrow \text{falso, quindi } \nexists \text{ soluzioni del tipo } y^2 = 2 - x^2.$$

Le soluzioni sono dunque solo quelle con parte immaginaria nulla

$$\hookrightarrow z_1 = 0, z_2 = -2, z_3 = 1.$$