

3 ottobre

Dati due insiemi X e Y ed una
funzione $f: X \rightarrow Y$. Sia $A \subseteq X$.

Allora $f(A) = \{ f(x) : x \in A \} \subseteq Y$
è l'immagine dell'insieme A .

Sia $B \subseteq Y$ allora

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \} \subseteq X$$

è la controimmagine di B

Nel caso particolare che $B = \{ y_0 \}$

allora possiamo $f^{-1}(y_0)$ invece di scrivere

$$f^{-1}(\{ y_0 \}).$$

Definizione (funzione parte intera)

Definisco la funzione $[x] = \lfloor x \rfloor$ ($\lceil x \rceil$)

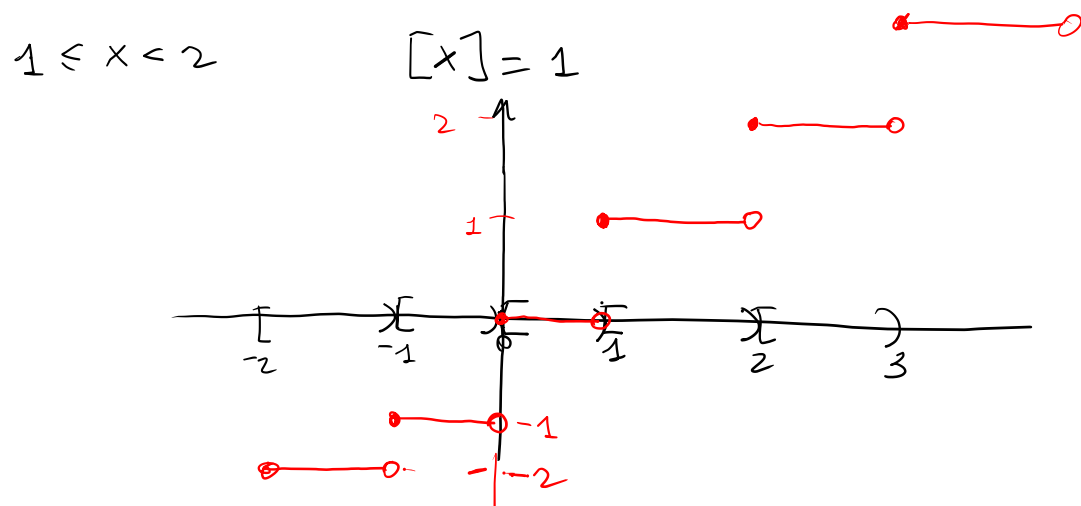
$\lfloor x \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ed è definito che

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$$



$$[n, n+1) = \{ x \in \mathbb{R} : n \leq x < n+1 \}$$



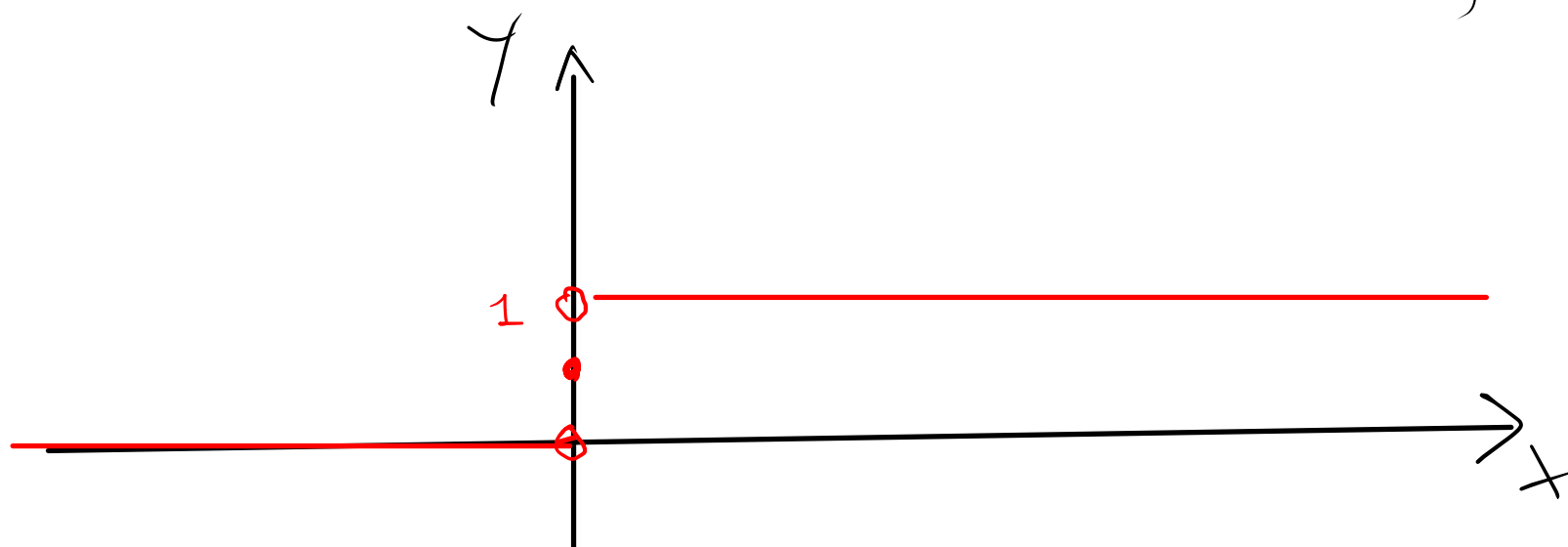
1) Esercizio $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$

2) $[x]$ è crescente cioè dimostrare che se
 $x_1 < x_2$ allora $[x_1] \leq [x_2]$.

Def (funzione di Heaviside)

$$H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

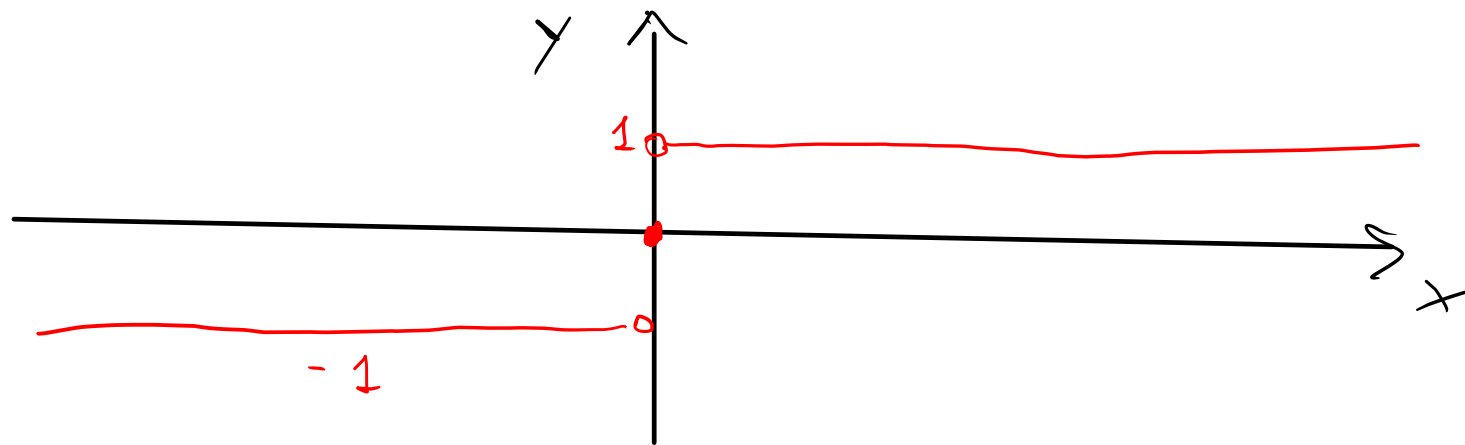


1 *Esercizio* $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1$

2 *Esercizio* Dimostrare che $H(x)$ è crescente

Def (funzione segno)

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Esercizi

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sign } x = 1$

2) dimostrare che $\text{sign } x$ è crescente

3) scrivere $\text{sign } x$ in termini di $H(x)$
e viceversa scrivere $H(x)$ in termini
di $\text{sign } x$.

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $X = -X$.

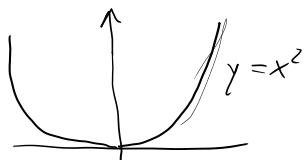
Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è pari se

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari se

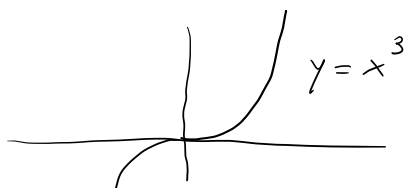
$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X.$$

Esempio $f(x) = x^2$ è pari



$f(x) = x^3$ è dispari

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)x^3 = -x^3 = -f(x)$$



$\sin(x)$ è una funzione dispari
 $\cos(x)$ è una funzione pari

Esercizi Se $f(x)$ e $g(x)$ sono pari e $h(x)$ e $k(x)$ sono dispari allora dimostrare

1) $(f(x)g(x))$ e $(h(x)k(x))$ sono funzioni pari

2) $\frac{f(x)}{g(x)}$ e $\frac{h(x)}{k(x)}$ sono funzioni pari

3) $f(x)h(x)$ e $\frac{h(x)}{f(x)}$ sono funzioni dispari.

Esercizio Verificare quale tra $[x]$, $H(x)$

e $\operatorname{sign}(x)$ è pari, dispari o nessuna delle due cose.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2+x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{x^2+1} - \sqrt[n]{x^2+x+1} \right)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^{k-1} = (a-b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a = \sqrt[n]{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{n}}$$

$$b = (x^2+x+1)^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n (x^2+1)^{\frac{n-k}{n}} (x^2+x+1)^{\frac{k-1}{n}}}{\sum_{k=1}^n (x^2+1)^{\frac{n-k}{n}} (x^2+x+1)^{\frac{k-1}{n}}} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2+1} - (\cancel{x^2+x+1})}{\sum_{k=1}^n (x^2(1+x^{-2}))^{\frac{n-k}{n}} (x^2(1+x^{-1}+x^{-2}))^{\frac{k-1}{n}}}$$

$$= \frac{-x}{\sum_{k=1}^n \underbrace{x^{2 \frac{n-k}{n}} (1+x^{-2})^{\frac{n-k}{n}} x^{2 \frac{k-1}{n}} (1+x^{-1}+x^{-2})^{\frac{k-1}{n}}}_{x^{2 \left[\frac{n-k}{n} + \frac{k-1}{n} \right]} = x^2 \frac{n-k+k-1}{n} = x^2 \frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{-x}{x^{2 \frac{n-1}{n}} \sum_{k=1}^n (1+x^{-2})^{\frac{n-k}{n}} (1+x^{-1}+x^{-2})^{\frac{k-1}{n}}}$$

$$= -x^{1-2 \frac{(n-1)}{n}}$$

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n \underbrace{(1+x^{-2})^{\frac{n-k}{n}}}_{\downarrow 1} \underbrace{(1+x^{-1}+x^{-2})^{\frac{k-1}{n}}}_{\downarrow 1}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n 1} = \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} x^{1-2 \frac{(n-1)}{n}} = -\frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{n}-1} = 0$$

$$n \geq 4$$

$$\sum_{k=1}^n 1 = n$$

Def (di o piccolo) Siano $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$

$\sup X = +\infty$. Allora scriviamo che $f(x) = o(g(x))$

se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(cioè quando g diventa molto più grande di f al crescere $x \rightarrow +\infty$)

Es 1) $\{n^{10}\}, \{2^n\}$, in che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{10}}{2^n} = 0 \Rightarrow n^{10} = o(2^n)$$

Es 2) se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ allora

$f(x) = o(1)$ perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

3) $x^2, x^3, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
 $\Rightarrow x^2 = o(x^3)$

4) $\frac{1}{x}, 2 + \sin x \Rightarrow \left(\frac{1}{x} = o(2 + \sin x) \right)$

perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2 + \sin x} = 0$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1 \quad \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{3x} \right) \leq \left(\frac{\frac{1}{x}}{2 + \sin x} \right) \leq \left(\frac{1}{x} \right)$$

$\downarrow x \rightarrow +\infty$
 0

$\downarrow$ const.
 0

$\downarrow x \rightarrow +\infty$
 0

$$5) \text{ se } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad L \in \mathbb{R}$$

$$\text{allora } f(x) = L + o(1)$$

$$\text{Infatti } f(x) - L = o(1) \text{ equivale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - L) = 0$$

$$6) \text{ se } f(x) = o(g(x)) \text{ e } h(x) = o(g(x))$$

$$\Rightarrow f(x) + h(x) = o(g(x))$$

$$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$h(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) + h(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{g(x)} \right) = 0 + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) + h(x) = o(g(x))$$

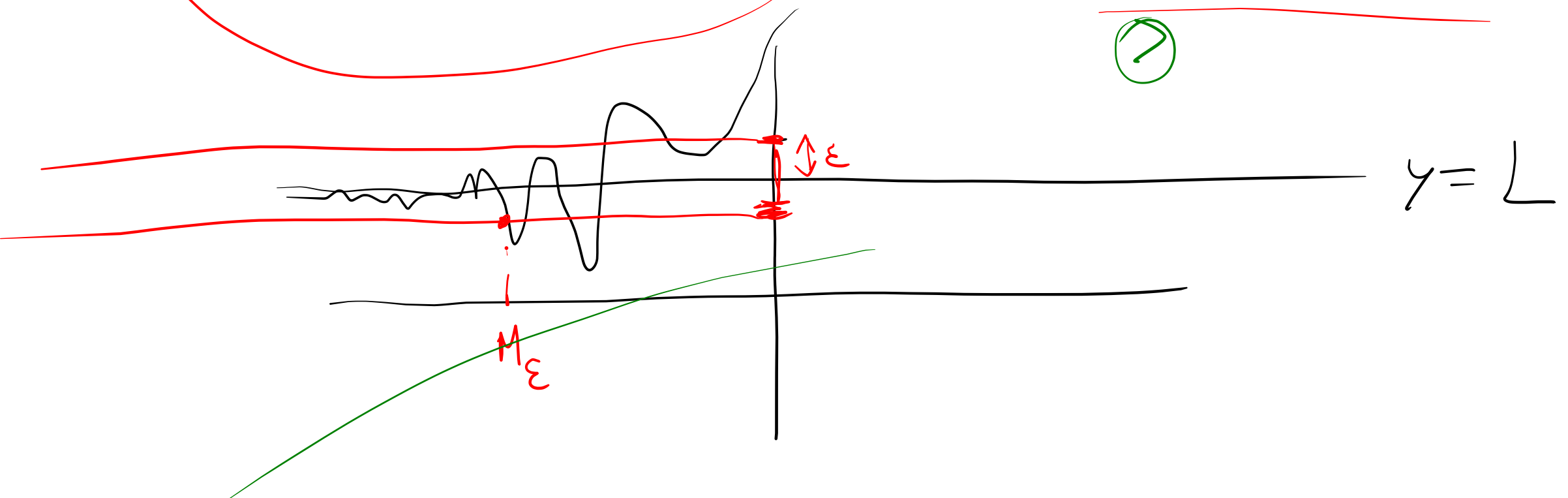
$$\text{Caso } o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$$

$$o(1) + o(1) = o(1)$$

Def Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\inf X = -\infty$ e se

$L \in \mathbb{R}$ scriviamo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ se

$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon < 0$ t.c. $x < M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



Funktionen hyperbolische

$$\sinh(x) = \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

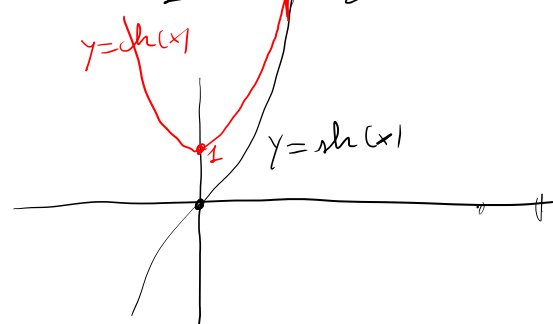
$$\operatorname{sh}(0) = 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2}$$

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(-x) &= \frac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = \\ &= -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh}(x) \end{aligned}$$

für $x \gg 1$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} (1 - e^{-2x}) = \frac{e^x}{2} (1 + o(1))$$



$$\operatorname{ch}(0) = 1$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x) \quad \operatorname{ch}(x) > \operatorname{sh}(x) \quad \forall$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x}{2} (1 + e^{-2x}) = \frac{e^x}{2} (1 + o(1))$$

$$\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}$$

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2}{4} - \frac{\cancel{e^{2x}} - \cancel{e^{-2x}} - 2}{4} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Exercice

$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)$$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$