Note del Corso di Istituzioni di Algebra e Geometria
A.A. 2024/2025

Prof. Valentina Beorchia

9 ottobre 2024

Indice

Introduzione

Questo corso riguarda lo studio delle curve piane algebriche, cioè delle curve che possono essere descritte come luogo di zeri di un polinomio non nullo in due indeterminate nel caso affine, rispettivamente un luogo di zeri di un polinomio omogeneo non nullo in tre indeterminate nel caso proiettivo. L'analoga nozione in spazi di dimensione superiore viene chiamata ipersuperficie algebrica.

Vedremo che con l'uso di svariate tecniche algebriche sarà possibile analizzare dettagliatamente singolarità e intersezioni tra curve, e potremo dare la nozione di molteplicità di intersezione tra curve; potremo quindi distinguere tra intersezioni trasversali e tangenziali a partire da equazioni algebriche.

La teoria delle curve algebriche piane fa parte di una teoria molto più ampia, e cioè della Geometria Algebrica, molto attuale e con una storia molto lunga. La Geometria Algebrica moderna ebbe inizio con l'introduzione delle coordinate cartesiane nel XVII secolo. Ebbe un grande sviluppo a partire dal diciannovesimo secolo, quando ad esempio Riemann dimostrò che le superfici di Riemann compatte (cioè varietà complesse di dimensione 1) possono sempre essere descritte come insiemi di soluzioni di equazioni polinomiali.

Anche l'importantissima scuola italiana di Geometria Algebrica tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento diede un contributo fondamentale. Il successivo sviluppo dell'algebra commutativa, in cui citiamo ad esempio David Hilbert ed Emmy Noether, permise una formalizzazione molto generale della teoria. I lavori delle fondazioni furono terminati da Oscar Zariski e André Weil a metà del XX secolo.

Recentemente, a partire dagli anni '50, la teoria è stata enormemente generalizzata e resa più potente dall'introduzione degli schemi e della coomologia da parte di Alexander Grothendieck.

Al giorno d'oggi, la Geometria Algebrica ha connessioni con molte branche della matematica. In particolare, la maggior parte della Teoria dei Numeri può essere vista come parte della Geometria Algebrica; un esempio ne è la dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat. Ci sono anche collegamenti molto stretti con l'Algebra, l'Analisi Complessa, la Topologia, la Geometria Differenziale, le Equazioni alle derivate parziali, la Fisica Matematica ma anche con materie applicate come la Teoria dei codici e la Crittografia.

Capitolo 1

Preliminari di geometria

1.1 Spazi affini

Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita n.

Definizione 1.1.1. Uno *spazio affine* $\mathbb{A} = \mathbb{A}(V)$ su V è un insieme non vuoto $\mathbb{A} \neq \emptyset$ su cui è definita un'applicazione $t : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$ tale che:

1. $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}$ si ha $t(P, Q) + t(Q, R) = t(P, R)$;
2. $\forall P \in \mathbb{A}$ si ha $t(P, \quad) : \mathbb{A} \to V$ è una biiezione.

   Gli elementi di $\mathbb{A}$ verranno chiamati *punti*.

Osservazione 1. In queste note considereremo principalmente lo *spazio affine standard* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} := \mathbb{K}^n$ sullo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$, con l'applicazione

$$t((a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

In questo caso, quindi, lo spazio affine e lo spazio vettoriale coincidono insiemisticamente, e i loro elementi sono n-uple di scalari.

Per motivi di chiarezza, denotiamo tali n-uple in orizzontale $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ per indicare gli elementi dello spazio affine, mentre la notazione verticale indicherà un vettore $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Definizione 1.1.2. Un *riferimento affine* in $\mathbb{A}$ è il dato di un punto fissato $O \in \mathbb{A}$, che verrà chiamato *origine*, e di una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dello spazio vettoriale V.

Dato un riferimento affine, ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ possono essere associate biunivocamente le sue *coordinate affini*, che sono per definizione le coordinate del vettore $t(O, P)$ nella base $\mathcal{B}$.

Osservazione 2. Nello spazio affine standard considereremo il sistema di riferimento affine più semplice, e cioè

$$O = (0, 0, \ldots, 0), \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

In questo riferimento, ogni n-upla coincide con la propria n-upla di coordinate affini.

1.2 Spazi proiettivi

Definizione 1.2.1. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita $n+1$. Lo *spazio proiettivo* $\mathbb{P}(V)$ su V è l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{0\}}{\sim},$$

dove $\sim$ è la relazione di proporzionalità: $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $w = \lambda v$.

Definizione 1.2.2. Un *sistema di riferimento proiettivo* in $\mathbb{P}(V)$ è il dato di $n+2$ punti

$$P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1} \in \mathbb{P}(V),$$

quindi $n+2$ classi di vettori di V, tali che per ogni scelta di $n+1$ vettori tra di essi, risultino linearmente indipendenti.

Se $p : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ indica la proiezione, si può dimostrare facilmente che esiste una base $\{v_0, \ldots, v_n\}$ di V tale che

$$p(v_0) = P_0, \ldots, p(v_n) = P_n, p(v_0 + v_1 + \cdots + +v_n) = P_{n+1}.$$

Dato un vettore non nullo $v \in V$, s $v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, definiamo le *coordinate omogenee* di $P = [v]$ come l'$(n+1)$-upla $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$. Si osservi che le coordinate omogenee non sono univocamente determinate, bensì sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Osservazione 3. Indicheremo con $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}$ lo spazio proiettivo standard. A meno di specifica indicazione, in esso fisseremo il riferimento proiettivo canonico

$$P_0 = [e_0], P_1 = [e_1], \dots, P_n = [e_n], P_{n+1} = [e_0 + e_1 + \cdots + e_n],$$

dove i vettori e_i formano la base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$.

1.3 Anelli di polinomi

Denoteremo con $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi nelle indeterminate $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Ricordiamo che $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un anello UFD (un dominio a fattorizzazione unica), cioè ogni polinomio si può fattorizzare in modo unico, a meno di elementi invertibili e a meno di uapermutazione dei fattori, nel prodotto di polinomi irriducibili:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n)^{\mu_1} \cdots f_r(x_1, \dots, x_n)^{\mu_r},$$

con $f_i(x_1, \dots, x_n)$ irriducibili e a due a due coprimi. Gli esponenti μ_i sono detti molteplicità (algebrica) del fattore irriducibile f_i.

Se $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 1$, il polinomio f si dice *ridotto*.

Osservazione 4. Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ è un campo algebricamente chiuso, allora $\mathbb{K}$ è infinito.

Infatti, se per assurdo fosse finito: $\mathbb{K} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, considerando il polinomio

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_m) + 1$$

si otterrebbe un polinomio senza radici in $\mathbb{K}$.

Capitolo 2

Curve e ipersuperfici algebriche affini

Definizione 2.0.1. Dato un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e un punto $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, indicheremo con $f(P)$ la valutazione di f nelle coordinate di P.

Indicheremo, inoltre, con $Z(f)$ il *luogo degli zeri di* f, cioè

$$Z(f) = \{P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid f(P) = 0\}.$$

Definizione 2.0.2. Una *curva algebrica piana affine* C è una coppia

$$C = (Z(f), f),$$

con $f \in \mathbb{K}[x, y]$ polinomio non costante (quindi di grado ≥ 1).

Il luogo $Z(f)$ verrà chiamato *supporto di* C. L'equazione $f(x, y) = 0$ si dirà equazione di C.

Il *grado* di C è per definizione il grado del polinomio f.

Osservazione 5. Due polinomi diversi possono definire curve con lo stesso supporto, come ad esempio nel caso di $f(x, y) = x - y$ e $g(x, y) = (x - y)^2$. Nel primo caso la curva è chiamata retta, nel secondo caso "retta doppia". Le rette doppie possono essere considerate come coniche piane "doppiamente degeneri", per cui vogliamo tenere traccia del fatto che sono determinate da un'equazione di secondo grado.

Esempi 2.0.3.

- Le rette affini sono curve algebriche di grado 1:

  $$L = (Z(ax + by + c), ax + by + c),$$

  con $a, b, c \in \mathbb{K}$.

- Le coniche affini sono curve piane algebriche di grado 2:

$$C = (Z(a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + b_0x + b_1y + c), a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + b_0x + b_1y + c).$$

Definizione 2.0.4. Se $f(x, y) = f_1(x, y)^{\mu_1} \cdot f_2(x, y)^{\mu_2} \cdot f_r(x, y)^{\mu_r}$, le curve piane

$$C_i = (Z(f_i), f_i)$$

si chiamano *componenti irriducibili (ridotte)* di C, di molteplicità μ_i.

Osservazione 6. Se $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_r$, allora $Z(f) = Z(f_1) \cup \dots \cup Z(f_r)$.

Definizione 2.0.5. Se $f(x, y)$ è un polinomio irriducibile, la curva $(Z(f), f)$ si dice *curva irriducibile*.

Se Se $f(x, y)$ è un polinomio ridotto, la curva $(Z(f), f)$ si dice *curva ridotta*.

Esempi 2.0.6.
- Sia $f = y^2 - x(x - 1)(x - 2)$. La curva $(Z(f), f)$ è una *cubica liscia* irriducibile.
- Sia $f = y^2 - x^3$. La curva $(Z(f), f)$ è una *cubica cuspidata* irriducibile.
- Sia $f = x(x - 1)(x - 2)$. La curva $(Z(f), f)$ è una *cubica riducibile ridotta* irriducibile.
- Sia $f = xy^2$. La curva $(Z(f), f)$ è una *cubica riducibile non ridotta* irriducibile. Anche $f = x^3$ determina una cubica riducible non ridotta.

2.1 Ipersuperfici affini

In modo perfettamente analogo si possono definire le ipersuperfici affini.

Definizione 2.1.1. Una *ipersuperficie algebrica affine* X è una coppia

$$X = (Z(f), f),$$

con $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinomio non costante (quindi di grado ≥ 1).

Il luogo $Z(f) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ verrà chiamato *supporto di* C. L'equazione $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ si dirà equazione di C.

Il *grado* di C è per definizione il grado del polinomio f.

Esempio 2.1.2. Se $n = 3$, un'ipersuperficie si dice *superficie*. Quando il grado è 1 si tratta di un piano affine. Se il grado è 2, parliamo di superficie quadrica.

2.2 Comportamento sotto affinità

Consideriamo un'affinità $\alpha : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Se $(x_1, y_1) = \alpha((x, y))$, possiamo scrivere delle equazioni del tipo

$$\begin{cases} x_1 = & ax + by + c \\ y_1 = & dx + ey + h, \end{cases}$$

con $\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$. Data una curva $(Z(f), f)$, si ha

$$P_1 \in \alpha(Z(f)) \iff \alpha^{-1}(P_1) \in Z(f) \iff f(\alpha^{-1}(P_1)) = 0.$$

Se fissiamo una rappresentazione per α^{-1}:

$$\begin{cases} x = & a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 \\ y = & d_1x_1 + e_1y_1 + h_1, \end{cases}$$

otteniamo la condizione

$$f(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1, d_1x_1 + e_1y_1 + h_1) = 0.$$

Ponendo $f_1(x_1, y_1) := f(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1, d_1x_1 + e_1y_1 + h_1)$, si ha quindi

$$\alpha(Z(f)) = Z(f_1).$$

Definizione 2.2.1. Diremo che la curva algebrica $(Z(f_1), f_1)$ è immagine della curva $(Z(f), f)$ nell'affinità α.

Due curve affini si dicono *affinemente equivalenti* se una è immagine dell'altra tramite un'affinità.

Vogliamo ora capire se un'affinità conserva il grado. A questo scopo consideriamo ogni monomio che appare in f:

$$f = \cdots + qx^ky^h + \cdots$$
$$f_1 = \cdots + q(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)^k(d_1x_1 + e_1y_1 + h_1)^h + \cdots$$

quindi il grado non può aumentare: $\deg f \geq \deg f_1$.

Applicando poi l'affinità inversa, troviamo che vale anche $\deg f_1 \geq \deg f$.

Riassumendo:

Lemma 2.2.2. *Sia $\alpha : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ un affinità. Allora α manda curve algebriche in curve algebriche dello stesso grado.*

Esercizi 1.
1. Si dimostri che ogni affinità conserva il numero di fattori irriducibili di un polinomio $f(x, y)$.
2. Si dimostri che ogni affinità conserva la molteplicità di ogni fattore irriducibile di un polinomio. $f(x, y)$

Capitolo 3

Curve e ipersuperfici algebriche proiettive

Consideriamo ora il piano proiettivo standard $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con il riferimento proiettivo canonico. Vorremmo definire le curve algebriche piane proiettive in modo analogo al caso affine, cioè come luoghi di zeri di opportuni polinomi. Ricordiamo che le tre coordinate omogenee di un punto proiettivo sono definite a meno di un fattore di proporzionalità , quindi, in generale, dato un polinomio arbitrario in tre indeterminate, il suo logo di zeri *non è ben definito*; ciò succede, ad esempio, nel caso:

$$f(x_0, x_1, x_2) = x_0 - x_1 x_2.$$

Abbiamo che $P = (1 : 1 : 1) = (2 : 2 : 2)$, e $f(1, 1, 1) = 0$, mentre $f(2, 2, 2) = -2$.

Vedremo che se ci restringiamo all'insieme dei *polinomi omogenei*, il luogo degli zeri risulta ben definito.

Definizione 3.0.1. Dato $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ di gardo $d \geq 1$, esso si può scrivere nella forma

$$F = F_d + F_{d-1} + F_{d-2} + \cdots + F_1 + F_0,$$

dove F_i è la somma di tutti i monomi di grado i, con $0 \leq i \leq d$, che compaiono in F con un coefficiente non nullo. I termini F_i si dicono *termini omogenei* di F.

Un polinomio F si dice *omogeneo* se

$$F = F_d,$$

cioè F non contiene monomi di grado strettamente minore di d.

Esempio 3.0.2. La decomposizione in termini omogenei di

$$F = x_0^4 - 2x_0x_1x_2 + x_1^2x_2 - x_2^3 + x_0x_1 + 8x_2^2 - 3x_0 + 5x_1 + 7x_2 - 1$$

è data da

$$F = F_4 + F_3 + F_2 + F_1 + F_0,$$

dove

$$F_4 = x_0^4,\ F_3 = -2x_0x_1x_2 + x_1^2x_2 - x_2^3,\ F_2 = x_0x_1 + 8x_2^2,\ F_1 = -3x_0 + 5x_1 + 7x_2,\ F_0 = -1.$$

Esempi 3.0.3. I seguenti sono polinomi omogenei:

$$x_0 + x_1 + 2x_2, \quad x_0^2 - 8x_0x_1 + 25x_0x_2 - 13x_1^2 + 11x_2^2, \quad x_0^3x_1x_2 - 2x_0x_1^2x_2^2 - 7x_1^5 + 3x_1x_2^4.$$

Lemma 3.0.4. *Un polinomio $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ di grado $d \geq 1$ è omogeneo se e solo se vale l'identità di polinomi*

$$F(tx_0, \ldots, tx_n) = t^d\, F(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n, t]. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo il caso $n = 2$. Se F è omogeneo si scrive nella forma

$$F = \sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0i_1i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2},$$

con $0 \leq i_j \leq d$ per ogni $j = 0, 1, 2$. Se valutiamo F in (tx_0, tx_1, tx_2) otteniamo

$$F(tx_0, tx_1, tx_2) = \sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0i_1i_2} t^{i_0} x_0^{i_0} t^{i_1} x_1^{i_1} t^{i_2} x_2^{i_2} =$$

$$\sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0i_1i_2} t^{i_0+i_1+i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = t^d \left(\sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0i_1i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \right).$$

Viceversa, sia $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ un polinomio arbitrario e supponiamo che valga l'identità (3.1). Scriviamo la decomposizione in termini omogenei:

$$F = F_d + F_{d-1} + \cdots + F_1 + F_0.$$

Si ha

$$F(tx_0, tx_1, tx_2) = F_d(tx_0, tx_1, tx_2) + F_{d-1}(tx_0, tx_1, tx_2) + \cdots + F_1(tx_0, tx_1, tx_2) + F_0(tx_0, tx_1, tx_2).$$

Essendo ogni F_i omogeneo di grado i, per l'implicazione appena dimostrata, abbiamo

$$F(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d F_d(x_0, x_1, x_2) + t^{d-1} F_{d-1}(x_0, x_1, x_2) + \cdots + tF_1(x_0, x_1, x_2) + F_0(x_0, x_1, x_2). \tag{3.2}$$

D'altra parte, per la (3.1) possiamo anche scrivere

$$F(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d(F_d(x_0, x_1, x_2) + F_{d-1}(x_0, x_1, x_2) + \cdots + F_1(x_0, x_1, x_2) + F_0(x_0, x_1, x_2)) =$$

$$= t^dF_d(x_0, x_1, x_2) + t^dF_{d-1}(x_0, x_1, x_2) + \cdots + t^dF_1(x_0, x_1, x_2) + t^dF_0(x_0, x_1, x_2). \tag{3.3}$$

I membri destri delle (3.2) e (3.3) devono coincidere come polinomi in x_0, x_1, x_2, t, quindi necessariamente $F_i = 0$ per ogni $0 \leq i \leq d-1$. □

Definizione 3.0.5. Indicheremo con

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$$

l'insieme dei polinomi omogenei di grado $d \geq 0$, unito il polinomio nullo.

Si ha, in particolare

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_0 = \mathbb{K}, \quad \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_1 = \{a_0x_0 + \cdots + a_nx_n \mid a_i \in \mathbb{K}\}.$$

L'insieme $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ risulta un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita

$$\dim \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d = \binom{n+d}{d},$$

e una sua base è data da tutti i monomi monici di grado d:

$$x_0^{i_0}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}, \quad i_j \in \{0, \dots, d\}, \quad \sum_{j=0}^{n} i_j = d.$$

Corollario 3.0.6. *Se $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$, è ben definito il suo luogo degli zeri proiettivi*

$$Z_P(F) = \{Q = (q_0 : \cdots : q_n) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \mid F(q_0, \dots, q_n) = 0\},$$

cioè l'annulamento non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee.

Dimostrazione. Consideriamo un'altra terna di coordinate omogenee $(\lambda q_0 : \cdots : \lambda q_n)$, $\lambda \neq 0$, di Q; per la (3.1) si ha

$$F(\lambda q_0, \dots, \lambda q_n) = \lambda^d F(q_0, \dots, q_n) = 0 \iff F(q_0, \dots, q_n) = 0.$$

□

Osservazione 7. La P nella notazione $Z_P(F)$ indica che consideriamo gli zeri proiettivi.

Dato un polinomio omogeneo F possiamo considerare anche l'insieme degli zeri affini $Z(F) \subset \mathbb{A}^{n+1}$; l'identità (3.1) ci dice che se un punto $Q = (q_0, \ldots, q_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$ annulla F, allora anche ogni $n+1$-upla proporzionale lo annulla; quindi

$$Q \in Z(F),\ F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d \iff \overline{OQ} \subset Z(F),$$

dove $\overline{OQ}$ indica la retta affine per l'origine O e Q. In altre parole $Z(F)$ è un *cono di vertice l'origine O*.

Definizione 3.0.7. Una *curva piana algebrica proiettiva* è una coppia

$$\mathcal{C} = (Z_P(F), F), \quad Z_P(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$$

dove $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ con $d \geq 1$. Il *grado* di $\mathcal{C}$ è per definizione il grado del polinomio F:

$$\deg \mathcal{C} := \deg F.$$

Analogamente, una *ipersuperficie algebrica proiettiva* è una coppia

$$\mathcal{X} = (Z_P(F), F), \quad Z_P(F) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}},$$

dove $F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]_d$ con $d \geq 1$. Il *grado* di $\mathcal{X}$ è per definizione il grado del polinomio F:

$$\deg \mathcal{X} := \deg F.$$

Capitolo 4

Immersione dello spazio affine nello spazio proiettivo, chiusura proiettiva

Ricordiamo che è possibile immergere iniettivamente il piano affine nel piano proiettivo tramite la mappa

$$j_0 : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}, \quad j_0((q_1, q_2)) := (1 : q_1 : q_2).$$

Questa mappa non è suriettiva, e la sua immagine risulta essere

$$j_0(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) = \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus Z_P(x_0) =: U_0.$$

La retta $Z_P(x_0)$ è chiamata *retta all'infinito*. L'applicazione j_0 risulta, invece, iniettiva in quanto se restringiamo il codominio a U_0, essa ammette inversa, e precisamente la mappa

$$\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}, \quad \varphi_0(q_0 : q_1 : q_2) = \left(\frac{q_1}{q_0}, \frac{q_2}{q_0}\right).$$

Nel caso

$$\mathbb{K} = \mathbb{R},$$

un modello di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è dato dal quoziente delle sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ quozientata con la mappa antipodale, che identifica un punto $(q_0, q_1, q_2) \in S^2$ con il suo antipodale $(-q_0, -q_1, -q_2)$:

$$(q_0, q_1, q_2) \sim (r_0, r_1, r_2) \iff (r_0, r_1, r_2) = (q_0, q_1, q_2) \vee (r_0, r_1, r_2) = (-q_0, -q_1, -q_2).$$

La retta all'infinita può essere identificata con il quoziente del cerchio di raggio massimo

$$S^2 \cap Z(x_0),$$

e il piano affine con l'interno della semisfera superiore (o inferiore).

Se muniamo $\mathbb{R}^3$ della topologia euclidea e $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = S^2/\sim$ della topologia quoziente, si ha che $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è compatto. Possiamo interpretare quindi $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ come una *compattificazione* di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

La costruzione si può generaliizare facilemente e definire un'immersione

$$j_0 : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}.$$

4.1 Omogeneizzazione e deomogeneizzazione

Vedremo ora che data una curva piana affine $(Z(f), f)$ è sempre possibile trovare una curva proiettiva la cui restrizione a U_0 risulti uguale a $j_0(Z(f))$; inoltre, data una curva piana proiettiva $(Z_P(F), F)$, la sua restrizione $Z_P(F) \cap U_0$ è sempre immagine di una curva algebrica piana affine. Per fare ciò abbiamo bisogno delle seguenti nozioni.

Definizione 4.1.1. L'operazione di *omogeneizzazione* di un polinomio è definita come

$$h : \mathbb{K}[x, y] \to \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2], \quad (hf)(x_0, x_1, x_2) := x_0^{\deg f} f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}.$$

Osserviamo che la mappa h associa a un polinomio in due indeterminate arbitrario un polinomio omogeneo in tre indeterminate, dello stesso grado.

Esempio 4.1.2. Se $f(x, y) = xy - 1$, si ha $(hf)(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \left(\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_0} - 1\right) = x_1x_2 - x_0^2$.

Definizione 4.1.3. L'operazione di *deomogeneizzazione rispetto a* x_0 è definita da:

$$a : \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2] \to \mathbb{K}[x, y], \quad (aF)(x, y) := F(1, x, y).$$

Osserviamo che questa mappa è definita anche per polinomi non omogenei.

Esempio 4.1.4. Per $F = x_1x_2 - x_0$, si ha $aF = xy - 1$. In questo caso $\deg F = \deg aF$.

Per $G = x_0x_1x_2 - x_0x_1^2 + x_0^3$, si ha $aG = xy - y^2 + 1$; in questo caso $\deg\ G = 3 \neq 2 = \deg\ aG$.

La deomogeneizzazione, quindi, non mantiene sempre il grado. Abbiamo il seguente risultato:

Lemma 4.1.5. *Dati due polinomi arbitrari $f \in \mathbb{K}[x, y]$ e $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, valgono le seguenti*

1. *$a(hf) = f$;*
2. *esiste $k \geq 0$ tale che $x_0^k h(aF) = F$.*

Proposizione 4.1.6. *1. Sia $C = (Z(f), f)$ una curva piana affine. Allora vale*

$$j_0(Z(f)) = Z_P(hf) \cap U_0.$$

2. Sia $\mathcal{C} = (Z_P(F), F)$ una curva piana proiettiva. Allora vale

$$\varphi_0(Z_P(F) \cap U_0) = Z(aF).$$

Dimostrazione. (1): osserviamo che

$$Q \in j_0(Z(f)) \iff Q = j_0(q_1, q_2) = (1 : q_1 : q_2) \text{ e } (q_1, q_2) \in Z(f) \iff Q = (1 : q_1 : q_2) \text{ e } f(q_1, q_2) = 0.$$

Notiamo ora che $(hf)(Q) = (hf)(1, q_1, q_2) = 1^{\deg f} f(\frac{q_1}{1}, \frac{q_2}{1} = f(q_1, q_2)$, quindi l'ultima condizione è equivalente a $Q \in U_0$ e $(hf)(Q) = 0$.

(2) La verifica è simile al punto precedente. □

La proposizione appena vista motiva la seguente definizione:

Definizione 4.1.7. Sia $C = (Z(f), f)$ una curva piana affine. La sua *chiusura proiettiva* è la curva piana proiettiva

$$\bar{C} = (Z_P(hf), hf).$$

Osservazione 8. Ricordiamo che quanto fatto per l'indeterminata x_0 può essere ripetuto analogamente per le altre indeterminate. Infatti, ponendo

$$U_1 := \mathbb{P}^2 \setminus Z_P(x_1), \quad U_2 := \mathbb{P}^2 \setminus Z_P(x_2),$$

si possono considerare le immersioni

$$j_1 : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2, \quad j_1(q_1, q_2) = (q_1 : 1 : q_2),$$

e

$$j_2 : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2, \quad j_1(q_1, q_2) = (q_1 : q_2 : 1),$$

e si ha $j_1(\mathbb{A}^2) = U_1$ e $j_2(\mathbb{A}^2) = U_2$.

È possibile, inoltre, definire delle omogeneizzazioni e deomogeneizzazioni rispetto alle indeterminate x_1 e x_2 in modo perfettamente analogo a prima, e ottenere degli enunciati simili alla Proposizione 4.1.6.