Lezione 4 ottobre 2024
venerdì 4 ottobre 2024 11:07

Visto: oggi: $\mathbb{K}$ e aF

e inversione $\varphi : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, $\mathcal{V}$ $\mathcal{F}$

VOGLIAMO STUDIARE: intersezioni tra curve algebriche, eventuali singolarità: $\mathcal{V}$ $\mathcal{F}$ $\mathcal{G}$

∞

molteplicità di intersezione: $\mathcal{P}$

molteplicità di un punto singolare $\mathcal{J}$

$\mathcal{P}$

Usiamo la nozione di molt. alg. di una radice di 1 polinomio in 1 indeterminata

Iniziamo da studiare inters. curve - rette.

Risultato preliminare:

Abbiamo visto aF, $F = F(x_0, x_1, x_2)$ omogeneo

$(aF)(y,z) := F(1, x, y)$

Analogamente: sia $G = G(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}[\lambda, \mu]$ omogeneo

Def. $(a_\lambda G)(t) := G(1, t) = g(t) \in \mathbb{K}[t]$

Analog.: se cons. $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, definisco

$(h_\lambda p)(\lambda, \mu) := \lambda^{\deg p} \cdot p\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$

Es. $G(\lambda, \mu) = \lambda^3 - 2\lambda^2\mu + \lambda\mu^2 + 8\mu^3$

$(aG)(t) = 1 - 2t + t^2 + 8t^3$

$p(t) = 2 + 7t^2 - 5t^4$

$(hp)(\lambda, \mu) = 2\lambda^4 + 7\lambda^2\mu^2 - 5\mu^4$

OSS: $a(hp) = p$

$h(aG) \neq G$

fatto: $G = \lambda^k \cdot \bar{G}$, $\lambda \nmid \bar{G}$, $k \geq 0$

$\Rightarrow \lambda^k \cdot h(aG) = G$

Teorema: Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (o comunque $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$)

Allora ogni polinomio $G(\lambda, \mu)$ omogeneo a coeff. in $\mathbb{C}$, di grado ≥ 1, ammette esattamente d radici, contate con le risp. molteplicità: una radice è una coppia $(\bar{\lambda} : \bar{\mu}) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ t.c.

$G(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$

Esempio: $\lambda^2 - 2\lambda\mu + 3\mu^2 = G(\lambda, \mu)$

$3\mu^2 - (2\lambda)\mu + \lambda^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \lambda = 1 \quad 3t^2 - 2t + 1 = 0$

$\mu_\pm = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 12\lambda^2}}{6}$ $\qquad t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{-8}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{-2}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{2}\, i}{3}$

$3(\mu - t_1\lambda) \cdot (\mu - t_2\lambda) \leftsquigarrow 3t^2 - 2t + 1 = 3(t - t_1) \cdot (t - t_2)$

Dim. Scriviamo $G(\lambda, \mu) = a_d \mu^d + a_{d-1}\mu^{d-1}\lambda + \dots + a_1\mu\lambda^{d-1} + a_0\lambda^d$

Supp. $a_d \neq 0$

$a_\lambda G = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_1 t + a_0 = g(t)$

siamo $\mathbb{C}$: Teo. Fond. Alg. + Ruffini

$g(t) = a_d \cdot \prod_{i=1}^{s} (t - t_i)^{m_i}$, $\sum_{i=1}^{s} m_i = d$

$\Rightarrow h\, g(t) = a_d \prod_{i=1}^{s} (\mu - t_i\lambda)^{m_i} = G(\lambda, \mu)$

Esercizio: Il prodotto di polinomi omogenei è un polinomio omogeneo.

Infine: siccome $\lambda \nmid G \Rightarrow h_g(t) = h(aG) = G$

Ora cons. caso $a_d = 0$

$G(\lambda, \mu) = \underbrace{a_d \mu^d}_{=0} + a_{d-1}\mu^{d-1}\lambda + \dots + a_1\mu\lambda^{d-1} + a_0\lambda^d$

Sia $k = \max\{n : \lambda^n \mid G\}$

$G = \lambda^k \cdot \bar{G}(\lambda, \mu)$, $= \lambda^k \cdot a_{d-k} \cdot \prod (\mu - t_i\lambda)^{m_i}$

$= \underbrace{a_{d-k}}_{\neq 0} \mu^{d-k}\lambda^k + a_{d-k-1}\mu^{d-k-1}\lambda^{k+1} + \dots + a_0\lambda^d$

$\bar{G} = \underbrace{a_{d-k}}_{\neq 0} \mu^{d-k} + a_{d-k-1}\mu^{d-k-1}\lambda + \dots + a_0\lambda^{d-k}$

per il punto precedente

$= a_{d-k} \cdot \prod_{i=1}^{s} (\mu - t_i\lambda)^{m_i}$ $\qquad \sum m_i = d-k$

Cons. Curva affine $C = Z(F, f)$

opp. proiettiva $\mathcal{C} = (Z_p(F), F)$

e cons. una retta affine L in rapp. parametrica $\begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d \end{cases}$

retta proiettiva $\mathcal{L}$ rapp. par. $\begin{cases} x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases}$

$\mathcal{L} = \overline{PQ}$, $[v] = P = (p_0 : p_1 : p_2)$

R $\qquad [w] = Q = (q_0 : q_1 : q_2)$

$R = [\lambda v + \mu w]$

Prop.: Caso proiettivo:

$\# Z_p(F) \cap \mathcal{L} \leq d = \deg F$

caso affine:

$\# Z(f) \cap L \leq d = \deg f$

Dim.: $Z_p(F) \cap \mathcal{L}$: risolvere

$F(\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \lambda p_2 + \mu q_2) = 0$

$= G(\lambda, \mu)$

Esercizio: $G(\lambda, \mu)$ è omogeneo e di grado d

$Z(f) \cap L$: risolvere

$f(at + b, ct + d) = g(t)$