Lezione 3 ottobre 2024

giovedì 3 ottobre 2024 09:10

Visto: dato $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo

definito $Z_p(F) = \{Q = (q_0 : q_1 : q_2) \in \mathbb{P}^2_K : F(Q) = 0\}$

$F(q_0, q_1, q_2) = 0$

$Z_p(F)$ è ben definito grazie a Eulero:

F omogeneo $\iff F(tx_0, tx_1, tx_2) \equiv t^d \cdot F(x_0, x_1, x_2)$

quindi: $Q = (q_0 : q_1 : q_2) = (\lambda q_0 : \lambda q_1 : \lambda q_2)$, $\lambda \neq 0$

$$F(q_0, q_1, q_2) = 0$$

$$\underbrace{F(\lambda q_0, \lambda q_1, \lambda q_2)}_{=0} = \underbrace{\lambda^d}_{\neq 0} \cdot \underbrace{F(q_0, q_1, q_2)}_{=0}$$

oss: In $\mathbb{A}^2_K$, dato $f \in K[x, y]$, esso def. una FUNZIONE POLINOMIALE

$$f : \mathbb{A}^2_K \longrightarrow K$$

se $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{A}^2_K$, $f(Q) := f(q_1, q_2) \in K$

e $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ è una curva di livello

INVECE: se $F \in K[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo di grado $d \geq 1$

allora F NON DEFINISCE una funzione su $\mathbb{P}^2_K$; infatti:

$$F(\lambda q_0, \lambda q_1, \lambda q_2) = \lambda^d \cdot F(q_0, q_1, q_2)$$

in generale $\neq F(q_0, q_1, q_2)$

Esempio: $F = x_1 x_2 - x_0^2$

$F(0, 1, 2) = 2 - 0 = 2$

$F(0, 2, 4) = 2 \cdot 4 - 0 \overset{\neq}{=} 8$

* * *

Ricordiamo ora che $\mathbb{A}^2_K$ si può IMMERGERE INIETTIVAMENTE in $\mathbb{P}^2_K$

Definiamo

$$j_0 : \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$$

$$j_0((q_1, q_2)) := (1 : q_1 : q_2)$$

è suriettiva? NO; la sua immagine è

$$j_0(\mathbb{A}^2_K) = \mathbb{P}^2_K \setminus \underbrace{Z_P(x_0)}_{= \{Q \in \mathbb{P}^2,\ Q = (q_0:q_1:q_2)\ :\ x_0(Q)=0\}} =: U_0$$

$q_0 = 0$

RETTA ALL'INFINITO

Infatti: sia $Q \in U_0$, $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$, $q_0 \neq 0$

$$= (1 : q_1/q_0 : q_2/q_0)$$

$$= j_0(Q')$$

$$Q' = (q_1/q_0,\ q_2/q_0)$$

E' iniettiva, perché esiste un'inversa su U_0:

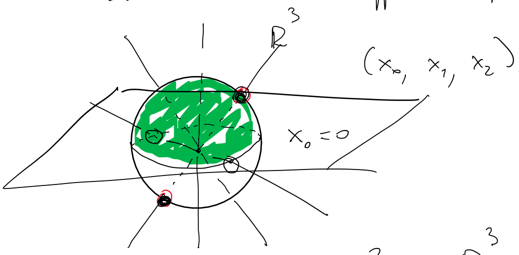
$$f_0 : U_0 \to \mathbb{A}^2_K$$

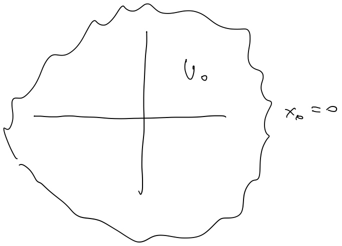
$$f_0(q_0 : q_1 : q_2) = (q_1/q_0,\ q_2/q_0)$$

$q_0 \neq 0$

$$j_0 \circ f_0 = id_{U_0}, \qquad f_0 \circ j_0 = id_{\mathbb{A}^2_K}$$

Geometricamente: cons. $\mathbb{P}^2_\mathbb{R}$; un modello è dato dalla semisfera (superiore) in $\mathbb{A}^3_\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ con il bordo quoziente con mappa antipodale





$$\mathbb{P}^2_\mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \big/ \sim \ = \boxed{S^2/\sim}$$

$$S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

possiamo cons. top. quoziente, e su S^2 cons. top. euclidea indotta

Si può dimostrare: $j_0 : \mathbb{A}^2_\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2_\mathbb{R}$

è IMM. TOPOL.

(cioè $j_0 : \underset{= \mathbb{R}^2}{\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}} \longrightarrow U_0$ è OMEOM)

$$\underbrace{j_0(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})}_{\substack{\cong \mathbb{R}^2 \\ \text{Non è compatto}}} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \underbrace{S^2/_\sim}_{\text{è compatto}}$$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è una possibile COMPATTIFICAZ. di $\mathbb{R}^2$

~ . ~ . ~

$$j_0(\mathbb{A}^2_K) \subseteq \mathbb{P}^2_K \quad ;$$

Pb.: È possibile passare da $Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2$ a equazione che contenga $j_0(Z(f))$?

Con il procedim. di omogeneizzazione:

Def.: $h : K[x,y] \to K[x_0, x_1, x_2]$

$$(hf)(x_0, x_1, x_2) := x_0^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

es: $f = f(x,y) = x \cdot y - 1$, $\deg f = 2$

$$(hf)(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \cdot \left(\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_0} - 1\right)$$
$$= x_1 x_2 - x_0^2$$

es. $g = y^2 - x^3 + x^2$, $\deg g = 3$

$$(hg) = x_0^3 \cdot \left(\frac{x_2^2}{x_0^2} - \frac{x_1^3}{x_0^3} + \frac{x_1^2}{x_0^2}\right)$$
$$= x_0 x_2^2 - x_1^3 + x_0 x_1^2$$

oss.: hf è SEMPRE OMOGENEO, dello stesso grado

Prop.: Cons. $f(x,y)$ non costante ; allora

$$j_0(Z(f)) = Z_p(hf) \cap U_0$$

Dim.: $Q \in j_0(Z(f))$

$\Updownarrow$

$Q = (1 : z_1 : z_2)$ e $(z_1, z_2) \in Z(f)$,

$Q = j_0((z_1, z_2))$ cioè

$f(z_1, z_2) = 0$

$$(hf)(Q) = \underbrace{(hf)(1, z_1, z_2)}$$

$$hf = x_0^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

$$(hf)(1, z_1, z_2) = 1^{\deg f} \cdot f\left(\frac{z_1}{1}, \frac{z_2}{1}\right)$$
$$= f(z_1, z_2) = 0$$

$\Longrightarrow$ $j_0(Z(f)) \subseteq Z_p(hf) \cap U_0$

L'altra inclusione: $Q \in Z_p(hf) \cap U_0$

posso scegliere $Q = (1 : q_1 : q_2)$

$$(hf)(Q) = 0$$

come prima $= f(q_1, q_2) = 0$

Def.: Data $(Z(f), f) = C$ curva affine, la sua CHIUSURA PROIETTIVA è la curva proiettiva $\bar{C} = (Z_p(hf), hf)$

Viceversa, data $(Z_p(F), F)$ proiettiva, possiamo trovare un'equazione di

$$f_0(Z_p(F) \cap U_0) \subseteq \mathbb{A}^2_K$$
$$\Vert$$
$$j_0^{-1}$$

Def: Dato $F \in K[x_0, x_1, x_2]$, pongo $a : K[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow K[x, y]$,

$$(aF)(x,y) := F(1, x, y)$$

a si dice DEOMOGENEIZZAZIONE di F rispetto a x_0

OSS.: Cons. $F = x_1 x_2 - x_0^2$

$aF = F(1, x, y) = x \cdot y - 1$
il grado è mantenuto

invece $G = x_0 x_1 x_2 - x_0 x_1^2 + x_0^3$, $\deg G = 3$

$aG = G(1, x, y) = 1 \cdot x \cdot y - 1 \cdot x^2 + 1$
$= xy - x^2 + 1$
$\Rightarrow \deg(aG) = 2 < \deg G$

Prop.: Dato G omogeneo, $G = G(x_0, x_1, x_2)$

si ha $\deg G = \deg aG \iff x_0 \nmid G$
non divide

Prop.: Cons. $(Z_p(F), F)$; allora

$$f_0(Z_p(F) \cap U_0) = Z(aF)$$

Dim: Simile a prima; esercizio

OSS: $h : K[x, y] \longrightarrow K[x_0, x_1, x_2]$

$a : K[x_0, x_1, x_2] \to K[x, y]$

$a(hf) = f$

$a\left(x_0^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)\right) = 1^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x}{1}, \frac{y}{1}\right)$
$= f$

$h(aF) \neq F$: es. $F = x_0 x_1 x_2 - x_0 x_2^2 + x_0^3$
F omogeneo $= x_0(x_1 x_2 - x_2^2 + x_0^2)$
$aF = xy - y^2 + 1$

$$h(aF) = x_1 x_2 - x_2^2 + x_0^2$$

Si può dimostrare: $\exists\ k \geq 0 : x_0^k \cdot h(aF) = F$

OSS.: Tutto si può ripetere sostituendo a x_0 l'indet. x_1 opp. x_2:

$$j_1 : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$$

$$j_1(z_1, z_2) = (z_1 : 1 : z_2)$$

$$j_1(\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}) = U_1 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus Z_p(x_1)$$

- $a_{x_1} F$ rispetto a x_1 : $(aF)(x,z) = F(x,1,z)$

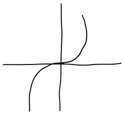
$$(h_{x_1} f(x,z))(x_0, x_1, x_2) = x_1^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right)$$

Analog. per x_2

$\Rightarrow$ otteniamo $U_0, U_1, U_2 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$

e si ha $U_0 \cup U_1 \cup U_2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$

Esempio : $y = x^3$



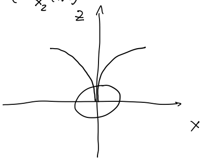
$Z(y - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$

chiusura proiettiva: $f = y - x^3$

$$h_{x_0} f = x_0^2 x_2 - x_1^3$$

$Z_p(hf) \subseteq \mathbb{P}^2$

$\cap\ U_2$: $l_2(Z_p(hf)) \cap U_2) = Z(a_{x_2}(hf))$

$= Z(z^2 - x^3)$