Lezione 8 ottobre 2024

martedì 8 ottobre 2024 16:46

Visto: consideriamo $Z(f) \cap \ell$, ℓ retta affine
$Z_p(F) \cap L$, L proiettiva

Teo: $\boxed{\#(Z(f)\cap \ell) \leq \deg f}$

$\#(Z_p(F)\cap L) \leq \deg F$

oss: $Z(f) \cap \ell$ sono determinati

cons. ℓ: $\begin{cases} x = \ell t + q_1 \\ y = mt + q_2 \end{cases}$ e

sostituendo: $f(\ell t + q_1, mt + q_2) = 0$
$\in K[t]$

Se $f(\ell t + q_1, mt + q_2) \equiv 0$

$\Longleftrightarrow$

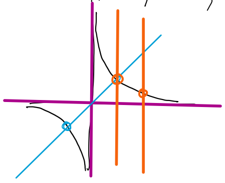
$\ell \subseteq Z(f)$

Se invece $\ell \not\subseteq Z(f)$, otteniamo un polinomio in t non nullo, di grado $\leq \deg f$.

Nel caso affine, anche se $K = \overline{K}$, il grado può scendere, addirittura grado $= 0$.

Esempio:

$f(x,y) = xy - 1$, $Z(f)$ iperbole equilatera



$y=0$: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$

$f(t,0) = -1$

$f(t,0) = 0$

$-1 = 0$ IMPOSSIB.

Prendo generica retta $\begin{cases} x = \ell t + q_1 \\ y = mt + q_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = q_1 \\ y = mt + q_2 \end{cases}$

$(\ell t + q_1)(mt + q_2) - 1 = 0$

$\ell m t^2 + (\ell q_2 + m q_1)t + q_1 q_2 - 1 = 0$

se $\ell = 0$ $(m \neq 0)$ $\Longrightarrow$ $(\underset{\neq 0}{m}\, q_1)t + (q_1 q_2 - 1) = 0$

se $\boxed{q_1 = 0}$: $-1 = 0$

se $q_1 \neq 0$: eq. di 1° grado

$\Longrightarrow$ 1 intersezione

Se $m = 0$ analogo

Se $\ell \cdot m \neq 0$ $\Longrightarrow$ il polinomio ha grado 2

Invece nel proiettivo:

la chiusura proiettiva ha eq.

F: $\underbrace{x_1 x_2 - x_0^2} = 0$; $L = \overline{AB}$

$A = (a_0 : a_1 : a_2)$
$B = (b_0 : b_1 : b_2)$

L: $\begin{cases} x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0 \\ x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \end{cases}$

$Z_p(F) \cap L$: $F(\lambda a_0 + \mu b_0, \ldots, \lambda a_2 + \mu b_2) = G(\lambda, \mu)$

Se $G(\lambda,\mu)\equiv 0 \iff L \subseteq Z_p(F)$

Supp. $L \not\subseteq Z_p(F)$:

$$G(\lambda,\mu) = (\lambda a_1+\mu b_1)(\lambda a_2+\mu b_2)-(\lambda a_0+\mu b_0)^2 = 0$$

$$= \underbrace{(a_1a_2-a_0^2)}_{F(A)}\lambda^2 + (a_1b_2+b_1a_2-2a_0b_0)\lambda\mu + \underbrace{(b_1b_2-b_0^2)}_{F(B)}\mu^2 = 0$$

$F(A)$: posso supp. $\neq 0$
(cioè $A \notin Z_p(F)$)

IN OGNI CASO, $G(\lambda,\mu)$ ha grado 2, si fattorizza nel prodotto di 2 fattori lineari omogenei ($K=\overline{K}$)

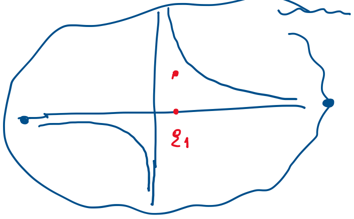
$\Rightarrow$ in $\mathbb{P}^2_K$, $\boxed{Z_p(F)\cap L \neq \emptyset}$ (*) (c'è almeno 1 coppia $(\bar\lambda:\bar\mu)$ t.c. $G(\bar\lambda,\bar\mu)=0$

Di più: se riesco a definire la "molteplicità" della coppia omogenea $(\bar\lambda:\bar\mu)$ come soluzione di $G(\lambda,\mu)=0$, avremo che $\# Z_p(F)\cap L$ contate con le moltepl. $= 2$, ovvero $=0$

(*) nel caso $x_1x_2-x_0^2=0$ e $x_2=0$

$\Rightarrow -x_0^2=0$

$\Rightarrow x_0=0$ $\Rightarrow Z_p(x_1x_2-x_0^2)\cap Z_p(x_2) = \{(0:1:0)\}$



rette verticali $x=\varrho_1$

nel proiettivo $(1:\varrho_1:0)=A$

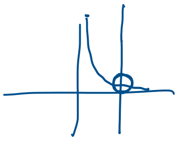
$(1:\varrho_1:1)=B$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda\cdot 1+\mu\cdot 1\\ x_1 = \lambda\cdot\varrho_1+\mu\cdot\varrho_1\\ x_2 = \lambda\cdot 0+\mu\cdot 1\end{cases}$$

$(\bar{\bar\lambda}:\bar{\bar\mu}) = (\varrho_1-1:1)$

$$\begin{cases} x_0=0\\ x_1=0\\ x_2=-1\end{cases} \qquad \begin{cases} x_0=\varrho_1\\ x_1=\varrho_1^2\\ x_2=1\end{cases}$$

$(\bar\lambda:\bar\mu)=(1:-1) \rightsquigarrow (0:0:1)$



$$\begin{cases} x_0=\lambda+\mu\\ x_1=(\lambda+\mu)\varrho_1\\ x_2=\mu\end{cases}$$

$x_1x_2-x_0^2=0$: $((\lambda+\mu)\varrho_1\cdot\mu)-(\lambda+\mu)^2=0$

$(\lambda+\mu)\,(\varrho_1\mu-(\lambda+\mu))=0$

$\underbrace{(\lambda+\mu)}\,\underbrace{(-\lambda+(\varrho_1-1)\mu)}=0$

$(\bar\lambda:\bar\mu)=(1:-1)$ è una radice

$(\bar{\bar\lambda}:\bar{\bar\mu})=(\varrho_1-1:1)$

Def: Dato $G(\lambda,\mu)\in K[\lambda,\mu]$ omogeneo di grado d. Abbiamo visto che se $K=\overline{K}$, è possibile fattorizzare G in d fattori omogenei lineari:

$$G(\lambda,\mu)=\prod_{i=1}^{d}\underbrace{(a_i\lambda+b_i\mu)}$$

gli zeri di G sono tutte le coppie proporzionali a una coppia del tipo

$(-b_i:a_i)$.

La **MOLTEPLICITÀ** della coppia $(-b_i:a_i)$ è la molteplicità del fattore $(a_i\lambda+b_i\mu)$ nella fattorizzazione di $G(\lambda,\mu)$.

Def: Cons. $(Z_p(F),F)$ curva proiettiva $L\subseteq\mathbb{P}^2_K$ retta; sia $\underset{=(q_0:q_1:q_2)}{Q}\in Z_p(F)\cap L$

sia $B\in L$, $\underset{=(b_0:b_1:b_2)}{B}\neq Q$

$$L:\begin{cases}x_0=\lambda q_0+\mu b_0\\x_1=\lambda q_1+\mu b_1\\x_2=\lambda q_2+\mu b_2\end{cases}$$

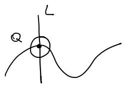
il punto Q corrisponde a $(\bar{\lambda}:\bar{\mu})=(1:0)$

Siccome $Q\in Z_p(F)\cap L$, la coppia $(1:0)$ annulla $G(\lambda,\mu)=F(\lambda q_0+\mu b_0,\dots)$ e definiamo

$I_Q(Z_p(F),L):=$ molteplicità di $(1:0)$ come radice omogenea di $G(\lambda,\mu)$

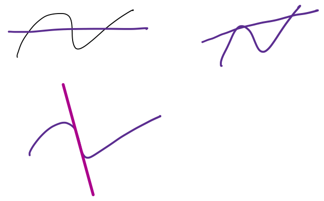
MOLT. DI INTERS. tra L e $Z_p(F)$ in Q

OSS: $(1:0)$ corrisponde al fattore μ



Teorema: Se $K=\overline{K}$, $Z_p(F)\subseteq\mathbb{P}^2$, $\deg F=d\geq 1$ sia $L\not\subseteq Z_p(F)$ retta. Allora:

$$\sum_{Q\in Z_p(F)\cap L} I_Q(Z_p(F),L)=d$$



Def.: Se $Q\in Z_p(F)\cap L$ e $I_Q(Z_p(F),L)=1$, allora diremo che $Z_p(F)$ e L si INTERSECANO TRASVERSALMENTE in Q.

* * *

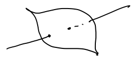
Se cons. $\mathbb{P}^n_K$ con $n\geq 3$, e cons. $F\in K[x_0,x_1,\dots,x_n]$ omog. di grado $d\geq 1$

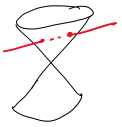
Def.: $(Z_p(F),F)$ IPERSUP. PROIETTIVA

Si def. $I_Q(Z_p(F),L)$, $L\subseteq\mathbb{P}^n$ retta come prima

Teorema: $\sum I_Q(Z_p(F), L) = d$

se $L \not\subseteq Z_p(F)$ $Q \in Z_p(F) \cap L$

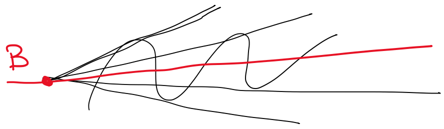




È l'interpretazione geometrica del grado d.

FATTO: In $\mathbb{P}^2_K$, data $Z_p(F)$ qualunque,
$\exists$ una retta (in realtà infinite) t.c.

$$L \cap Z_p(F) = d \text{ punti distinti}$$



PUNTI SINGOLARI DI CURVE PIANE

Def: Cons. $(Z_p(F), F)$ $\deg F \geq 1$

Un punto $Q \in Z_p(F)$ si dice **SINGOLARE**

se: $\forall\, L$ retta $\ni Q$, si ha

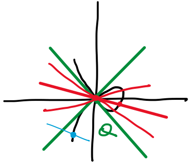
$$I_Q(Z_p(F), L) \geq 2 .$$

CONVENZIONE: se $L \subseteq Z_p(F)$, poniamo

$Q \in L$: $\quad I_Q(Z_p(F), L) = +\infty$

Def.: $Q \in Z_p(F)$ è NONSINGOLARE
o PUNTO LISCIO se non è singolare.

Es.: $\quad y^2 + x^3 - x^2 = 0$



chiusura proiettiva:

$$x_0 x_2^2 + x_1^3 - x_0 x_1^2 = 0$$

affermo che $\underbrace{(1:0:0)}_{Q}$ è singolare

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + \mu b_0 \\ x_1 = \mu b_1 \\ x_2 = \mu b_2 \end{cases}$$

sia $B = (1 : b_1 : b_2)$

$B \neq Q$

$$(\lambda + \mu b_0)\mu^2 b_2^2 + \mu^3 b_1^3 - (\lambda + \mu b_0)\mu^2 b_1^2 = 0$$

$$\underbrace{\mu^2}\left((\lambda + \mu b_0) b_2^2 + \mu b_1^3 - (\lambda + \mu b_0) b_1^2\right) = 0$$

corr. alla coppia $(1:0)$ $\Rightarrow I_Q(\cdot\,\cdot) \geq 2$

$$= \left((b_0 b_2^2 + b_1^3 - b_0 b_1^2)\mu + (b_2^2 - b_1^2)\lambda\right)$$

la molt. del fattore μ è 3 $\Leftrightarrow$
il coeff. è zero $\quad \Leftrightarrow b_2^2 - b_1^2 = 0$

$(b_2 - b_1)(b_2 + b_1)$