Lezione 1 ottobre 2024

martedì 1 ottobre 2024 16:52

Curve affini $(Z(f), f)$, $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$

$Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2$

Def.: Se f è polin. irriduc., allora

$C = (Z(f), f)$ si dice IRRIDUC.

altrimenti RIDUCIBILE

Inoltre: Se $\boxed{f = f_1^{m_1} \cdot f_2^{m_2} \cdot \cdots f_r^{m_r}}$

$m_i \geqslant 1$

allora $Z(f) = Z(f_1) \cup Z(f_2) \cup \cdots \cup Z(f_r)$

$$\underset{=0}{f(p_1,p_2)} = (f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r})(p_1,p_2) = \underbrace{(\underbrace{f_1(p_1,p_2)}_{\in \mathbb{K}})^{m_1} \cdots (\underbrace{f_r(p_1,p_2)}_{\in \mathbb{K}})^{m_r}}_{=0}$$

$P = (p_1, p_2)$

$$\Updownarrow$$

$\exists\, i \in \{1, .., r\}$ t.c.

$f_i(p_1, p_2) = 0$

Def.: Se $f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$, f_i irriducibili, le curve

$C_i := (Z(f_i), f_i)$ si chiamano

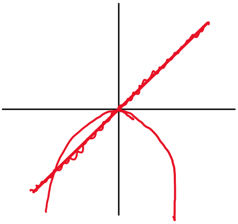
COMPONENTI IRRIDUCIBILI, di molteplicità m_i

Es: $f(x,y) = (x-y)^2 \cdot (\underline{x^2+y})$

$= f_1^2 \cdot f_2$

La retta $Z(x-y)$ è una comp. di molt. 2 (retta doppia)

La parabola $Z(x^2+y)$ è una comp. irr. di molt. 1



Def.: Un polinomio

$$f(x,y) = f_1^{\mu_1} \cdot f_2^{\mu_2} \cdots f_r^{\mu_r}$$

f_i IRRIDUCIBILI si dice RIDOTTO

se $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 1$

(non ha fattori multipli)

* * *

DIMENSIONE SUPERIORE

Def.: Cons. $\mathbb{A}^n_K \ (= K^n)$

e cons. $f(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$, non costante ($\deg f \geq 1$)

Una IPERSUPERFICIE AFFINE è una coppia $(Z(f), f)$

$Z(ax+by+c)$ retta

$Z(ax+by+cz+d)$ piano

$Z(a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n+b) \subseteq \mathbb{A}^n$ IPERPIANO

Se $n=3$: $\mathbb{A}^3_K$ $(Z(f(x,y,z)), f)$

SUPERFICIE

* * *

COMPORTAMENTO SOTTO AFFINITÀ

Sia $\alpha: \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K$ affinità, quindi biiettiva, con equazioni lineari del tipo:

$\alpha((x,y)) = (x_1, y_1)$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \end{array}\right. \begin{array}{l} = \\ = \end{array} \boxed{\begin{array}{l} ax+by \\ dx+ey \end{array}} \begin{array}{l} +c \\ +d \end{array}$$

dove $\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \neq 0$

Data una curva $(\underbrace{Z(f)}_{\subseteq \mathbb{A}^2}, f)$, si ha

$$P_1 \in \alpha(Z(f)) \iff \alpha^{-1}(P_1) \in Z(f)$$

$$\iff f(\alpha^{-1}(P_1)) = 0$$

$$\Downarrow \qquad P_1 = (x_1, y_1)$$

Ho bisogno di una rappresentazione di α^{-1}:

$$\alpha^{-1}: \quad \begin{cases} x = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 \\ y = e_1 x_1 + d_1 y_1 + h_1 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{f(a_1x_1+b_1y_1+c_1,\, e_1x_1+d_1y_1+h_1)}_{=:\, f_1(x_1,\, y_1)} = 0$$

Prop.: $\alpha(Z(f)) = Z(f_1)$

Def.: La curva $(Z(f_1), f_1)$ si dice **IMMAGINE** di $(Z(f), f)$ tramite α.

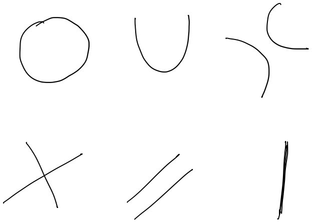
Due curve alg. si dicono AFFINEMENTE EQUIVALENTI se $\exists\ \alpha: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ aff. che manda una nell'altra.

OSS.: l'equivalenza affine è una REL. DI EQUIVAL.

RICHIAMO: Classificazione affine delle coniche

= elenco di tutte le classi di equiv.,

esibendo una rappresentante per ogni classe.



Vedremo: classif. affine delle cubiche:

INFINITE CLASSI DI EQUIV.

PROP.: Un'affinità manda curve di grado d in curve dello stesso grado.

Dim.: $$f = \dots + \underbrace{\overset{\in K}{a}\cdot x^k y^h}_{\text{ha grado } k+h} + \dots$$

$$f_1 = \dots + \underbrace{\overset{\in K}{a}\cdot(a_1x_1+b_1y_1+c_1)^k\cdot(e_1x_1+d_1y_1+h_1)^h}_{\text{ha grado } \le k+h}$$

$$\Rightarrow \deg f_1 \le \deg f$$

$$f_1(x_1,y_1) = f_1 = f(\alpha^{-1}(x_1,y_1)) \qquad (x_1,y_1)=\alpha(x,y)$$

$$f_1(x_1,y_1) = f(\alpha(x,y))$$

$$= f(ax+by+c,\ dx+ey+f)$$

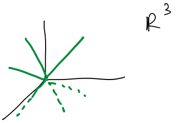
$$\deg f \le \deg f_1$$

CURVE PROIETTIVE

Def.: $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} := \mathbb{P}(\mathbb{K}^3) = \dfrac{\mathbb{K}^3 \setminus \{0\}}{\sim}$

$\sim$ REL. DI PROPORZION.

$$v \sim w \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } w = \lambda v$$



Def: In $\mathbb{K}^3$ fissiamo la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$; ogni v ha coordinate $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = v$

Allora poniamo $P = [v]$ le **COORDINATE OMOGENEE** : $P = \underbrace{(p_1 : p_2 : p_2)}_{[p_1,\, p_2,\, p_3]}$

⚠ Le coord. omog. non sono univoc. determinate

se $[w] = [v] = P = (\lambda p_1 : \lambda p_2 : \lambda p_3)$

$$w = \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \\ \lambda p_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sono determinate a meno di fattore di proporz.

Pb: che tipo di polin. scegliere per avere un luogo degli zeri ben definito (non dip. delle scelte dello coord. omog.)?

Es: $f(x_0, x_1, x_2) = x_0 - x_1 x_2$

$f(1,1,1) = 1 - 1 \cdot 1 = 0$

$f(2,2,2) = 2 - 2 \cdot 2 = -2 \neq 0$

Gli zeri non sono ben definiti

Abbiamo bisogno POL. OMOGENEI:

Def.: $F(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2]$

$$F = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{costante}}}{F_0} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{somma di tutti i monomi} \\ \text{di grado 1}}}{F_1} + F_2 + \dots + F_d$$

F si dice OMOGENEO se

$$F_0 = F_1 = F_2 = \dots = F_{d-1} \equiv 0$$

Es: $F = x_0 x_1 - x_2^2$ $\qquad F(1,1,1) = 1 \cdot 1 - 1^2 = 0$

$F(2,2,2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

$F(\lambda,\lambda,\lambda) = \lambda \cdot \lambda - \lambda^2 = 0$

$x_0 x_1^2 - x_2^3$

$x_0 x_1 x_2^2 + 4 x_0^4 - x_1^2 x_2^2$

IDENTITÀ DI EULERO:

F è omogeneo $\iff F(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d \cdot F(x_0, x_1, x_2) \in K[x_0, x_1, x_2, t]$

Dim. $\Longrightarrow$ facile: $F = \sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$

$$F(tx_0, tx_1, tx_2) = \sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0 i_1 i_2} (tx_0)^{i_0} (tx_1)^{i_1} (tx_2)^{i_2}$$

$$= \sum a_{i_0 i_1 i_2} t^d x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$$

$$= t^d \cdot \sum a_{i_0 i_1 i_1} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$$

Viceversa: Sia $F(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d F(x_0, x_1, x_2)$

$$\boxed{F = F_0 + F_1 + \dots + F_d}$$

$$F(tx_0, tx_1, tx_2) = \underbrace{F_0(tx_0, tx_1, tx_2)}_{\text{costante}} + \underbrace{F_1(tx_0, tx_1, tx_2)}_{\text{omog. di grado 1}} + \dots + \underbrace{F_d(tx_0, tx_1, tx_2)}_{\text{omog. di grado d}}$$

$$= F_0 + t \cdot F_1(x_0, x_1, x_2) + t^2 F_2(x_0, x_1, x_2) + \dots + t^d F_d(x_0, x_1, x_2)$$

$$= t^d \cdot F_0 + t^d \cdot F_1 + \dots + t^d F_d$$

$$\Updownarrow$$

$$F_0 = F_1 = \dots = F_{d-1} = 0$$

Def: Una CURVA PROIETTIVA è $(\underbrace{\overbrace{Z_p(F)}^{\subseteq \mathbb{P}^2}}_{\text{zeri proiettivi}}, F)$
dove F è omogeneo

(se scrivo $Z(F) \subseteq \mathbb{A}^3$)