Prodotto righe per colonne

$$(c_P \ \ c_L \ \ c_U) \cdot \begin{pmatrix} n_P \\ n_L \\ n_U \end{pmatrix} := c_P \cdot n_P + c_L \cdot n_L + c_U \cdot n_U$$

Più in generale, possiamo definire il prodotto righe per colonne tra una matrice $1 \times n$ e una matrice $n \times 1$:

$$(a_{11} \ \ a_{12} \ \ \dots \ \ a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} := a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1}$$

Supponiamo che in un altro negozio ci siano i seguenti costi unitari:

$$c_P' = -3€ \qquad c_L' = -2€ \qquad c_U' = -1€$$

Possiamo tenere sotto controllo i costi unitari ottenendo una matrice:

$$\begin{pmatrix} c_P & c_L & c_U \\ c_P' & c_L' & c_U' \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

Potrebbe essere ragionevole ottenere un prodotto tra

$$\begin{pmatrix} c_P & c_L & c_U \\ c_P' & c_L' & c_U' \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} n_P \\ n_L \\ n_U \end{pmatrix}$$

e lo otteniamo come la matrice 2×1:

$$\begin{pmatrix} c_P \cdot n_P + c_L \cdot n_L + c_U \cdot n_U \\ c_P' \cdot n_P + c_L' \cdot n_L + c_U' \cdot n_U \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$$

Riassumendo, abbiamo moltiplicato una matrice $2 \times \underline{3}$ per una $\underline{3} \times 1$ e abbiamo ottenuto una matrice 2×1. Notiamo che:

* il numero di righe della matrice risultante è il numero di righe della prima matrice
  il numero di colonne della matrice risultante è il numero di colonne della seconda matrice
* il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda matrice.

Se ora acquistassimo altre quantità, potremmo immagazzinare tutta l'informazione in un prodotto di questo tipo:

$$\begin{pmatrix} c_P & c_L & c_U \\ c_P' & c_L' & c_U' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_P & n_P' \\ n_L & n_L' \\ n_U & n_U' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_P n_P + c_L n_L + c_U n_U & c_P n_P' + c_L \cdot n_L' + c_U \cdot n_U' \\ c_P' n_P + c_L' n_L + c_U' n_U & c_P' n_P' + c_L' \cdot n_L' + c_U' n_U' \end{pmatrix}$$

A questo punto diamo una definizione generale:

Def: sia $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ e sia $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, allora definiamo il prodotto $A \cdot B$ come il numero (o, equivalentemente come la matrice 1×1):

$$A \cdot B = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1}$$

in generale, se $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, allora definiamo il prodotto $A \cdot B$ come quella matrice la cui entrata ij-esima è data da:

$$(A \cdot B)_{ij} := A_{(i)} \cdot B^{(j)} =$$

i-esima riga di A

prodotto righe per colonne

j-esima colonna di B

$$= a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Oss: il prodotto righe per colonne tra due matrici è definito soltanto quando il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ (-3)(-1) + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & (-3) \cdot 2 + (-2)(-1) + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 2}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 3}$$

Def: sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definiamo la matrice <u>unità</u>, che denotiamo con $\mathbb{1}_n$ come quella matrice quadrata $n \times n$ in cui tutte le entrate sono nulle, fuorché quelle della diagonale principale che sono uguali a 1; ovvero

$$(\mathbb{1}_n)_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Prop: la matrice $\mathbb{1}_n$ soddisfa: che ogni $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ e per ogni $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ vale che

$$\mathbb{1}_n \cdot A = A \quad e \quad B \cdot \mathbb{1}_n = B$$

Esempio: se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

pertanto $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Notiamo che $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono entrambe definite soltanto se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Prop: siano $A, B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e siano $C, D \in M_{p,n}(\mathbb{R})$; allora valgono:

1. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (proprietà distributiva a destra)
2. $A \cdot (C+D) = A \cdot C + A \cdot D$ (proprietà distributiva a sinistra)

Prop: sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q,n}(\mathbb{R})$, allora

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{A}_{m \times p} \cdot \underbrace{B}_{p \times q})}_{m \times q} \cdot \underbrace{C}_{q \times n}}_{m \times n} = \underbrace{\underbrace{A}_{m \times p} \cdot \underbrace{(\underbrace{B}_{p \times q} \cdot \underbrace{C}_{q \times n})}_{p \times n}}_{m \times n}$$

(proprietà associativa del prodotto)

Prop: sia $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e sia $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$; allora

$${}^t(A \cdot B) = \begin{cases} B \cdot A \ ? & ① \\ {}^tA \cdot {}^tB \ ? & ② \end{cases}$$

① non può essere vero perché in generale non ha senso moltiplicare una matrice $p \times n$ per una $m \times p$

② non può essere vero perché in generale non ha senso moltiplicare una matrice $p \times m$ per una $n \times p$.

vale invece che

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

Dim: per dimostrare che ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ dimostriamo che le matrici a destra e a sinistra hanno le medesime entrate; sia dunque $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$;

$$({}^t(A \cdot B))_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = A_{(j)} \cdot B^{(i)}$$

$$({}^tB \cdot {}^tA)_{ij} = ({}^tB)_{(i)} \cdot ({}^tA)^{(j)} = A_{(j)} \cdot B^{(i)}$$

uguaglianza da verificare per esercizio

questo dimostra la tesi.

Oss: nel caso delle matrici quadrate, la matrice unità $\mathbb{1}_n$ funge da <u>elemento neutro</u> per il prodotto righe per colonne; infatti per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$ vale che

$$\mathbb{1}_n \cdot A = A \cdot \mathbb{1}_n = A$$

Oss: nei numeri reali, dato un numero $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, diciamo che un numero $b \in \mathbb{R}$ è <u>inverso</u> di a se vale che

$$a \cdot b = 1 \qquad e \qquad b \cdot a = 1$$

nei numeri reali l'inverso è unico e si denota con a^{-1} oppure $1/a$.

Def: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$; A si dice <u>invertibile</u> se esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$

una tale matrice B si dice <u>inversa</u> di A.

Prop: siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, allora:

1. se A è invertibile, allora l'inversa di A è unica e si denota con A^{-1}.
2. se A e B sono invertibili, allora lo è anche $A \cdot B$ e la sua inversa è $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Dim: 1. supponiamo che B e C soddisfino entrambe il requisito di essere le inverse di A, allora

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$
$$A \cdot C = C \cdot A = \mathbb{1}_n$$

quindi

$$B = B \cdot \mathbb{1}_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C$$
$$= \mathbb{1}_n \cdot C = C$$

2. mostriamo che $B^{-1} \cdot A^{-1}$ è l'inversa di $A \cdot B$

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1}$$
$$= A \cdot \mathbb{1}_n \cdot A^{-1}$$
$$= A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n$$

analogamente si verifica che $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = \mathbb{1}_n$.