ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO

Vlacci Fabio

Dipartimento di Matematica "U. Dini", Università di Firenze
Viale Morgagni 67/A, 50134 - Firenze, Italy, vlacci@math.unifi.it

October 17, 2015

Permutazioni semplici

$$P_n = n!$$

È il numero di modi in cui si possono sistemare (permutandone l'ordine) n oggetti (distinti) in n posti (distinti).

Permutazioni semplici

$$P_n = n!$$

È il numero di modi in cui si possono sistemare (permutandone l'ordine) n oggetti (distinti) in n posti (distinti).

$$\begin{cases} 0! & = & 1 \\ n! & = & n \cdot (n-1)! \end{cases}$$

Disposizioni semplici

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

È il numero di modi in cui si possono sistemare (permutandone l'ordine) n oggetti (distinti) in k posti (distinti) con $k \leq n$.

Disposizioni semplici

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

È il numero di modi in cui si possono sistemare (permutandone l'ordine) n oggetti (distinti) in k posti (distinti) con $k \leq n$.

$$D_{n,n} = P_n = n! \quad D_{n,1} = n$$

Combinazioni semplici

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

È il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono ottenere da n oggetti (distinti) con $k \leq n$.

Combinazioni semplici

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

È il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono ottenere da n oggetti (distinti) con $k \leq n$.

$$C_{n,k} \cdot P_k = D_{n,k}$$

Combinazioni semplici e coefficienti binomiali

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Combinazioni semplici e coefficienti binomiali

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Combinazioni semplici e coefficienti binomiali

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ad esempio, il coefficiente di $a^3 b^2$ nello sviluppo di

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

è $10 = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$,

Combinazioni semplici e coefficienti binomiali

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ad esempio, il coefficiente di $a^3 b^2$ nello sviluppo di

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

è $10 = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$, poiché $a^3 b^2 = aaabb$

Combinazioni semplici e coefficienti binomiali

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ad esempio, il coefficiente di $a^3 b^2$ nello sviluppo di

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

è $10 = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$, poiché $a^3 b^2 = aaabb$ ma anche

$$\begin{aligned} a^3 b^2 &= aabab = baaba = bbaaa = baaab \\ &= abaab = abbaa = ababa = aabba = babaa \end{aligned}$$

$* * * \circ \circ$	*aaabb*
$* * \circ * \circ$	*aabab*
$* \circ * * \circ$	*abaab*
$* \circ * \circ *$	*ababa*
$\circ * * * \circ$	*baaab*
$\circ \circ * * *$	*bbaaa*
$\circ * \circ * *$	*babaa*
$* * \circ \circ *$	*aabba*
$* \circ \circ * *$	*abbaa*
$\circ * * \circ *$	*baaba*

Proprietà dei coefficienti binomiali

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Proprietà dei coefficienti binomiali

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Proprietà dei coefficienti binomiali

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Proprietà dei coefficienti binomiali

- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Proprietà dei coefficienti binomiali

- $$\sum_{s=0}^{k} \binom{n}{s} \binom{m}{k-s} = \binom{n+m}{k}$$

Proprietà dei coefficienti binomiali

- $$\sum_{s=0}^{k} \binom{n}{s} \binom{m}{k-s} = \binom{n+m}{k}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Permutazioni con ripetizione

$$P^*_{n_1+n_2+\ldots n_k=n} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

È il numero di modi in cui si possono sistemare n oggetti (non tutti distinti) di cui n_1 uguali ad un oggetto A_1, n_2 uguali ad un oggetto A_2, $\cdots$ n_k uguali ad un oggetto A_k, con $A_i \neq A_j$ per $i \neq j$ e con la ovvia condizione $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Disposizioni con ripetizione

$$D^*_{n,k} = n^k$$

È il numero di modi in cui si possono sistemare (permutandone l'ordine) n oggetti (non tutti distinti) in k posti (distinti) con $k \leq n$.

Combinazioni con ripetizione

$$C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

È il numero di modi in cui si possono suddividere n oggetti tra k insiemi con $k \leq n$ e accettando che qualcuno di tali insiemi risulti vuoto.

Combinazioni con ripetizione

$$C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

È il numero di modi in cui si possono suddividere n oggetti tra k insiemi con $k \leq n$ e accettando che qualcuno di tali insiemi risulti vuoto.
Ad esempio $7 + 0 = 0 + 7 = 6 + 1 = 1 + 6$

Combinazioni con ripetizione

$$C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

È il numero di modi in cui si possono suddividere n oggetti tra k insiemi con $k \leq n$ e accettando che qualcuno di tali insiemi risulti vuoto.
Ad esempio $7+0=0+7=6+1=1+6$ ma anche $5+2=2+5=4+3=3+4$

Combinazioni con ripetizione

$$C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

È il numero di modi in cui si possono suddividere n oggetti tra k insiemi con $k \leq n$ e accettando che qualcuno di tali insiemi risulti vuoto.
Ad esempio $7+0=0+7=6+1=1+6$ ma anche $5+2=2+5=4+3=3+4$

$$\begin{array}{ll} |*******\qquad & 0+7 \\ *|****** & 1+6 \\ **|***** & 2+5 \\ ***|**** & 3+4 \end{array}$$