

Esercizi II settimana Ist. Matematiche A (Scienze Geologiche) – Prof. Fabio Vlacci
A.A. 2024/2025

1. Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ risulta

$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2.$$

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO AUTUNNALE 2022]

2. Mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero $d_n = n(17n^2 + 103)$ è un multiplo di 6.

[PARTE DI ESERCIZIO PROPOSTO NEL PREAPPELLO DI DICEMBRE 2023]

3. Stabilire se la relazione definita da

$$x\mathcal{R}y \iff x \cdot y > 0$$

per $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è o meno una relazione di equivalenza.

[ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO AUTUNNALE 2022]

4. Data la funzione $k \in \mathbb{N} \mapsto \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) := a_k \in \mathbb{Q}$ ($k \geq 1$) si consideri

$$b_n := a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \quad n \geq 2.$$

Si mostri - usando il Principio di Induzione - che $b_n = \frac{n+1}{2n}$.

Si trovi infine il valore mediano dei dati

$$\{4a_2, 9a_3 - 6b_3, 4b_2 + 9a_3, a_1 + 3b_3\}.$$

[PARTE DI ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO AUTUNNALE 2024]

5. Sia $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione della somma dei primi n multipli di 6. Si mostri che $s_n = 3n(n+1)$. Si trovi il valore mediano dei dati

$$\{s_3 - 3s_1, 2s_2 + s_1, s_1 + s_3, s_3 - s_2 + s_1\}.$$

[PARTE DI ESERCIZIO PROPOSTO NELL'APPELLO ESTIVO 2024]

6. Mostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$, risulta

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7. Si considerino gli insiemi $A = \{10, 20, 30, 40, 60, 400\}$, $A' = \{10, 20, 30, 40, 60\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e $B' = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ e sia R la relazione così definita

$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ ha la prima cifra (a sinistra) uguale alla prima cifra (a sinistra) di } y$$

quando $x \in A$ e $y \in B$. Si stabilisca - **motivando la risposta** - se R è una funzione o meno. In caso affermativo si determini se tale funzione risulta iniettiva e/o suriettiva e/o biiettiva. Si ripeta lo stesso esercizio quando

a) $x \in A$ e $y \in B'$;

b) $x \in A'$ e $y \in B'$;

c) $x \in A'$ e $y \in B$.

8. Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-3, -1, 2, 5, 9\}$ due sottoinsiemi di \mathbb{Z} . Allora funzioni iniettive e strettamente monotone di dominio A e codominio B

i esistono e sono esattamente 4

ii esistono e sono esattamente 2

iii esistono e sono esattamente 1

iv non esistono