

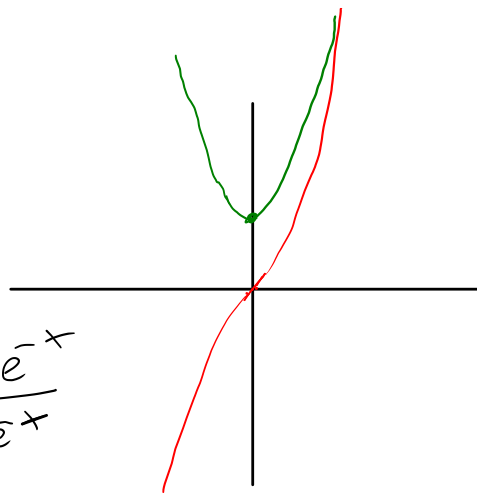
10 ottobre

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh(-x) = -\tanh(x)$$



$$|\sinh(x)| < |\cosh(x)|$$

$$|e^x - e^{-x}| < |e^x + e^{-x}|$$

$$(e^x - e^{-x})^2 < (e^x + e^{-x})^2$$

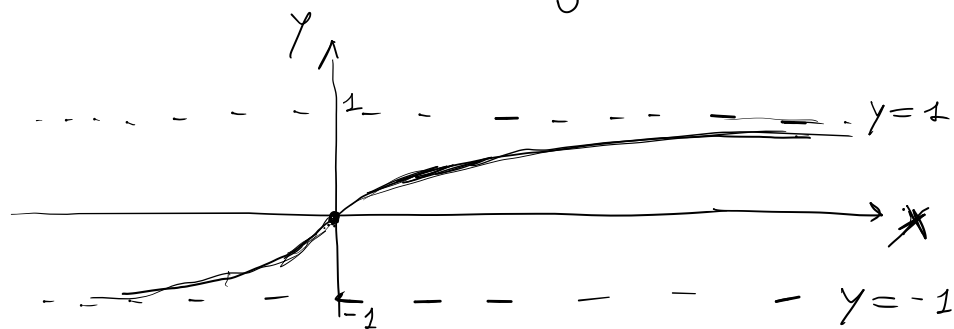
$$\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} - 2 < \cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2 \Leftrightarrow -2 < 2 \text{ Vera}$$

involgendo al quadrato

$$\Rightarrow |\tanh(x)| = \frac{|\sinh(x)|}{\cosh(x)} < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} \cdot \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$



Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$

si dice di accumulazione per X se

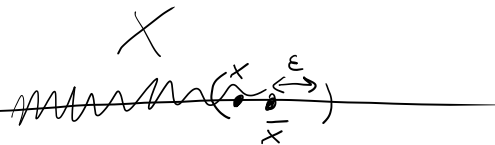
$$\forall \varepsilon \in A(\bar{x})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \text{ t.c. } 0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

$$A(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}_+$$

$$\text{inf } A(\bar{x}) = 0$$



Detto con X' l'insieme dei punti di accumulazione di X .

Osservazione Se $X' \neq \emptyset$ allora $\text{card } X = +\infty$

Infatti se $\text{card } X = n \in \mathbb{N}$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

Se $\bar{x} \in X'$ & $\bar{x} \in X$ oppure $\bar{x} \notin X$

Se $\bar{x} \notin X$ e consideriamo l'insieme

$$m = \min \{ |x_1 - \bar{x}|, \dots, |x_n - \bar{x}| \} > 0$$

Se scelgo $0 < \varepsilon < m$ concludo che

non esistono $x_j \in X$, $x_j \neq \bar{x}$ t.c. $|x_j - \bar{x}| < \varepsilon$

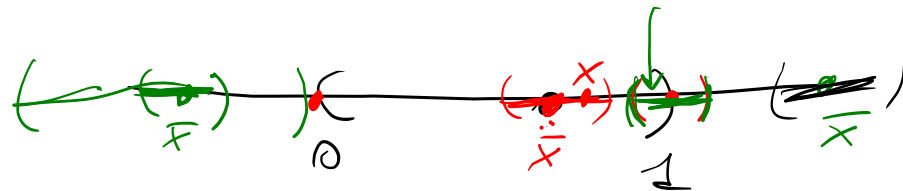
Perché se $\forall x_j \in X$

$$0 < \varepsilon < m \leq |x_j - \bar{x}| < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon \text{ assurdo}$$

Si procede in modo analogo se si assume
che $\bar{x} \in X$.

Conclusione: se $\text{card } X < +\infty \Rightarrow X' = \emptyset$

$$X = (0, 1)$$



Allò

$$X' \supseteq [0, 1]$$

Verifichiamo che $(0, 1)' = [0, 1]$

Per primo caso se $\bar{x} \notin [0, 1]$, ad esempio
se $\bar{x} < 0$, so che esiste un $\varepsilon > 0$ t.c.

$$\begin{aligned} (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) &\subseteq \mathbb{R}_- \quad \text{Per scegliere } \varepsilon = |\bar{x}| = -\bar{x} \\ (2\bar{x}, 0) &\subseteq \mathbb{R}_- \end{aligned}$$

se $\bar{x} > 1$ so che esiste $\varepsilon > 0$ t.c.

$$(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) \subseteq (\bar{x} - 1, +\infty)$$

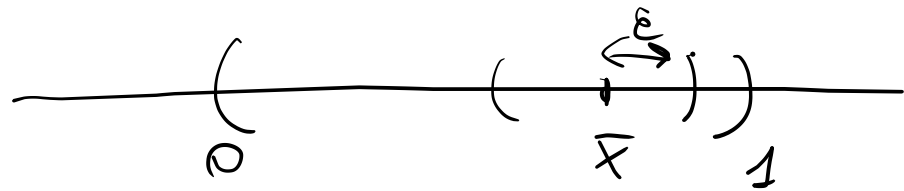
$$\varepsilon = |\bar{x} - 1| = \bar{x} - 1$$

$$(\bar{x} - (\bar{x} - 1), \bar{x} + \bar{x} - 1) = (1, 2\bar{x} - 1)$$

$$\text{Cwe' } (\mathbb{R} \setminus [0, 1]) \cap (0, 1)' = \emptyset$$

$\bar{x} \in (0, 1)$. So che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$

$$\subseteq (0, 1)$$



$$\varepsilon_0 = \text{dist}(\bar{x}, \{0, 1\}) = \min \left\{ \overbrace{|\bar{x} - 0|}^{\bar{x}}, \overbrace{|\bar{x} - 1|}^{1 - \bar{x}} \right\}$$

$$0 \leq \bar{x} - \varepsilon_0 < \bar{x} + \varepsilon_0 \leq 1$$

$$\varepsilon_0 = \min \{ \bar{x}, 1 - \bar{x} \}$$

$$0 \leq \bar{x} - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \leq \bar{x}$$

$$\bar{x} + \varepsilon \leq 1 \Leftrightarrow \varepsilon \leq 1 - \bar{x}$$

Per ogni $x \in (\bar{x} - \varepsilon_0, \bar{x} + \varepsilon_0)$

$$0 \leq \bar{x} - \varepsilon_0 < x < \bar{x} + \varepsilon_0 \leq 1$$

$\forall \varepsilon$ con

$$\Rightarrow 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) \subset (0, 1)$$

$$N' = \emptyset, \quad Z' = \emptyset$$

$$Q' = \mathbb{R}$$

Esercizio Se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ allora

$$X' \subseteq Y'$$

Si tratta di dimostrare che se $\bar{x} \in X' \Rightarrow \bar{x} \in Y'$.

$\bar{x} \in X'$ significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X \text{ t.c. } 0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$$

e allora $\bar{x} \in Y'$

$$\Rightarrow N' \subseteq Z' \quad \text{Basta ora dimostrare}$$

$$Z' = \emptyset$$

Bisogna dimostrare che non è vero che esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } 0 < |n - \bar{x}| < \varepsilon$$

Supponiamo $\bar{x} \cdot \mathbb{Z}' \neq \emptyset$ e che $\bar{x} \in \mathbb{Z}'$. Abbiamo una delle due alternative

$$a) \bar{x} \in \mathbb{Z}$$

$$b) \bar{x} \notin \mathbb{Z}$$

Cominciamo da $\bar{x} \in \mathbb{Z}$

Allora per $\varepsilon = 1$

non esiste alcun $n \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$0 < |n - \bar{x}| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$1 \leq |n - \bar{x}| < 1 \Rightarrow 1 < 1 \quad \text{assurdo}$$

Sia ora $\bar{x} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [\bar{x}] < \bar{x} < [\bar{x}] + 1$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ [\bar{x}] & \bar{x} & [\bar{x}] + 1 \end{array}$$

se piglio $\varepsilon_0 = \min \{ \bar{x} - [\bar{x}], [\bar{x}] + 1 - \bar{x} \} > 0$

segue che $\exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } |n - \bar{x}| \geq \varepsilon_0$

quindi non esiste alcun $n \in \mathbb{Z}$ t.c. $0 < |n - \bar{x}| < \varepsilon_0$

Dovrò dimostrare che

$$|n - \bar{x}| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

se $n \in \mathbb{Z}$ allora $(n \leq [\bar{x}])$ o che $(n \geq [\bar{x}] + 1)$

$$\text{se } \begin{cases} n \leq [\bar{x}] < \bar{x} \\ -n \geq -[\bar{x}] \end{cases} \quad \varepsilon_0 = \min \{ \bar{x} - [\bar{x}], [\bar{x}] + 1 - \bar{x} \}$$

$$|n - \bar{x}| = \bar{x} - n \geq \bar{x} - [\bar{x}] \geq \varepsilon_0$$

$$\text{se } n \leq [\bar{x}] \Rightarrow |n - \bar{x}| \geq \varepsilon_0 > 0$$

se $n \geq [\bar{x}] + 1 > \bar{x}$

$$|n - \bar{x}| = n - \bar{x} \geq [\bar{x}] + 1 - \bar{x} \geq \varepsilon_0$$

$$\forall n \geq [\bar{x}] + 1 \Rightarrow |n - \bar{x}| \geq \varepsilon_0 > 0$$

Def Dato $X \subseteq \mathbb{R}$, X si dice chiuso
se $X \supseteq X'$.

Es $[0, 1]$ è chiuso $[0, 1]' = [0, 1]$

La chiusura di un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$
è l'insieme $\overline{X} = X \cup X'$

Se X è chiuso allora $\overline{X} = X$

$$\overline{[0, 1]} = [0, 1], \quad \overline{(0, 1)} = [0, 1]$$

$$\overline{[0, 1]} = [0, 1], \quad \overline{[0, 1)} = [0, 1]$$

$$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Def (sottosuccessioni) Su X un insieme

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in X .

Se considero una successione strettamente crescente
di numeri naturali $k \in \mathbb{N} \rightarrow n_k \in \mathbb{N}$

$$(n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

allora $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è detta sottosuccessione di $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Esercizio Dimostrare che se $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una
successione strettamente crescente in $\mathbb{N}$, allora
 $n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Esercizio Sia $\{x_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$ e sia
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrare che per ogni sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ ha
 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = L$

Esempio $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

$$\{(-1)^{2k}\} = \{1, 1, \dots\}$$

sono esempi di sottosuccessioni

$$\{(-1)^{2k+1}\} = \{-1, -1, -1, \dots\}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (-1) = -1$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ non esiste

Esercizio Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$ e

nono $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ed $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora le seguenti due proposizioni sono
equivalenti

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

2) Per ogni successione $\{x_n\}$ in X t.c.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ ho

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$

Esercizio Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ^{di periodo $T > 0$} periodico. Allora
 $\sup X = +\infty, \inf X = -\infty$

Dim X ha la seguente proprietà: Se $x_0 \in X$
 allora $x_0 + nT \in X$

$$\sup \{x_0 + nT; n \in \mathbb{Z}\} \subseteq X$$

$$\begin{aligned} * \sup \{x_0 + nT; n \in \mathbb{Z}\} &= +\infty & \sup X &= +\infty \\ \inf \{ &= -\infty & \Rightarrow \inf X &= -\infty \end{aligned}$$

* Sia $y \in \mathbb{R}$. Voglio dimostrare che $\exists n \in \mathbb{Z}$

$$\text{t.c. } \boxed{x_0 + nT > y} \Leftrightarrow nT > y - x_0$$

$$\text{Se } y - x_0 \leq 0 \quad nT \geq 0 \geq y - x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Se } y - x_0 > 0 \quad \text{w che } \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } nT > y - x_0$$

Per questo abbiamo dimostrato $\sup \{x_0 + nT; n \in \mathbb{Z}\} = +\infty$

Ora vogliamo $\inf \{x_0 + nT; n \in \mathbb{Z}\} = -\infty$

si tratta di dimostrare che $\forall y \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{Z}$

$$\text{t.c. } x_0 + nT < y \Leftrightarrow nT < y - x_0$$

$$\text{Se } y - x_0 \geq 0 \quad \text{allora } nT < 0 \leq y - x_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_-$$

$$\text{Se } y - x_0 < 0$$

$$nT < y - x_0 \Leftrightarrow -nT > x_0 - y > 0$$

$$\text{Sic che } \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } mT > x_0 - y$$

$$\text{Basta porre } n = -m.$$