Lezione 10 ottobre 2024

giovedì 10 ottobre 2024 09:05

Visto: $Z_p(F) \cap L$, $I_Q(Z_p(F), L)$

$Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$

Possiamo def. analogamente $I_Q(Z(f), r)$ molt. di int. nell'affine:

$Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2_K$

se $Q \in Z(f) \cap r$, retta r affine $r \not\subseteq Z(f)$

$$r: \begin{cases} x = lt + q_1 \\ y = mt + q_2 \end{cases}$$

$(q_1, q_2) = Q$

$g(t) := f(lt + q_1, mt + q_2) = 0$ è un polinomio non nullo in t

$Q = (q_1, q_2) \in Z(f) \Rightarrow$ il valore

$t = 0$ è una radice di $g(t)$

$\underset{\text{Ruffini}}{\Rightarrow}$ $(t - 0)$ divide $g(t)$

$\Rightarrow$ $g(t) = t^m \cdot h(t)$, con $h(0) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{m := I_Q(Z(f), r)}$

OSS: Per costruzione, se $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$

e cons. $U_0 = \mathbb{P}^2 \setminus Z_p(x_0)$

se $Q \in U_0$, $Q = (1 : q_1 : q_2)$ si ha : $L = Z_p(a x_0 + b x_1 + c x_2)$

$$I_Q(Z_p(F), L) = I_q(Z({}^aF), Z(a + bx + cy)))$$

$q = j_0^{-1}(Q)$

$q = (q_1, q_2)$

Dim. esercizio.

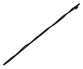
VISTO: $Q \in Z_p(F)$ def. di punto singolare

cioè Q è singolare $\Leftrightarrow \forall L \ni Q$, si ha $I_Q(Z_p(F), L) \geq 2$

OSS. : Se F non è RIDOTTO

es : $F = (x_2 - x_1)^2$

$Z_p(F)$: è una RETTA DOPPIA



AFFERMIAMO che ogni punto di $Z_p(F)$ è singolare

Infatti: $Q \in Z_p(F)$: $(x_2 - x_1)^2 = 0$

$Q = (q_0 : q_1 : q_1)$

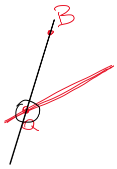
retta $\overline{QB}$: $\begin{cases} x_0 = \lambda q_0 + \mu b_0 \\ x_1 = \lambda q_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda q_1 + \mu b_2 \end{cases}$

$B \notin Z_p(F)$

sostituisco e trovo $(\lambda q_1 + \mu b_2 - \lambda q_1 - \mu b_1)^2 = 0$

$$G(\lambda, \mu) = \mu^2 (b_2 - b_1)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ la coppia $(1:0) = (\bar{\lambda} : \bar{\mu})$ che corrisp. a Q è radice omogenea di molt. 2.



In generale: Se F non è ridotto, vedremo che ha infiniti punti singolari.

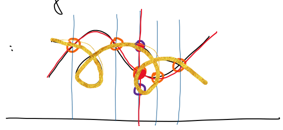
* * *

Pb.: Trovare $Z_p(F) \cap Z_p(G)$ e definire la molt. di int. in un punto

RISULTANTE DI SYLVESTER

Abbiamo bisogno del Lemma di Bèzout.

Idea :



Ridurremo il problema a capire quando 2 polinomi $f(t)$ e $g(t)$ hanno una radice in comune.

Abbiamo bisogno di cons. $f, g \in A[t]$

con A : anello commutativo, unitario
dominio di integrità (NO DIV ZERO)
e sia UFD

(prototipo: $A = \mathbb{K}[x_1, x_2]$, $\mathbb{K}[x_1]$, ...)

LEMMA ALG: A è UFD $\Rightarrow A[t]$ è UFD.

OSS.: Supp. che $f, g \in A[t]$ abbiamo un fattore comune $h(t)$ (di grado ≥ 1)

$$f(t) = h(t) \cdot u(t), \quad g(t) = h(t) \cdot v(t) \qquad \boxed{\begin{array}{l} \deg u(t) < \deg f(t) \\ \deg v(t) < \deg g(t) \end{array}}$$

allora $f(t) \cdot v(t) = g(t) \cdot u(t)$

$$f(t) \cdot v(t) - g(t) \cdot u(t) \equiv 0$$

Lemma di Bèzout: Dati $f, g \in A[t]$, con $\deg f \geq 1$, $\deg g \geq 1$. Se $\exists$ $u(t)$ e $v(t)$

t.c. $\deg u(t) < \deg f(t)$
$\deg v(t) < \deg g(t)$

e $f(t) \cdot v(t) - g(t) \cdot u(t) \equiv 0$

$\Rightarrow$ f e g hanno fattore comune $h(t)$.

Dim. $A[t]$ è UFD: a meno di perm.
e elem. invertibili

$f(t) = f_1^{m_1} \cdot f_2^{m_2} \cdots f_r^{m_r}$ $\quad f_i$ irriduc.,

$v(t) = v_1^{h_1} \cdot v_2^{h_2} \cdots v_s^{h_s}$ $\quad v_j$ irriduc.

$g(t) = g_1^{n_1} \cdot g_2^{n_2} \cdots g_k^{n_k}$ $\quad g_i$ irr.

$u(t) = u_1^{k_1} \cdot u_2^{k_2} \cdots u_\ell^{k_\ell}$ $\quad u_j$

$$f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r} \cdot v_1^{h_1} v_2^{h_2} \cdots v_s^{h_s} = g_1^{n_1} \cdots g_k^{n_k} \cdot u_1^{k_1} \cdots u_\ell^{k_\ell}$$

Siccome $\deg u < \deg f$ $\Rightarrow$ i fattori $u_j^{k_j}$ non possono esaurire tutti i fattori che compaiono nella fatt. di f $\Rightarrow \exists\, g_j$ t.c. g_j è fattore irr. di f.

Come utilizzare Lemma di Bezout:

Esempio: $f = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $\quad a_3 \neq 0$

$g = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

cerco: u, v : $\deg u < 3$ $\quad u = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$

$\deg v < 2$ $\quad v = \alpha x + \beta$

$$f \cdot v - g \cdot u = 0$$

$$(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \cdot (\alpha x + \beta) - (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)(\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon) = 0$$

$$(a_3 \alpha - b_2 \gamma) x^4 + (a_3 \beta + a_2 \alpha - b_2 \delta - b_1 \gamma) x^3 +$$

$$+ (a_2 \beta + a_1 \alpha - b_1 \delta - b_0 \gamma - b_2 \varepsilon) x^2 +$$

$$+ (a_0 \alpha + a_1 \beta - b_0 \delta - b_1 \varepsilon) x + (a_0 \beta - b_0 \varepsilon) = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a_3\alpha - b_2\gamma = 0 \\ a_2\alpha + a_3\beta - b_1\gamma - b_2\delta = 0 \\ a_1\alpha + a_2\beta - b_0\gamma - b_1\delta - b_2\varepsilon = 0 \\ a_0\alpha + a_1\beta - b_0\delta - b_1\varepsilon = 0 \\ a_0\beta - b_0\varepsilon = 0 \end{cases}$$ nelle incognite $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_3 & 0 & -b_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & -b_1 & -b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & -b_0 & -b_1 & -b_2 \\ a_0 & a_1 & 0 & -b_0 & -b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & -b_0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice di Sylvestere}} = M$$

$M(f, g)$

è SLO di 5 eq. in 5 incognite.

Voglio che esista almeno una soluzione $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \neq (0,0,0,0,0)$

Per RC oppure Cramer, questo succede $\Leftrightarrow$ det (matrice dei coefficienti) $= 0$.

Sylvester, invece di M, considera ${}^tM$, e moltiplica tutte le righe relative ai coeff. b_j per (-1):

$$R(f,g) := \det \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}\right\} \deg g \text{ volte} \\ \in A \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \deg f \text{ volte} \end{matrix}$$

RISULTANTE di SYLV. di f e g

IN GENERALE:

Si può verificare che due polinomi

f di grado $\deg f = m$, $f = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$

g di $\deg g = n$, $g = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$

hanno 1 fattore comune se:

$$R(f,g) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & & b_0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & & & b_0 \end{pmatrix}}_{m+n} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \end{matrix} = 0$$

Vediamo ora che $R(f,g)$ è una generalizz. del DISCRIMINANTE di un polinomio.

Def: Sia $f \in A[t]$; la DERIVATA PRIMA di f (il POL. DERIVATO):

$$f'(t) := m a_m t^{m-1} + (m-1) a_{m-1} t^{m-2} + \dots + a_1$$

$$f(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_0$$

Lemma: Vale regola di Leibnitz

$$(f_1(t)\cdot f_2(t))' = f_1'(t)\cdot f_2(t) + f_1(t)\cdot f_2'(t)$$

PROP.: $f(t)$ ha una RADICE MULTIPLA t_0 : cioè $f(t) = (t-t_0)^m \cdot h(t)$

$m \geq 2$

$\iff$ $f(t)$ e $f'(t)$ hanno una radice comune.

Dim. Sia t_0 radice di f : $f(t_0) = 0$

$$f(t) = (t-t_0)^m \cdot h(t), \quad h(t_0) \neq 0$$

$$f'(t) = m(t-t_0)^{m-1}\cdot h(t) + (t-t_0)^m \cdot h'(t)$$

$$m \geq 2 \iff f'(t) = (t-t_0)^{\overset{\geq 1}{\boxed{m-1}}} \cdot (m\cdot h(t) + (t-t_0)h'(t))$$

COR: $f(t)$ ha una radice multipla t_0

$\iff$

$$\Delta(f) = R(f, f') = 0$$

DISCRIMINANTE DI SYLV.

DOMANI: $f(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

$$\Delta(f) = ?$$