La Tavoletta Plimpton 322

Alle radici remote della matematica

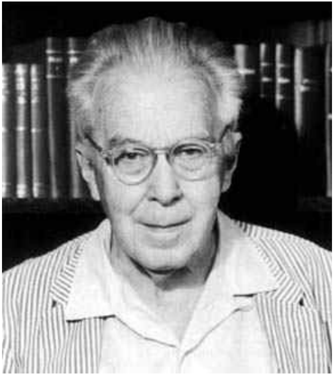
Asia Trevisani

Università degli Studi di Trieste

4/12/2023

Otto Eduard Neugebauer (1899-1990)

- Matematico austriaco, studia ingegneria, fisica e matematica in Austria e Germania.
- Grazie all'amico Harald Bohr, si interessa alla matematica egizia, e poi anche a quella babilonese.
- Nel 1927 diventa professore di Storia della matematica antica a Göttingen.
- Nel 1931 fonda la rivista *Zentralblatt für Matematik*, che diventa indispensabile per tutti i matematici dell'epoca.
- Con l'ascesa del Nazismo, alcuni articoli iniziano ad essere censurati.



- Si oppone al partito ed è costretto a dimettersi dall'Università di Göttingen.
- Dal 1934 al 1938 dirige la rivista da Copenhagen.
- Nel 1938, insieme alla maggior parte della redazione, si dimette.
- Parte per gli Stati Uniti, dove gli viene offerta una cattedra alla Brown University (Providence).
- Nel 1939 fonda una nuova rivista, la *Mathematical Reviews*.
- Alcune opere importanti:
  - *Mathematical Cuneiform Texts* (1945),
  - *The Exact Sciencies in Antiquity* (1951),
  - *History of Ancient Mathematical Astronomy (1975)*.

Eleanor Robson

- Nasce nel 1969 nel Regno Unito.
- Si laurea prima in Matematica all'Università di Warwick, poi in Filosofia ad Oxford.
- Ha proseguito gli studi sempre all'interno della Facoltà degli Studi Orientali a Oxford.
- Ha insegnato al Dipartimento di Storia e Filosofia della Scienza all'Università di Cambridge.
- I suoi studi ruotano attorno alla Storia della Matematica e alla cultura mesopotamica.
- Attualmente è in congedo per una ricerca fino al 2025.

Matematica babilonese: breve riassunto

- Fonti principali: tavolette in argilla ritrovate in Mesopotamia.
- Periodi storici:
  - periodo paleobabilonese, 1900-1600 a.C.
  - periodo seleucide, 300-0 a.C.
- Sistema di numerazione posizionale in base 60,
  con cifre da 1 a 59 scritte in base 10 e in modo addittivo.
- Lo zero: indicato talvolta con uno spazio vuoto, più tardi con un simbolo.
  $\Rightarrow$ Ambiguità di lettura.
- Principio posizionale anche per le frazioni: il numero $2/56/9$ può essere interpretato come:

  $$2 \times 60^2 + 56 \times 60^1 + 9 \times 60^0$$

  oppure

  $$2 \times 60^1 + 56 \times 60^0 + 9 \times 60^{-1}$$

  e così via.

Perchè *Plimpton 322* ?

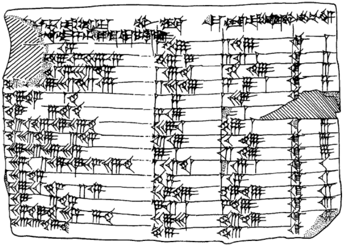
Edgar James Banks (1866-1945)
Console degli Stati Uniti in Mesopotamia, Banks acquistò numerosi reperti, che portò con sè una volta rientrato in America.

George Arthur Plimpton (1855-1936)
Nel 1922, Plimpton acquistò da Banks vari oggetti. Alla sua morte, nel 1936, lasciò la sua collezione in eredità alla Columbia University (New York).

La Tavoletta

- Tavoletta in argilla, $13 \times 9 \times 2$ cm circa, scritta su un solo lato.
- Provenienza: probabilmente città di Larsa (attuale Iraq), periodo paleobabilonese (1822-1762 a.C.).
- Classificata inizialmente come documento commerciale.
- Presenta una rottura sul lato sinistro, in cui ci sono tracce di colla moderna: esiste un pezzo mancante?
- Lettura da sinistra a destra, dall'alto in basso.

Le Colonne



Quattro colonne, ognuna con un titolo:

I. Incompleto: "il *takiltum* della diagonale che è stato sottratto in modo che la larghezza..."
II. "Numero risolvente della larghezza".
III. "Numero risolvente della diagonale".
IV. "Il suo nome": numerazione delle righe.

I numeri in base 60

Colonna I:	**Colonna II:** num. risolvente della larghezza	**Colonna III:** num. risolvente della diagonale	**Colonna IV:** il suo nome
[1/59]/15	1/59	2/49	1
[1/56/56]/58/14/50/6/15*	56/7	1/20/25*	2
[1/55/7]/41/15/33/45	1/16/41	1/50/49	3
[1]/5[3/1]0/29/32/52/16	3/31/49	5/9/1	4
[1]/48/54/1/40	1/5	1/37	5
[1]/47/6/41/40	5/19	8/1	6
[1]/43/11/56/28/26/40	38/11	59/1	7
[1]/41/33/45/14/3/45*	13/19	20/49	8
[1]/38/33/36/36	8/1*	12/49	9
[1]/35/10/2/28/27/24/26/40	1/22/41	2/16/1	10
[1]/33/45	45	1/15	11
[1]/29/21/54/2/15	27/59	48/49	12
[1]/27/0/3/45*	2/41*	4/49	13
[1]/25/48/51/35/6/40	29/31	53/49	14
[1]/23/13/46/4[0]	28*	53*	15

Osservazioni:

1. Colonna I in ordine decrescente.
2. Colonna II $<$ Colonna III.
3. Nella Colonna III ci sono ben 8 numeri primi.

I numeri in base 10

Colonna I: $\frac{d^2}{l^2}$	**Colonna II:** b	**Colonna III:** d	**Colonna IV:** *ki*
$[1], 9834028$	119	169	1
$[1], 9491586$*	3367	4825*	2
$[1], 9188021$	4601	6649	3
$[1], 8862479$	12709	18541	4
$[1], 8150077$	65	97	5
$[1], 7851929$	319	481	6
$[1], 7199837$	2291	3541	7
$[1], 6845877$*	799	1249	8
$[1], 6426694$	481*	769	9
$[1], 5861226$	4961	8161	10
$[1], 5625$	45	75	11
$[1], 4894168$	1679	2929	12
$[1], 4500174$*	161*	289	13
$[1], 4302388$	1771	3229	14
$[1], 3871605$	56*	106*	15

Gli asterischi * indicano gli errori.

Studio di Neugebauer

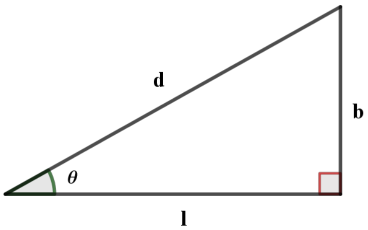
- Denominiamo "b" la Colonna II e "d" la Colonna III, allora si verifica che $\exists\ l$ tale che:

$$\boxed{d^2 = b^2 + l^2}$$

  cioè (b, d, l) è una terna pitagorica.

  $\Longrightarrow$ La Colonna I contiene i valori $\dfrac{d^2}{l^2}$.

- Se ad ogni terna associamo un triangolo rettangolo, allora si nota che si passa da uno con angoli di $45°$, ad uno con angoli di $30°$ e $60°$, con una variazione di $1°$ per riga.



Metodo algebrico per generare terne pitagoriche

Teorema

Tutte e sole le terne pitagoriche primitive sono della forma:

$$\boxed{x = 2pq, \qquad y = p^2 - q^2, \qquad z = p^2 + q^2}$$

dove p e q sono numeri:

- naturali,
- coprimi,
- di parità opposta,
- tali che $p > q$.

In particolare, tutte le soluzioni di $x^2 + y^2 = z^2$ sono della forma (kx, ky, kz) con $k \in \mathbb{Z}$.

Numeri generatori

- Per teorema: per ogni terna sulla tavoletta possiamo trovare due numeri p e q coprimi, di parità opposta, con $p > q > 0$ e tali che

$$\boxed{l = 2pq \qquad b = p^2 - q^2 \qquad d = p^2 + q^2}$$

formano una terna pitagorica primitiva.

Riga	p	q	p^2	q^2	$2pq$	$\frac{p}{q}$
1	12	5	2/24	25	2/0	2;24
2	1/4	27	1/8/16	12/9	57/36	2;22/13/20
3	1/15	32	1/33/45	17/4	1/20/0	2;20/37/30
4	2/5	54	4/20/25	48/36	3/45/0	2;18/53/20
5	9	4	1/21	16	1/12	2;15
6	20	9	6/40	1/21	6/0	2;13/20
7	54	25	48/36	10/25	45/0	2;9/36
8	32	15	17/4	3/45	16/0	2;8
9	25	12	10/25	2/24	10/0	2;5
10	1/21	40	1/49/21	26/40	1/48/0	2;1/30
11	2	1	4	1	4	2
12	48	25	38/24	10/25	40/0	1;55/12
13	15	8	3/45	1/4	4/0	1;52/30
14	50	27	41/10	12/09	45/0	1;51/6/40
15	9	5	1/21	25	1/30	1;48

Osservazione: Numeri regolari

Numero regolare

Un numero si dice regolare se si può esprimere come prodotto di $2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$.
Se n è regolare, allora il reciproco $\frac{1}{n}$ è una frazione finita.

- Si osserva che i numeri p e q ottenuti sono regolari.
- Quindi anche b, d, l sono regolari.
- Dati $\tilde{p}, \tilde{q}$ reciproci di p, q, si ha che

$$\frac{d}{l} = \frac{1}{2}(p \cdot \tilde{q} + \tilde{p} \cdot q)$$

  Perciò $\dfrac{d}{l}$ è una frazione finita $\Rightarrow$ anche $\dfrac{d^2}{l^2}$ deve essere finita.
- Infatti i numeri in Colonna I sono finiti e regolari.

Errori nella Tavoletta

Sono presenti 7 errori: alcuni sono errori di trascrizione, altri sono errori dovuti ai calcoli, di cui uno (III 2) difficile da spiegare.

Colonna	Riga	Errore	Commento
I	2	56 invece di 50/6	Errore di copiatura
	8	59 invece di 45/14	Errore aritmetico
	13	27/3/45 invece di 27/0/3/45	Errore di copiatura
II	9	9/1 invece di 8/1	Errore di copiatura
	13	7/12/1 invece di 2/41	Errore di calcolo (non banale)
II o III	15	53 invece di 1/46	Errore di calcolo (non banale)
III	2	3/12/1 invece di 1/20/25	Errore di calcolo (non banale)

Conclusioni

Tavole

Tavola dei Reciproci: elenchi di coppie del tipo $(a, \tilde{a})$ tali che $a \times \tilde{a} = 1$.
Tavola di moltiplicazione: elenchi di moltiplicazioni del tipo $a \times \tilde{b}$ con $\tilde{b}$ reciproco di b numero regolare incluso nelle Tavole dei reciproci.

- I valori di p e q si trovano anche nelle Tavole dei reciproci.
- I prodotti $p \cdot \tilde{q}$ e $\tilde{p} \cdot q$, con $\tilde{q}, \tilde{p}$ reciproci di q, p, possono essere calcolati usando una Tavola di moltiplicazione.

Conclusione

La tavoletta è stata calcolata a partire da numeri del tipo $p\tilde{q}$ e $\tilde{p}q$ tali che $\frac{1}{2}(p \cdot \tilde{q} + \tilde{p} \cdot q)$ avesse un valore più vicino possibile al rapporto $\frac{d}{l}$. Usando i numeri p e q si sarebbero potuti trovare i numeri delle terne pitagoriche b, d ed l.

E. Robson: tre interrogativi

1. Scelta di 15 coppie di numeri: una *Tavola dei reciproci* contiene 22 coppie di reciproci diversi $\Rightarrow$ 946 coppie possibili
   $\Rightarrow$ 159 coppie, eliminando coppie di numeri con stessa parità e non coprimi: come scegliere?
2. Ordine delle colonne: II e III dovrebbero dipendere da I,
   invece sembra che I derivi da II e III.
3. Spiegazione degli errori: quelli semplici sono solo sviste, quelli di calcolo dipendono dall'interpretazione.

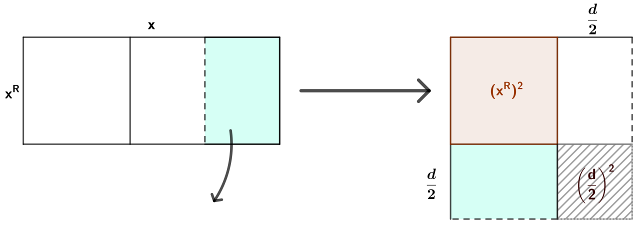
Un nuovo punto di vista

Il problema "*igi-igibi*"

Allo studente viene data la differenza di un numero e del suo reciproco, e deve ricavare il numero iniziale.
Cioè: data $x - x^R = d$, deve trovare x sapendo che $x \cdot x^R = 1$.

Risoluzione

"Trova la metà di d, fai il quadrato del numero trovato, aggiungi 1, fai la radice quadrata e poi aggiungi e togli metà di d, e troverai x e x^R"



Un'interpretazione diversa

Durante la risoluzione troviamo una terna pitagorica formata da:

- lato del quadrato grande: d (Colonna III)
- lato del quadrato piccolo: b (Colonna II)
- lato del quadrato di area 1 (o potenza di 60): l.

$\Rightarrow$ La tavola può essere calcolata a partire da un singolo parametro:

$$\boxed{x = \frac{p}{q}}$$

La Colonna I contiene i valori: $\frac{d^2}{l^2} = 1 + \left(\frac{1}{2}(x - x^R)\right)^2$

In questo modo:

- la Colonna I contiene risultati intermedi,
- l'errore in III 2 si spiega con una fattorizzazione eccessiva.

Errore III 2: Neugebauer

Abbiamo visto che il valore scritto è 3/12/1, mentre il valore corretto sarebbe 1/20/25:
⇒ non ci sono evidenti relazioni tra i due numeri.

Spiegazione di Neugebauer

Lo scriba vuole scrivere in III 2 il risultato di $p^2 + q^2$:

- calcola $p^2 + q^2$ come $(p+q)^2 - 2pq$.
- Errore 1: invece di $2pq$ calcola $2q$.
- Errore 2: invece di aggiungere $2q$ lo toglie.

⇒ Quindi il valore finale calcolato è: $(p+q)^2 + 2q = 3/12/1$.

Errore III 2: Robson

Spiegazione di Robson

L'errore si spiega con una fattorizzazione eccessiva:

- seguendo la procedura del metodo *igi-igibi*, lo scriba trova la terna $(0;58/27/17/30,\ 1,\ 1;23/46/2/30)$;
- vuole ottenere una terna col minimo numero di cifre, quindi la moltiplica per $2 \times 12 \times 12 \times 12$ e ottiene: $(56/7,\ 57/36,\ 1/20/25)$;
- non sicuro di aver trovato la terna ottimale, moltiplica ancora per 12×12 e ottiene $(2/14/36/48,\ 2/18/14/24,\ 3/13/0/0)$ che non va bene;
- torna indietro e trascrive:
  - nella Colonna II il valore $56/7$, che è corretto;
  - nella Colonna III scrive l'ultimo risultato trovato, cioè $3/13/0/0$, ma sbaglia a leggere il 13 (un cuneo da 10 e 3 cunei da 1) e divide il 3 in due cifre, scrivendo così $3/12/1/0$.

Conclusioni

Non è possibile sapere per certo qual era l'obiettivo di chi scrisse la tavoletta. A seconda dell'interpretazione possiamo supporre che fosse:

- una tavola che un maestro scriba usava per impostare e risolvere problemi che riguardavano triangoli rettangoli da assegnare ai suoi studenti,
- uno strumento, sempre per un insegnante, che lo aiutasse a comporre un gran numero di esercizi del tipo *igi-igibi* aventi soluzioni note e passaggi intermedi verificabili facilmente.
- ?

Bibliografia

[1] Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I. (2010). An introduction to diophantine equations, a problem-based approach. New York: Birkhauser.

[2] Boyer, C. B. (1980). A History of Mathematics. Traduzione italiana Storia della Matematica. Milano: Mondadori.

[3] Buck, R. C. (1980). "Sherlock Holmes in Babylon", American Mathematical Monthly, Vol. 87, pp. 335-345.

[4] Burton, D. (2011). The History of Mathematics: An Introduction. New York: McGraw-Hill.

[5] Cuneiform Digital Library Initiative: MCT 038, Plimpton 322 (P254790): https://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/artifacts/254790

[6] MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Neugebauer/ (sito visitato in data: 10/7/2023).

[7] Neugebauer, O., Sachs, A. (1945). Mathematical Cuneiform Texts. American Oriental Series, vol. 29. New Haven: American Oriental Society.

[8] Neugebauer, O. (1957). The Exact Sciences in Antiquity. Traduzione italiana Le scienze esatte nell'Antichità. Milano: Feltrinelli.

[9] Robson, E. (2001). "Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322", Historia Mathematica, Vol. 28, pp. 167-206.

[10] UCL: https://www.ucl.ac.uk/history/people/academic-staff/professor-eleanor-robson-fba (sito visitato in data 3/12/2023).

Grazie per l'attenzione!