SIMMETRIE

(From Alvarez-Gaumé et al arXiv:2306.08037)

Vediamo tipi di SIMMETRIE che si incontrano in FISICA:

1) CINEMATICHE (SPACETIME): agiscono sulle COORD. dello spazio-tempo E sugli indici di campo.
   ES: Lorentz, Poincaré, conformal transf..

2) DISCRETE. ES: P, C, T e composizioni.

3) SIMMETRIE CONTINUE GLOBALI: dipendono da parametri continui (~ gruppi di Lie).

4) "SIMMETRIE" LOCALI (di gauge): variano da pto a pto nello spazio-tempo. Non mappano uno stato fisico su un'altro; sono piuttosto una RIDONDANZA DELLA DESCRIZIONE (per es. necessaria per avere descrizione manifestam. Lorentz invariante e locale di particelle di spin 1 e 2).

SIMMETRIES IN QFT

In QM, le <u>simmetrie</u> sono mappe tra raggi vettori in $\mathcal{H}$, che 'preservano' le ampiezze di probabilità.

$$|\alpha\rangle \mapsto U|\alpha\rangle \equiv |\alpha'\rangle$$

$$|\beta\rangle \mapsto U|\beta\rangle \equiv |\beta'\rangle$$

Vogliamo U t.c.

$$|\langle\alpha'|\beta'\rangle|^2 = |\langle\alpha|U^\dagger U|\beta\rangle|^2 \overset{\downarrow}{=} |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$$

Qto avviene se

$$\langle\alpha|U^\dagger U|\beta\rangle = \begin{cases} \langle\alpha|\beta\rangle & \leftarrow U \text{ UNITARIO} \\ \langle\alpha|\beta\rangle^* & \leftarrow U \text{ ANTI-UNITARIO (e anti-lin., } Ua|\alpha\rangle = a^* U|\alpha\rangle) \end{cases}$$

$\downarrow$

Wigner's theorem: in QM le simmetrie sono implementate da op. (anti-)unitari.

Nota: le simmetrie continue (connesse all'unità) sono sempre implementate da op. unitari (l'identità è lineare, <u>non</u> anti-lin.).

Es. di sim. con op. anti-unit.: T, CPT

TEOREMA DI NÖTHER (I)

Iniziamo con una teoria classica con n campi ϕ_i $i=1,\dots,n$, e una Lagrangiana invariante sotto (forma infinitesima):

$$\phi_i \mapsto \phi_i + \delta_\epsilon \phi_i \quad (*) \quad \text{dip. linearm. da } N \text{ param. } \epsilon_A$$

- trasf. formano un GRUPPO;
- possono essere esponenziate dando trasf. continue connesse all'identità.

(*) lascia invariate le eq. del moto:

se $S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ allora $\delta_\epsilon S = \int d^4x\, \partial_\mu K^\mu$

dove $\partial_\mu K^\mu$ è LINEARE in ϵ.

D'altro canto possiamo scrivere

$$\delta_\epsilon S = \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \right] \delta_\epsilon \phi_i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta_\epsilon \phi_i \right) \right\}$$

Mettendo insieme qte due relazioni otteniamo

$$\int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \right] \delta_\epsilon \phi_i + \partial_\mu \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta_\epsilon \phi_i - K^\mu \right)}_{\equiv j^\mu(\epsilon)} \right\} = 0$$

valida $\forall \epsilon$ e $\forall \phi$

$\Rightarrow \partial_\mu j^\mu(\epsilon) = 0$ quando ϕ_i soddisfano eq. del moto

Siccome $j^\mu(\epsilon)$ dip. lin. da ϵ $\rightsquigarrow$ $j^\mu(\epsilon) = j^\mu_A \epsilon_A$

$\Rightarrow$ N correnti CONSERVATE j^μ_A

Teorema di Nöther (II)

Prendiamo ora una teoria inv. sotto trasf. locali; cioè ora $\epsilon_A(x)$ dip. da pto in spazio-tempo.

→ il teorema I rimane valido ⇝ ∃ corrente conservata.

Le trasf. sono ora

$$\delta_\epsilon \phi_i = R_{i,A}(\phi)\,\epsilon_A + R^{\mu}_{i,A}(\phi)\,\partial_\mu \epsilon_A \qquad \underbrace{+\ \partial^2 + \partial^3 + \dots}_{\text{non presenti in teorie usuali}}$$

(qto include $\delta_\epsilon A_\mu = \partial_\mu \epsilon$)

La generica variaz. dell'azione sarà come prima e possiamo arrivare alla relazione

$$\int d^4x \left[(e.o.m.)_i^{(\phi)} \delta_\epsilon \phi_i + \partial_\mu j^\mu(\epsilon) \right] = 0 \qquad \forall \epsilon(x)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta_\epsilon \phi_i - K^\mu$$

lin. in $\epsilon(x)$

Qndo $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \Rightarrow \int d^4x\, \partial_\mu j^\mu(\epsilon) = 0$

SMALL GAUGE TRANSFORM.

In qto caso otteniamo allora solo la condizione

$$0 = \int d^4x \left\{ (e.o.m.)_i(\phi)\, R_{i,A}(\phi) - \partial_\mu \left[(e.o.m.)_i(\phi)\, R^{\mu}_{i,A}(\phi) \right] \right\} \epsilon_A(x) \qquad (\circ)$$

($\circ$) deve valere $\forall \epsilon_A(x)$ con $\epsilon_A(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

⇒ devono valere le seguenti identità

$$\partial_\mu \left[(e.o.m.)_i(\phi)\, R^{\mu}_{i,A}(\phi) \right] = (e.o.m.)_i(\phi)\, R_{i,A}(\phi) \qquad (*)$$

$\longrightarrow$ Qte sono IDENTITÀ differenziali che le EQ. DEL MOTO devono soddisfare $\Rightarrow$ alcune sono RIDONDANTI.

Inoltre qt'identità vale anche OFFSHELL (vincoli su cond. import. in quantum corr.)

$\rightsquigarrow$ Nöther II : l'invarianza di una teoria di campo sotto trasformazioni locali implica l'esistenza di diverse identità differenziali tra le equazioni del moto, indicando che alcune di esse sono ridondanti.

Esistono correnti conservate?

Il teorema di Nöther I si applica anche per trasf. loc. e riotteniamo

$$\partial_\mu j^\mu_{(\epsilon)} = (eom)_i \, \delta_\epsilon \phi_i \underset{\uparrow \text{ onshell}}{=} 0$$

con $j^\mu(\epsilon) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta_\epsilon \phi_i - K^\mu$ e $\delta_\epsilon \phi_i = R_{i,A}(\phi)\, \epsilon_A + R^\mu_{i,A}(\phi)\, \partial_\mu \epsilon_A$

$= 0$ on-shell

Definiamo $S^\mu(\epsilon) = \epsilon_A(x)\, R^\mu_{i,A}\, (e.o.m.)_i(\phi)$

$$\hookrightarrow \partial_\mu S^\mu(\epsilon) = \partial_\mu \epsilon_A\, R^\mu_{i,A}\, (eom)_i + \epsilon_A\, \partial_\mu (R^\mu_{i,A} (eom)_i) =$$

$$\underset{\text{Th.N.II}}{=} (eom)_i\, R_{i,A}\, \epsilon_A + \partial_\mu \epsilon_A\, R^\mu_{i,A}\, (eom)$$

$$= (eom)_i\, \delta_\epsilon \phi_i$$

$\Downarrow$

$$\partial_\mu (j^\mu - S^\mu) = (eom)_i\, \delta_\epsilon \phi_i - (eom)_i\, \delta_\epsilon \phi_i = 0$$ ANCHE OFF-SHELL

cioè $\partial_\mu (j^\mu - S^\mu)$ è identicamente nullo

$\Rightarrow$ possiamo scrivere $j^\mu = S^\mu + \partial_\nu \underset{\text{ANTISIM.}}{\underbrace{K^{\mu\nu}}} \underset{\uparrow \text{ ON-SHELL}}{=} \partial_\nu K^{\mu\nu}$

$\rightarrow$ La carica conservata è data da

$$Q(\epsilon) = \int_{\Sigma} d^3\bar{x}\, j^0(\epsilon) = \int_{\Sigma} d^3x\, \partial_i k^{0i} = \int_{\partial\Sigma} dS_i\, k^{0i}$$

Σ ← spazio $\mathbb{R}^3$

(Rivedremo meglio a fine corso qndo parleremo di generalized sym.)

↓ è determinato dall' integrale sul bordo dello spazio.

Poiché $k^{\mu\nu}$ è lineare in $\epsilon_A(x)$, concludiamo che la CARICA È TRIVIALE per SMALL GAUGE TRANSF.

↳ quelle legate alla ridondanza

Qto non avviene trasf. t.c. $\epsilon_A(x) \underset{x\to\infty}{\not\to} 0$, che vengono dette LARGE GAUGE TRANSFORMATIONS. Per qte trasf. esiste una carica conservata.

⇒ Per teorie con invarianza sotto trasf. LOCALI, c'è una corrente di Nöther conservata, legata alle trasf. che non tendono all' $\mathbb{1}$ all' ∞.

Tra qte trasf. che non tendono a zero all'∞ ci sono anche qle che tendono a una trasf. cost. all'∞, cioè $U(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} U_\infty \in G$ cost.

↑ Sottogruppo di qle che producono correnti conservate

Possiamo quindi definire

$$\Omega_* = \{ U(x) \mid U(x) \to \mathbb{1} \quad a \quad |x| \to \infty \}$$

SMALL GAUGE TRANSF.

$$\Omega = \{ U(x) \mid U(x) \to \text{cost.} \in G \quad a \quad |x| \to \infty \}$$

a volte queste vengono dette large gauge transf.

$$\Omega / \Omega_* \cong G$$

← GRUPPO DI SIMMETRIA della teoria

Ω_* invece sono RIDONDANZE nella descrizione

CARICA CONSERVATA in QFT

Ricordiamo l'espressione della carica conservata

$$Q(\epsilon) = \int d^3\bar{x}\; j^0_\epsilon(\bar{x},t) = \int d^3\bar{x} \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}}_{\text{momento coniugato a } \phi_i \;\equiv\; \pi_i(x)} \delta_\epsilon \phi_i - K^0 \right)$$

In canonical quantization

$$[\, \pi_i(\bar{x}),\, \phi_j(\bar{y}) \,] = -i\, \delta_{ij}\; \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

Prendiamo $k_\mu = 0$, allora

dip. solo da ϕ

$$[\, i\,Q(\epsilon),\, \phi_j(x) \,] = i \int d^3\bar{y}\; [\, \pi_i(y)\, \delta_\epsilon \phi_i(y),\, \phi_j(x) \,] =$$

$$= i \int d^3\bar{y}\; [\, \pi_i(y),\, \phi_j(x) \,]\, \delta_\epsilon \phi_i(y) =$$

$$= \delta_\epsilon \phi_j(x)$$

$\Rightarrow Q(\epsilon)$ è il generatore delle trasf. infinitesime.