Definizioni per i sistemi lineari su un campo K

SISTEMA di n EQUAZIONI LINEARI, IN m INCOGNITE (i.e. di ORDINE m)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots\dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots\dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots\dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \longmapsto \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)}_{\text{LA MATRICE COMPLETA} \in M_{n\times(m+1)}(K)}$$

tutti gli $a_{ij} \in K$ sono i COEFFICIENTI

Gli x_i sono le INCOGNITE, o INDETERMINATE, o VARIABILI del sistema

I $b_i \in K$ sono i TERMINI NOTI

LA MATRICE $A \in M_{n\times m}(K)$ ASSOCIATA al SISTEMA LINEARE

LA MATRICE INCOMPLETA $\in M_{n\times m}(K)$

IL VETTORE COLONNA dei TERMINI NOTI

LA MATRICE COMPLETA $\in M_{n\times (m+1)}(K)$

Definizione: Una **SOLUZIONE** di un sistema lineare come sopra è un **VETTORE COLONNA** $m \times 1$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \in K^m$, di scalari tali che sostituendo

$$x_i = s_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

tutte le equazioni del sistema lineare sono soddisfatte.

- Un sistema lineare si dice **OMOGENEO** $\Longleftrightarrow$ il vettore dei termini noti $= 0$
  [i.e. $b_i = 0 \ \forall i$]
- Un sistema lineare si dice **COMPATIBILE** $\Longleftrightarrow$ esiste almeno una soluzione.
- Un sistema lineare si indica spesso nella forma breve:

VETTORE delle INCOGNITE

MATRICE INCOMPLETA dei COEFFICIENTI

VETTORE dei TERMINI NOTI

$$A \cdot x = b$$

PRODOTTO RIGA per COLONNA TRA MATRICI

ovvero:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

D: Se ad un **SISTEMA LINEARE** si può associare una **MATRICE**, è possibile applicare **LE TRE TRASFORMAZIONI ELEMENTARI DIRETTAMENTE** a livello di matrici senza più preoccuparsi delle equazioni esplicite del sistema lineare?

R: Certo!

OE1 OPERAZIONE ELEMENTARE 1: $R_i \mapsto \lambda \cdot R_i,\quad \lambda \in K^{\times}$

IL CAMPO SENZA LO ZERO

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 1/7 & 2/7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \mapsto 7 \cdot R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

OE2 OPERAZIONE ELEMENTARE 2: $R_i \longmapsto R_i + \lambda \cdot R_j \quad \lambda \in K^{\times}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 + 2 \cdot R_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 12 \end{array}\right)$$

OE3 OPERAZIONE ELEMENTARE 3: $R_i \longleftrightarrow R_j$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Riassumendo, abbiamo visto che:

1. Ai sistemi lineari possiamo associare una matrice
2. Le operazioni elementari sui sistemi lineari [che non cambiano le soluzioni] si possono ugualmente fare a livello di matrici
3. A volte applicando le operazioni elementari nell'ordine e nel modo giusto possiamo ottenere sistemi [= matrici] facili da risolvere

Q: E quindi quali sarebbero queste MATRICI FACILI da RISOLVERE?

Def: $A \in M_{n\times m}(K)$ é **IN FORMA SCALA** oppure **A SCALA** oppure **A GRADINI** oppure **GRADINIZZATA** $\Leftrightarrow$ definiti i primi elementi non nulli per ogni riga non-nulla $A_{(i)}$

$$d_i := \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\},$$

si abbia soddisfatta la condizione:

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_r$$

r = NUMERO DI RIGHE NON NULLE, INVECE TUTTE LE RIGHE SONO IN FONDO

Per una matrice a scala gli elementi $\{a_{1d_1}, \ldots, a_{r,d_r}\}$ si chiamano **I PIVOT** della matrice a scala

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 2,\ d_2 = 3,\ d_3 = 5,\ r = 3$

UNA MATRICE $\in M_{4\times 7}(\mathbb{R})$ IN FORMA SCALA

In rosso i tre **PIVOT**

QUESTI DUE **NON** SONO DAVVERO **PIVOT**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

UNA MATRICE CHE **NON É IN FORMA SCALA** [perché una riga nulla viene prima di una non-nulla]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SIA LA MATRICE **UNITÀ** CHE LA MATRICE **NULLA** SONO IN FORMA SCALA

<u>Oss</u>: Ogni matrice **IN FORMA SCALA** è una matrice **TRIANGOLARE SUPERIORE**, ma non è vero che ogni matrice **TRIANGOLARE SUPERIORE** sia **IN FORMA SCALA**, ad esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è triangolare superiore ma non in forma scala.

D: E COME MAI LE MATRICI IN FORMA SCALA DOVREBBERO ESSERE COSÌ FACILI DA RISOLVERE (COME SISTEMI LINEARI) ??

R: PERCHÉ SI PUÒ ATTUARE LA PROCEDURA della **SOSTITUZIONE ALL' INDIETRO**

Concettualmente:

STEP I

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + \dots + \sqrt{2}\cdot x_m = 7 \\ \vdots \\ -x_1 - 3x_2 + \dots + 2x_m = \pi \end{cases}$$

SISTEMA LINEARE INIZIALE

$\longrightarrow$

STEP II

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & \dots & \sqrt{2} & 7 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -3 & \dots & 2 & \pi \end{array}\right)$$

MATRICE COMPLETA ASSOCIATA

$\xrightarrow{\text{OPERAZIONI ELEMENTARI}}$

STEP III

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 5 & 3 & \dots & & & \sqrt{2} & 7 \\ 0 & 1 & \dots & & & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \dots & & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

MATRICE IN FORMA SCALA

$\longrightarrow$

STEP IV

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + \dots + \sqrt{2}x_m = 7 \\ 0 + x_2 + \dots = 1 \\ 0 + 0 + \sqrt{2}x_3 + \dots = 2 \\ \vdots \\ 3 \cdot x_{m-1} = 2 \end{cases}$$

PRENDO L'ULTIMA VARIABILE, LA CALCOLO: $x_{m-1} = 2/3$ E POI LA SOSTITUISCO ALL' INDIETRO NELL' EQUAZIONE SOPRA, POI SOPRA ANCORA, ETC, FINO ALLA PRIMA

Esempio di Sostituzione all'indietro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 0 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 0 + 0 + x_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2 = 7 \\ 0 + 3x_2 + 2 = 5 \\ 0 + 0 + x_3 = 2 \end{cases} \rightarrow$$

FORMA A SCALA

$x_3 = 2$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 9 \\ 3x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 1 = 9 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$x_2 = 7/3$

FACILE!

[MA SOLO UNA VOLTA CHE LA MATRICE È A SCALA]

D: Ci RIMANE SOLO DA CAPIRE COME USARE LE OPERAZIONI ELEMENTARI PER **PORTARE UNA MATRICE IN FORMA SCALA** [ASSUMENDO CHE SIA SEMPRE POSSIBILE]. COME SI FA?

R: Il MODO PER FARLO C'È, È ESPLICITO, E SI CHIAMA **METODO DI GAUSS** o **ALGORITMO DI GAUSS** per la riduzione in forma scala.