

2° su 11 altre

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$
 $(-\infty)$

$\forall K \quad \exists \delta_K > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta_K \Rightarrow f(x) > K$
 $(f(x) < K)$

Es. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\forall K_1 > 0 \quad \exists \delta_{K_1} > 0$ t.c. $0 < |x| < \delta_{K_1} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > K$

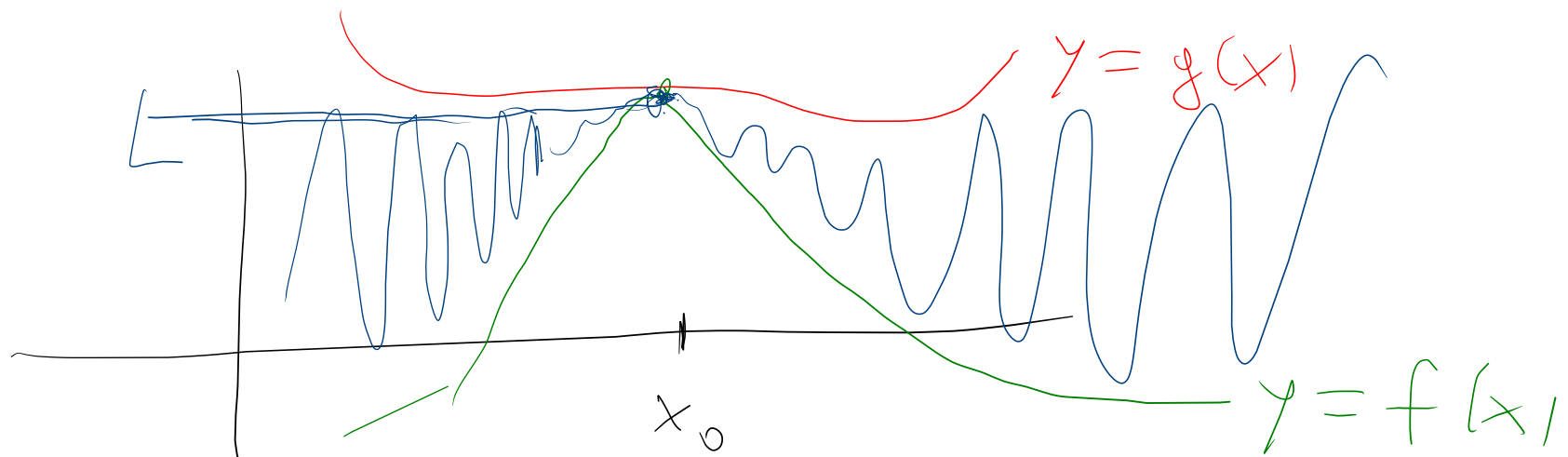
$$\frac{1}{x^2} > K \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{K} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \frac{1}{\sqrt{K}}$$

$$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{K}} =: \delta_{K_1}$$

Teor (Corollary) Suppose $f, g, h: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X'$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$



Una diversa definizione di continuità

Def Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$. Diciamo
che f è continuo in x_0 se

$$① \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Esercizio Verificare che se $x_0 \in X' \cap X$ allora ① è
equivalente a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Def Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in X \cap X'$. Allora:

f è continuo in x_0 se per ogni successione
 $\{x_n\}$ in $X \setminus \{x_0\}$ ~~con~~ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

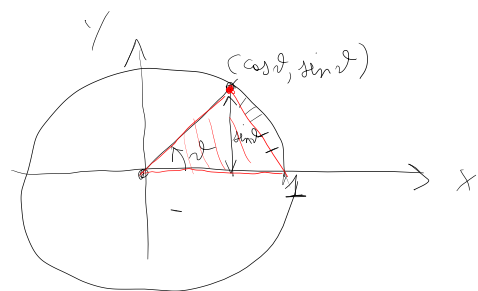
Def Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in X'$ ed $L \in \overline{\mathbb{R}}$
allora

si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se per ogni $\{x_n\}$ in $X \setminus \{x_0\}$
t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$

Teor $\sin x$ e $\cos x \in C^0(\mathbb{R})$

Dim

Per primo caso dimostriamo $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin(0)$



$$\text{Area triangolo} = \frac{\sin \theta}{2}$$

$$\text{Area settore circolare} = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Per } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{ho} \quad 0 \leq \sin \theta \leq \theta$$

$$\therefore \sin x \leq x \quad \text{per ogni } 0 \leq x$$

$$(|\sin x| \leq |x| \quad \forall \quad x \geq 0)$$

$\Uparrow \Downarrow$ vale perché $|\sin x|$ e $|x|$ sono pari

$$|\sin x| \leq |x| \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se io so che } |\sin x| \leq |x| \quad \forall \quad x \geq 0$$

$$\text{Se } x < 0 \quad (|\sin x| = |-\sin(-x)| = |\sin(-x)|)$$

$$\sin(x) = -\sin(-x) \quad (|x| = |-x|)$$

$$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow \underbrace{|\sin(-x)|}_{|\sin x|} \leq \underbrace{|-x|}_{|x|}$$