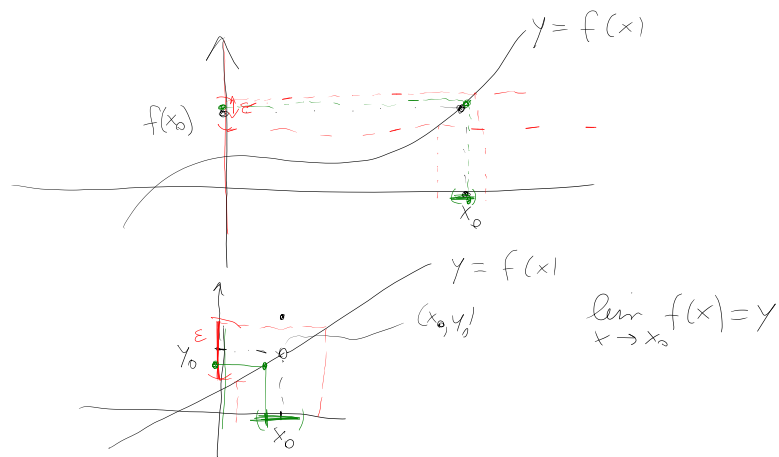


11 ottobre

Def (Limite finito) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$
 e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Sia ancora $L \in \mathbb{R}$. Allora
 diciamo che il limite di f per x che a x_0 è L ,
 e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se

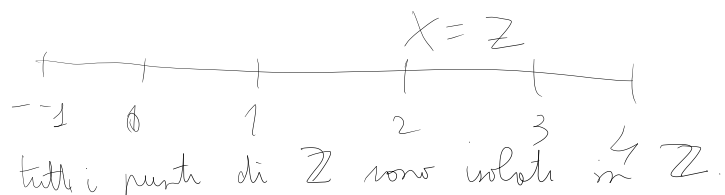
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$



Def Se, nella precedente definizione, $x_0 \in X$
 e se $L = f(x_0)$ diciamo che la funzione
 è continua nel punto x_0

se $x_0 \in X \cap X'$ e se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$
 diciamo che f è
 continua in x_0 e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

I punti di X non contenuti in X'
 sono detti punti isolati di X .



$$\lim_{x \rightarrow x_0}$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$$

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x - \cancel{x_0}| < \varepsilon$$

La funzione x è continua in $\mathbb{R}$ cioè

appartiene $C^0(\mathbb{R}) =$ l'insieme delle funzioni continue in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 8} x^2 = 8^2 = 64$$

Bisogna dimostrare

$$\forall \varepsilon \in (0, 1): \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } 0 < |x - 8| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x^2 - 8^2| < \varepsilon$$

$$|x^2 - 8^2| < \varepsilon$$

$$x^2 - 8^2 = (x - 8)(x + 8)$$

$$|x - 8| |x + 8| < \varepsilon$$

$$|x - 8| < \frac{\varepsilon}{|x + 8|}$$

Decidiamo che prenderemo $\delta_\varepsilon \leq 1$.

Cioè gli x li prendiamo

$$0 < |x - 8| < \delta_\varepsilon \leq 1$$

$$|x - 8| \leq 1$$

$$-1 \leq x - 8 \leq 1$$

$$7 \leq x \leq 9$$

$$|x + 8| = x + 8$$

$$15 \leq x + 8 \leq 17$$

$$|x - 8| \leq \frac{\varepsilon}{|x + 8|}$$

$$\frac{1}{15} \geq \frac{1}{x + 8} \geq \left(\frac{1}{17} \right)$$

$$|x - 8| \leq 1$$

$$\frac{\varepsilon}{|x + 8|} = \frac{\varepsilon}{x + 8} = \varepsilon \frac{1}{x + 8} \geq \frac{\varepsilon}{17} \underset{\text{impongo}}{>} |x - 8|$$

$$\text{Definire } \delta_\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{17}, 1 \right\}$$

$$\text{Allora per } |x - 8| < \delta_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{17} \text{ ed}$$

$$\text{è vero anche } |x - 8| < \frac{\varepsilon}{|x + 8|} \Rightarrow |x^2 - 64| < \varepsilon$$

Teorema Soma $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e gionij

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}$$

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = a b$$

$$3) \quad \text{Se } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X \text{ e } b \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$